



UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT – PARIS 7  
SORBONNE PARIS CITÉ

École doctorale Physique en Île-de-France  
Laboratoire Matière et Systèmes Complexes



## THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Physique

---

# INTERACTIONS ENTRE ONDES DE SURFACE ET ÉCOULEMENTS HYDRODYNAMIQUES

---

**Timothée JAMIN**

Thèse dirigée par Éric FALCON et Michael BERHANU

Soutenue le 22 janvier 2016

Composition du jury :

M.	CHRISTOPHE CLANET	(Rapporteur)
M.	FRÉDÉRIC DIAS	(Rapporteur)
M.	THIERRY DAUXOIS	(Président du jury)
M.	JEAN-CLAUDE BACRI	(Examineur)
M.	MICHAEL BERHANU	(Directeur de thèse)
M.	ERIC FALCON	(Directeur de thèse)
M.	YVES COUDER	(Invité)
Mme	CAROLE NAHUM	(Invitée)









## Résumé

Les ondes à la surface d'un liquide résultent en général d'un échange continu entre l'énergie cinétique du liquide et son énergie potentielle liée aux forces de gravité et de tension de surface. L'énergie cinétique du liquide est alors mise en jeu à la fois dans les ondes de surface et dans les écoulements hydrodynamiques qui peuvent prendre place sous la surface libre, ce qui peut mener à des interactions spécifiques entre ondes et écoulements. Dans ce manuscrit, nous étudions ces interactions à travers trois expériences couvrant différents types d'écoulements et de déformations de la surface libre.

Dans une première expérience, nous étudions les ondes à la surface d'un liquide engendrées par la déformation 2D d'un fond mobile, en lien avec le cas géophysique des tsunamis. Par la mesure simultanée des déformations de la surface libre et du champ de vitesse sous la surface par PIV (vélocimétrie par images de particules), nous étudions l'influence des caractéristiques spatiales et temporelles de la déformation du fond sur les mouvements induits dans le fluide et à la surface libre. Nous mettons notamment en évidence différents régimes dépendant du rapport entre la durée typique du mouvement du fond et la période de l'onde engendrée. Par exemple, si la déformation du fond n'est pas très rapide, la forme de la vague engendrée dépend notablement de la dynamique du fond, habituellement négligée dans les simulations de tsunamis. Par ailleurs, pour une déformation rapide, nous développons un modèle capable de prédire la forme de la vague engendrée en fonction de la structure spatiale de la déformation, y compris dans le cas d'une profondeur d'eau non uniforme.

Nous nous intéressons, dans une deuxième expérience, aux ondes stationnaires à la périphérie d'une goutte de liquide sensible au champ magnétique (ferrofluide). Lorsque celle-ci est soumise à une vibration verticale, elle présente des lobes oscillants à sa périphérie. Nous montrons que les fréquences de résonance de ces ondes stationnaires sont ajustables par un champ magnétique extérieur. Par un modèle capable de prédire l'évolution de ces fréquences propres avec le champ, nous démontrons que le champ magnétique permet de contrôler la tension de surface effective de la goutte.

Enfin, la troisième expérience met en jeu un large spectre d'échelles spatiales et temporelles en sondant les interactions entre une surface libre et une turbulence hydrodynamique, générée par des jets sous la surface. Nous étudions par des mesures PIV comment la turbulence hydrodynamique est modifiée par la présence d'une surface libre. Inversement, nous analysons les déformations de la surface libre induites par la turbulence par des mesures de la surface pleinement résolues en temps et en espace. Nous mettons en évidence la présence d'ondes de surface, qui sont toutefois dominées par les empreintes de l'écoulement turbulent sous la surface. Enfin, nous observons comment les caractéristiques spatiales et temporelles d'ondes générées à la surface du liquide au moyen d'un batteur sont affectées par la présence de turbulence hydrodynamique sous la surface.

## Abstract

Waves on the surface of a liquid generally result from a continuous exchange between the kinetic energy of the liquid and its potential energy associated with gravity and capillary forces. Thus the kinetic energy is involved both in surface waves and hydrodynamic flows which may take place beneath the free surface. This can lead to specific interactions between waves and flows. In the present manuscript, we investigate these interactions through three experiments involving different types of flows and free-surface deformations.

In a first experiment, we study the waves on the surface of a liquid caused by the 2D deformation of a moving bottom, in connection with the geophysical case of tsunamis. By simultaneously measuring the free-surface deformations and the velocity field under the surface by PIV (particle image velocimetry), we study how the spatial and temporal characteristics of the bottom deformation affects the motion induced in the fluid and at the free surface. We especially highlight different regimes depending on the ratio between the typical rise time of the bottom motion and the period of the generated wave. For instance, if the deformation of the bottom is not very fast, the shape of the generated wave significantly depends on the bottom dynamics, usually overlooked in tsunami simulations. Besides, for a fast motion, we develop a model able to predict the shape of the generated wave according to the spatial structure of the bottom deformation, even in the case of a nonuniform water depth.

A second experiment is focused on the standing waves at the periphery of a drop of liquid sensitive to a magnetic field (ferrofluid). When the drop is subjected to a vertical vibration, it displays lobes oscillating at its periphery. We show that the resonant frequencies of these standing waves can be adjusted by an external magnetic field. By means of a model able to predict the evolution of these natural frequencies with the field, we demonstrate that the magnetic field can control the effective surface tension of the drop.

Finally, the third experiment involves a broad range of spatial and temporal scales by probing the interactions between a free surface and a hydrodynamic turbulence generated by jets under the surface. We measure by PIV how hydrodynamic turbulence is modified by the presence of a free surface. Conversely, we analyze the deformation of the free surface induced by turbulence through measurements of the surface fully resolved in time and space. We observe the presence of surface waves, which are however found to be dominated by the footprints of the turbulent flow under the surface. Finally, we see how the spatial and temporal characteristics of waves generated by a wavemaker on the free surface are affected by the presence of hydrodynamic turbulence below the surface.

# Remerciements

Je tiens tout d’abord à remercier Eric et Michael qui m’ont proposé de faire cette thèse dans leur équipe, en m’offrant un sujet riche et intéressant et de bonnes conditions de recherche, à la fois sur le plan scientifique et sur le plan humain. Merci à eux qui ont su être présents et disponibles, tout en m’accordant leur confiance et me laissant ainsi une grande autonomie. Je remercie aussi les autres membres de l’équipe : Claude, pour son abnégation dans la collection de données, sa connaissance empirique et ses astuces expérimentales, Luc, Simon, Florence, Leonardo, Annette et Gerardo pour nos discussions, scientifiques ou autres, ces moments de vie de labo, et nos partages d’expérience, Yacine et Florian, pour leur travail lors de leurs stages de L3 et qui ont contribué aux expériences présentées dans cette thèse.

Mes remerciements s’étendent à l’ensemble des membres du laboratoire, dont les deux directeurs successifs, Loïc Auvray et Laurent Limat. Je pense aux doctorants et postdoctorants du laboratoire notamment Maxime, Stéphane, Henri, Clément, Alexandre, JB, Artémis, Kelly, Zachary ou Tanguy. J’ai pu par ailleurs bénéficier des précieux conseils de Boubou en chimie et de son expérience des surfaces superhydrophobes. Merci à Jean-Claude pour le partage de ses connaissances lors de nos discussions et débats sur les ferrofluides et les instabilités ; à Sylvain pour les divagations autour du repas, scientifiques, cinématographiques kill kill ou autres, mais toujours pleines d’énergie ; à Martin et Thierry pour le partage de la salle de manip, de connaissances et d’apéros ; à David pour les discussions autour des solutions électroniques ; à Caroline Derec et Florence Elias pour le prêt du tensiomètre. Je remercie également les techniciens du laboratoire : Alex et Yann pour la fabrication des pièces et les p’tits trous nécessaires à mes expériences, ainsi que Laurent et Stephano. Le bon fonctionnement du laboratoire repose bien sûr sur les administratifs Lucie, Sarah, Carole et Nadine que je remercie pour leur efficacité.

A l’extérieur du laboratoire, je dois remercier ceux avec qui j’ai partagé les séjours à Nantes et les bords des bassins de l’Ecole Centrale dans le cadre de la collaboration Turbulon, dont Benjamin, Benoît, Sébastien, Pablo, Thomas, et surtout Félicien qui a rendu cette collaboration possible en organisant ces rencontres avec efficacité. J’adresse aussi mes remerciements à Sophie Neveu pour nous avoir fourni du ferrofluide, Nicolas Mordant pour avoir partagé le programme anti-reflets pour la profilométrie, ainsi que François Daviaud et Bérengère Dubrulle pour le prêt de leur LDV et sa platine de déplacement. Je suis aussi reconnaissant envers les membres du jury d’avoir accepté d’évaluer mon travail. Cette thèse a été financée conjointement par le CNRS et la Direction Générale de l’Armement que je remercie pour m’avoir accordé leur confiance.

Enfin, cette thèse doit aussi sa réussite à tous ceux présents en-dehors du “milieu”. Mes parents, sans qui tout cela, pour d’évidentes raisons biologiques, n’aurait pas été possible. Leur contribution a commencé bien avant que je sois capable de prononcer le mot “Merci” et leur soutien n’a jamais faibli. Ma grand-mère Bernadette pour ses recettes délicieuses “à lurlure”, ses piques bien placées et ses étonnements. Mon grand-père René pour sa sagesse, ses petites blagues surprenantes et nos excursions en forêt d’autrefois. Mon frère Clément, pour nos discussions et son humour unique. Nadia, pour sa bonne humeur et sa répartie. Hélène, pour son humour et sa folie. Marie, pour sa

spontanéité et nos évasions. Raf' et Math' pour tous ces moments “comme à la maison”, nos vacances au naturel, en Vendée ou à l'autre bout du monde. Thomas, Artabaze et Kamel, pour nos rendez-vous réguliers, week-ends ou vacances. Les Phoenix pour ces week-ends mémorables, notamment Olivier, Patoche, Mathilde, Marie, Evelyn, Sylvain, Jérôme, Houcine, A2, Wil' ou Kao.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>14</b>
<b>I Génération d'ondes de surface par un fond mobile</b>	<b>19</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>21</b>
1.1 Contexte . . . . .	21
1.2 Plan de la partie . . . . .	22
<b>2 Dispositif expérimental</b>	<b>23</b>
2.1 Présentation de l'expérience . . . . .	23
2.2 Génération d'impulsions . . . . .	24
2.2.1 Réponse en fréquence du vibreur . . . . .	24
2.2.2 Algorithme par affinements successifs . . . . .	26
2.3 Techniques de mesures . . . . .	29
2.3.1 Vélocimétrie par images de particules (PIV) . . . . .	29
2.3.2 Détection de la surface libre par transformée de Radon . . . . .	31
<b>3 Outils théoriques</b>	<b>33</b>
3.1 Théorie linéaire . . . . .	33
3.2 Implémentation numérique . . . . .	36
3.2.1 Transformée de Laplace . . . . .	36
3.2.2 Transformée de Hankel . . . . .	37
3.3 Conclusion . . . . .	38
<b>4 Résultats</b>	<b>39</b>
4.1 Résumé . . . . .	39
4.2 Article publié dans <i>Proceedings of the Royal Society</i> . . . . .	40
<b>5 Conclusion et perspectives</b>	<b>57</b>

<b>II</b>	<b>Oscillations d'une goutte de fluide magnétique</b>	<b>61</b>
<b>6</b>	<b>Introduction</b>	<b>63</b>
6.1	Contexte . . . . .	63
6.2	Plan de la partie . . . . .	64
6.3	Modes azimutaux à la périphérie d'une goutte aplatie : rappels . . . . .	65
6.3.1	Fréquences de résonance théoriques . . . . .	65
6.3.2	Instabilité paramétrique . . . . .	66
6.4	Modes axisymétriques d'une goutte : rappels . . . . .	68
6.4.1	Ondes gravito-capillaires . . . . .	68
6.4.2	Ondes en géométrie cylindrique . . . . .	69
6.5	Ferrofluides : rappels . . . . .	69
6.5.1	Stabilité des ferrofluides . . . . .	70
6.5.2	Propriétés magnétiques . . . . .	70
6.5.3	Energie magnétique et forme du ferrofluide . . . . .	70
6.5.4	Ondes à la surface d'un ferrofluide . . . . .	73
<b>7</b>	<b>Dispositif expérimental</b>	<b>75</b>
7.1	Description du montage . . . . .	75
7.2	Substrat superhydrophobe . . . . .	76
7.3	Ferrofluides . . . . .	78
7.3.1	Caractéristiques des ferrofluides utilisés . . . . .	78
7.3.2	Mesures des tensions de surface . . . . .	78
7.3.3	Mesures des caractéristiques magnétiques . . . . .	79
<b>8</b>	<b>Modes azimutaux à la périphérie d'une goutte magnétique : influence du champ magnétique</b>	<b>81</b>
8.1	Résumé . . . . .	81
8.2	Article publié dans <i>Physical Review Fluids</i> . . . . .	84
<b>9</b>	<b>Modes axisymétriques d'une goutte magnétique vibrée verticalement</b>	<b>95</b>
9.1	Protocole expérimental . . . . .	95
9.2	Fréquences propres sans champ magnétique . . . . .	96
9.2.1	Résultats expérimentaux . . . . .	96
9.2.2	Interprétation . . . . .	97
9.3	Fréquences propres avec champ magnétique . . . . .	101
9.3.1	Résultats expérimentaux . . . . .	101

9.3.2	Interprétation . . . . .	102
9.4	Conclusion . . . . .	105
<b>10</b>	<b>Modes azimutaux : expérience contrôle</b>	<b>107</b>
10.1	Problématique . . . . .	107
10.2	Protocole expérimental . . . . .	107
10.2.1	Modification du dispositif . . . . .	107
10.2.2	Protocole . . . . .	108
10.3	Observations . . . . .	109
10.4	Modes propres sans champ magnétique . . . . .	109
10.5	Modes propres avec champ magnétique . . . . .	110
10.6	Conclusion . . . . .	112
<b>11</b>	<b>Conclusion</b>	<b>113</b>
<b>Annexe A</b>	<b>Calcul des fréquences propres des modes azimutaux à la périphérie d'une goutte aplatie</b>	<b>115</b>
<b>Annexe B</b>	<b>Déformation quasi-statique d'une goutte sphérique sous champ magnétique</b>	<b>119</b>
<b>Annexe C</b>	<b>Déformation quasi-statique d'une goutte aplatie sous champ magnétique</b>	<b>121</b>
<b>Annexe D</b>	<b>Calcul de la fréquence propre du mode axisymétrique d'écrasement</b>	<b>125</b>
<b>III</b>	<b>Exploration des interactions entre turbulence hydrodynamique et surface libre</b>	<b>129</b>
<b>12</b>	<b>Introduction</b>	<b>131</b>
12.1	Contexte . . . . .	131
12.2	Plan de la partie . . . . .	135
<b>13</b>	<b>Dispositif expérimental</b>	<b>137</b>
13.1	Contexte . . . . .	137
13.2	Description du montage . . . . .	137
13.3	Contrôle du débit - Asservissement . . . . .	138
13.4	Contrôle des jets . . . . .	139
13.4.1	Electrovannes . . . . .	139
13.4.2	Algorithme . . . . .	141

13.5	Techniques de mesures . . . . .	144
13.5.1	Vélocimétrie par Images de Particules (PIV) . . . . .	144
13.5.2	Profilométrie par Transformée de Fourier (FTP) . . . . .	145
13.5.3	Vélocimétrie laser Doppler (LDV) . . . . .	147
<b>14</b>	<b>Turbulence hydrodynamique : effet de la surface libre et caractérisation</b>	<b>149</b>
14.1	Turbulence hydrodynamique sous la surface libre . . . . .	149
14.1.1	Fluctuations de vitesse . . . . .	149
14.1.2	Spectres d'énergie . . . . .	155
14.1.3	Vorticité . . . . .	157
14.2	Grandeurs turbulentes caractéristiques . . . . .	159
14.2.1	Ecart-types . . . . .	159
14.2.2	Echelles intégrales . . . . .	160
14.2.3	Taux de dissipation . . . . .	161
14.2.4	Nombres de Reynolds . . . . .	163
14.3	Conclusion . . . . .	164
<b>15</b>	<b>Effet de la turbulence hydrodynamique sur des ondes de surface monochromatiques</b>	<b>165</b>
15.1	Dispositif expérimental . . . . .	165
15.2	Observations . . . . .	166
15.3	Spectres spatiotemporels longitudinaux . . . . .	171
15.4	Spectres spatiaux longitudinaux . . . . .	173
15.5	Redistribution transverse de l'énergie des vagues . . . . .	175
15.6	Spectres temporels . . . . .	179
15.7	Conclusion . . . . .	180
<b>16</b>	<b>Déformations de la surface libre induites par la turbulence hydrodynamique</b>	<b>183</b>
16.1	Protocole expérimental . . . . .	183
16.2	Amplitude des déformations . . . . .	184
16.3	Spectres spatiotemporels . . . . .	184
16.4	Spectres spatiaux . . . . .	187
16.5	Spectres temporels . . . . .	189
16.6	Conclusion . . . . .	191
<b>17</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>193</b>



<b>Annexe E Effet de la turbulence hydrodynamique sur un mélange d'ondes gravito-capillaires</b>	<b>195</b>
<b>Conclusion</b>	<b>201</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>203</b>



# Introduction



La propagation d'ondes intervient dans de nombreux domaines de la Physique : l'électromagnétisme, l'acoustique, les séismes, ou encore la mécanique quantique. En hydrodynamique, des ondes internes peuvent jouer un rôle important à grande échelle dans le mélange des masses d'eau océaniques, tandis qu'à l'interface avec l'atmosphère, ce sont des ondes de surface qui se manifestent par exemple sous forme de vagues. Ces ondes de surface sont généralement le résultat d'un échange entre énergie cinétique et énergie potentielle. Cette dernière est la somme d'une énergie potentielle de gravité et d'une énergie potentielle dite de capillarité liée aux effets de tension de surface. En effet, lors d'une perturbation locale à la surface d'un liquide, la gravité exerce une force qui ramène le liquide à une même hauteur et la capillarité, qui traduit les forces de cohésion dans le liquide, s'oppose aux courbures de la surface. Ces deux forces de rappel tendent à aplanir la surface, la première étant dominante aux grandes échelles (à partir de quelques centimètres) et la seconde aux plus petites échelles (en-dessous du centimètre). En cas de perturbation, ils vont donc ramener la surface à sa position d'équilibre. Un échange continu entre énergie cinétique du liquide d'une part et énergie potentielle d'autre part peut alors s'installer, entraîner une oscillation de la surface libre et se traduire par des ondes de surface. L'énergie cinétique du liquide étant mise en jeu à la fois dans l'écoulement et dans les ondes de surface, on s'attend à observer des interactions particulières entre ces deux types de mouvement. Durant cette thèse, nous avons sondé les interactions entre un écoulement hydrodynamique et une surface libre à travers trois expériences, qui couvrent différents types d'écoulement, des déformations de la surface libre de différentes natures (ondes propagatives, ondes stationnaires ou empreintes des structures spatiales de l'écoulement), tout en mettant en jeu différentes échelles et différentes énergies (capillarité, gravité mais aussi magnétisme).

Dans la **première partie**, nous étudions la génération d'ondes de surface gravitaires dans une cuve dont le fond est localement déformé par un piston subissant une impulsion verticale. Par la mesure simultanée des déformations de la surface libre et du champ de vitesse sous la surface par PIV (Particle Image Velocimetry – vélocimétrie par images de particules), nous étudions le rôle des caractéristiques spatiotemporelles de la déformation du fond, en lien avec le cas géophysique des tsunamis. En **deuxième partie**, nous nous sommes intéressés aux ondes stationnaires à la surface et à la périphérie d'une goutte de liquide sensible au champ magnétique (ferrofluide), lorsque celle-ci est soumise à un champ magnétique constant et à une vibration verticale. Selon l'amplitude de vibration, cette goutte présente alors des ondes circulaires à sa surface supérieure ou des lobes oscillants à sa périphérie. Nous montrons que les fréquences de résonance de ces ondes stationnaires sont ajustables par le champ magnétique extérieur. Nous développons un modèle qui est capable de prédire l'évolution de ces fréquences propres avec le champ en fonction des paramètres du système. Dans le cas des lobes périphériques, le rôle du champ magnétique permet notamment de contrôler la tension de surface effective de la goutte. Enfin, la **troisième partie** met en jeu diverses échelles spatiales et temporelles en sondant les interactions entre la turbulence hydrodynamique et la surface libre. La turbulence est générée au sein d'un fluide par des jets verticaux situés au fond d'une cuve. Nous étudions par des mesures PIV comment la turbulence hydrodynamique est modifiée par la présence d'une surface libre et nous caractérisons l'écoulement turbulent généré en volume et sous la surface. Des ondes de surface planes monochromatiques sont ensuite produites par un batteur à la surface du fluide. Nous analysons par des mesures spatiotemporelles 2D des déformations de la surface libre comment celles-ci sont affectées par la présence de la turbulence en volume. Enfin, la même méthode de mesure nous permet d'observer les déformations de la surface libre induites par la turbulence hydrodynamique, mettant en évidence la présence d'ondes de surface dominées par des oscillations à basse fréquence, probables empreintes des structures spatiales de l'écoulement turbulent sous la surface.

Durant cette thèse, j'ai également pris part à une étude de la turbulence d'ondes en grand bassin au sein de la collaboration Turbulon qui réunit quatre laboratoires (MSC, CEA Saclay, ENS Paris

et EC Nantes). J'ai participé à quatre campagnes de mesures à l'Ecole Centrale de Nantes dont les résultats ont été publiés dans *Journal of Fluid Mechanics* [1]. J'ai par ailleurs contribué à une étude sur la dynamique de particules magnétiques macroscopiques qui présentent une transition vers une phase labyrinthique, dont les résultats ont été publiés dans *Physical Review E* [2]. Les résultats de ces deux études n'ont pas été développés dans ce manuscrit.

## Première partie

### Génération d'ondes de surface par un fond mobile





# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Contexte

L'étude de cette partie consiste à observer la façon dont des ondes sont générées à la surface d'un fluide lorsque le fond subit une déformation verticale. Il s'agit d'étudier à la fois les déformations de la surface libre et le champ de vitesse sous la surface. Nous nous intéressons en particulier aux effets des caractéristiques spatiotemporelles de cette déformation. Cette problématique est directement reliée au cas géophysique des tsunamis engendrés par un séisme sous-marin. Ceux-ci consistent typiquement en une déformation du fond de l'océan d'amplitude  $\sim 1$  m, sur une zone d'étendue  $\sim 100$  km dans un océan de profondeur  $\sim 1 - 10$  km. La vitesse typique de propagation est comprise entre 500 et 1 000 km/h. Afin de pouvoir prévenir les risques induits par un tel événement, les systèmes d'alerte calculent et prédisent en temps réel les caractéristiques de l'onde produite, notamment en termes d'amplitude. Les modèles analysent en particulier la propagation en pleine mer des tsunamis à partir des équations non linéaires en eau peu profonde. En revanche, le mécanisme de leur génération est souvent très simplifié : la condition initiale souvent considérée pour la surface libre avant la propagation est égale à la déformation finale du fond directement translatée à la surface et immobile. Ceci correspond à l'hypothèse d'une déformation du fond instantanée et d'une étendue de la zone déformée grande devant la profondeur de l'océan. La cinématique de la déformation du fond, c'est-à-dire ses caractéristiques spatiotemporelles, sont donc ici négligées. En pratique, les simulations numériques qui considèrent le couplage entre la cinématique du fond et la surface de façon plus complète ont souvent des coûts de calcul importants, ce qui les rend difficilement utilisables pour des systèmes d'alerte. Une revue de la littérature, des problèmes rencontrés et des évolutions en cours dans le cadre de la prédiction des tsunamis est réalisée en introduction de notre article publié au chapitre 4.

Après de premiers travaux théoriques de Kajiura en 1963 [3], Hammack [4, 5] développe en 1972 une théorie linéaire des ondes de surface 1D générées par un fond mobile. Il montre ainsi le rôle des caractéristiques spatiotemporelles de la déformation lors de la génération de telles ondes. Son étude contient également des expériences dont les résultats se trouvent en bon accord avec les prédictions théoriques. Il identifie différents régimes en comparant le temps caractéristique de la déformation du fond au temps typique de propagation de l'onde sur la zone déformée. Si Hammack [4] aborde brièvement les calculs 2D dans le cas d'une déformation axisymétrique du fond, c'est Dutykh *et al.* [6] qui généralisent la théorie aux deux dimensions horizontales, permettant d'élargir l'étude à des déformations du fond plus générales. En les comparant à des modèles non linéaires, Kervella *et al.* [7] ont montré que les théories linéaires étaient généralement suffisantes pour modéliser la génération de tsunamis.

Les théories linéaires développées supposent généralement que la profondeur d'eau est uniforme sur l'ensemble de la zone de génération, même si Kajiura [8] s'est intéressé au cas théorique spécifique d'une déformation du fond près d'un plateau continental. En 2015, Stefanakis *et al.* [9] ont quant à eux étudié analytiquement le cas d'une génération de tsunami au-dessus d'une surélévation cylindrique du fond.

D'un point de vue fondamental, ce sujet entre dans le cadre de notre étude sur les interactions entre ondes de surface et écoulements hydrodynamiques. Il s'agit notamment d'analyser le comportement du champ de vitesse sous la surface pour mieux comprendre la relation entre les champs de vitesses sous la surface et la déformation de la surface libre lors de la génération. Les champs de vitesses ont été calculés [10] et utilisés théoriquement pour des considérations énergétiques [11] ou à la surface libre [12], mais leur structure spatiale et leur évolution temporelle n'a jamais été étudiée.

Les expériences de laboratoire s'intéressant à la génération d'ondes de surface par des mouvements du fond restent rares et sont souvent basées sur des mesures de la surface libre [5, 13–16]. Les seules mesures du champ de vitesse en laboratoire concernent le cas de génération de tsunami par glissements de terrain [17, 18]. La plupart de ces expériences sont par ailleurs réalisées dans des canaux, ne considérant ainsi que des ondes se propageant dans une seule direction.

## 1.2 Plan de la partie

Dans cette partie, nous avons réalisé des expériences de génération d'ondes de surface 2D à partir d'une déformation du fond axisymétrique. La déformation de la surface libre et le champ de vitesse ont été mesurés simultanément pour la première fois. Le chapitre 2 présente le dispositif expérimental constitué d'une cuve carrée dont le fond a été troué en son centre et recouvert d'une membrane élastique. Cette dernière est déformée par un piston relié à un vibreur électromagnétique. Nous décrivons l'algorithme que nous avons développé permettant la génération d'impulsions verticales de forme temporelle, d'amplitude et de durée contrôlées. Les techniques de mesures du champ de vitesse et de la surface libre sont également présentées. Le chapitre 3 introduit la théorie linéaire de Hammack ainsi que certains outils théoriques. Enfin, les résultats obtenus sont présentés dans le chapitre 4 sous forme d'un article publié dans *Proceedings of the Royal Society A* [19] précédé d'un résumé. Les régimes rapide, lent et intermédiaire de déformation du fond relevés par Hammack [5] sont mis en évidence par l'observation de l'évolution temporelle de la surface libre et présentent des différences avec le cas 1D. Les champs de vitesse sous la surface caractérisent eux aussi ces différents régimes puisqu'ils présentent des structures spatiales et des évolutions temporelles spécifiques.

*Cette partie a été réalisée en collaboration avec le postdoctorant Leonardo Gordillo et des expériences préliminaires avaient été effectuées par Gerardo Ruiz-Chavarría, professeur invité à MSC.*

# Chapitre 2

## Dispositif expérimental

La présente étude s'intéresse à la génération d'ondes de surface par les mouvements verticaux d'un fond mobile. Nous décrivons donc ici le dispositif permettant l'observation de tels phénomènes par la production d'impulsions verticales bien définies et la mesure simultanée du champ de vitesse sous la surface et des déformations de la surface libre.

### 2.1 Présentation de l'expérience

Le dispositif expérimental mis en place pour l'étude des ondes de surface générées par un fond mobile consiste en une cuve carrée de 1.1 m de côté, remplie d'eau jusqu'à une hauteur de quelques centimètres (Fig. 2.1). Son fond a été troué en son centre de façon circulaire (rayon  $r_2 = 3.25$  cm) et recouvert d'une membrane élastique. Afin de générer des ondes de surface, la membrane subit des déformations verticales impulsionnelles de quelques millimètres d'amplitude, au moyen d'un piston circulaire (rayon  $r_1 = 2.5$  cm) situé sous la membrane et relié à un vibreur électromagnétique (VTS-100 Vibration Generator).

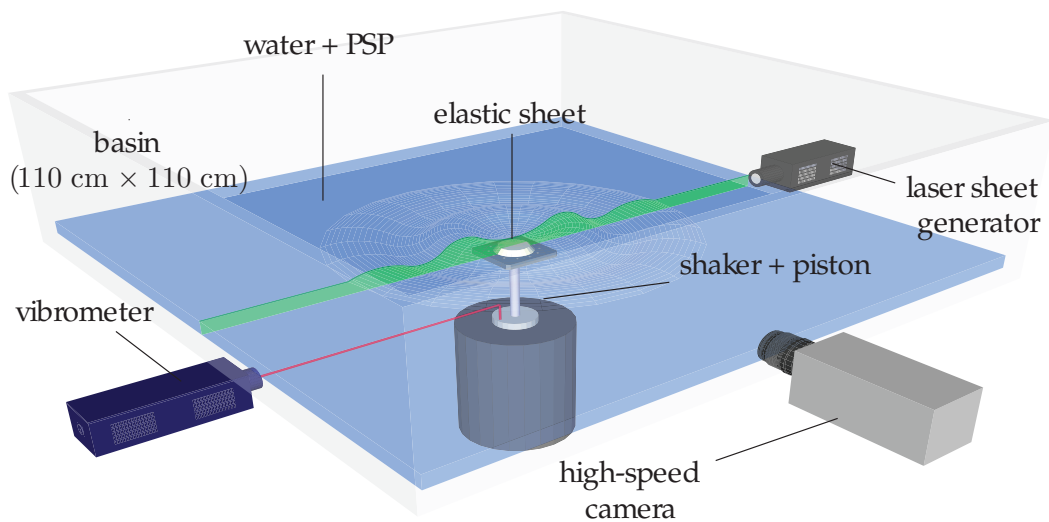


FIGURE 2.1 – Dispositif expérimental pour l'étude des ondes de surface générées par un fond mobile.

Le mouvement du fond est alors axisymétrique et peut être décrit comme le produit d'une fonction spatiale et d'une fonction temporelle :

$$\zeta(r, t) = \zeta_m \alpha(r) \beta(t). \quad (2.1)$$

$\zeta_m$  est l'amplitude de la déformation,  $\alpha(r)$  est le profil spatial selon la coordonnée radiale  $r$  et  $\beta(t)$  est la fonction temporelle de déplacement imposée par le vibreur (Fig. 2.2). En notant  $\tau_b$  le temps caractéristique de montée du fond, le déplacement peut être de type exponentiel :

$$\beta_{\text{exp}}(t) = 1 - e^{-t/\tau_b} \quad (2.2)$$

ou sinusoïdal :

$$\beta_{\text{sin}}(t) = \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi t}{2\tau_b} & \text{si } t \leq \tau_b \\ 1 & \text{si } t > \tau_b \end{cases} \quad (2.3)$$

Ces deux types d'impulsion sont représentatifs de fonctions temporelles plus générales, correspondant à des déplacements à vitesse initiale respectivement non nulle ( $\beta_{\text{exp}}(t \sim 0) \propto t$ ) et nulle ( $\beta_{\text{sin}}(t \sim 0) \propto_{t \sim 0} t^2$ ).

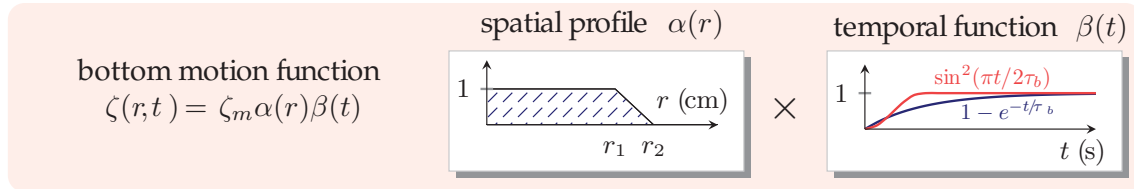


FIGURE 2.2 – Décomposition de la déformation du fond en un produit du profil spatial (à gauche) et d'une fonction temporelle (à droite). La fonction temporelle représentée en bleu (resp. rouge) correspond au déplacement de type exponentiel  $\beta_{\text{exp}}$  (resp. sinusoïdal  $\beta_{\text{sin}}$ ).

La vitesse de déplacement du vibreur est mesurée par un vibromètre laser, représenté sur la Fig. 2.1 (Polytec OFV-5000 Vibrometer Controller – OFV-505 Vibrometer Sensor Head). Le principe est le suivant : le vibromètre émet un faisceau laser, qui, après réflexion sur une partie mobile du vibreur, est renvoyé vers l'appareil. La fréquence de l'onde réfléchiée est modifiée par effet Doppler. La différence entre les fréquences des signaux émis et reçus est alors mesurée par l'interférence des deux faisceaux, ce qui permet de calculer la vitesse du vibreur.

Pour obtenir les impulsions voulues  $\beta(t)$ , le signal temporel à communiquer au vibreur est obtenu par un algorithme détaillé dans la section 2.2. Le champ de vitesse est déterminé grâce à la vélocimétrie par images de particules (PIV, section 2.3.1) et la déformation de la surface libre est mesurée par transformée de Radon sur les images de PIV (voir section 2.3.2). Dix réalisations sont effectuées pour chaque jeu de paramètres afin d'améliorer la précision des mesures. Les parois latérales du bassin sont suffisamment éloignées de la zone de déformation pour qu'aucune onde ne soit réfléchiée pendant la génération ou la mesure.

## 2.2 Génération d'impulsions

### 2.2.1 Réponse en fréquence du vibreur

La génération d'impulsions de formes et de durées contrôlées nécessite la prise en compte de la réponse du vibreur. En effet, pour des temps de montée inférieurs à quelques dixièmes de secondes,

l'évolution temporelle du vibreur ne suit pas celle du signal électrique reçu. Si le comportement du vibreur est linéaire et invariant temporel, on peut définir une réponse impulsionnelle  $h(t)$  telle que [20] :

$$b(t) = h(t) * u(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)u(\tau)d\tau \quad (2.4)$$

où  $b(t)$  est la fonction temporelle de déplacement du vibreur et  $u(t)$  la tension appliquée en entrée.  $b(t)$  est alors le produit de convolution de la réponse impulsionnelle et de la tension en entrée du vibreur. La transformée de Fourier  $\mathcal{F}$  de la réponse impulsionnelle est la réponse en fréquence  $f$  du vibreur  $H(f)$  :

$$H(f) \equiv \mathcal{F}\{h(t)\}(f) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-i2\pi ft}dt \quad (2.5)$$

qui satisfait l'équation suivante :

$$B(f) = H(f).U(f) \quad (2.6)$$

où  $B(f)$  et  $U(f)$  sont les transformées de Fourier respectives de  $b(t)$  et  $u(t)$ . Les Eqs (2.4) et (2.6) sont alors équivalentes.

Disposant ici de signaux expérimentaux constituées de données temporelles discrètes, nous utilisons des transformées de Fourier discrètes calculées par l'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT). Par abus de langage, nous confondons donc FFT et transformée de Fourier. Nous avons mesuré la réponse en fréquence du vibreur en appliquant en entrée un bruit blanc filtré sur plusieurs bandes de fréquences complémentaires entre  $10^{-2}$  et  $10^4$  Hz et en mesurant le déplacement du vibreur correspondant grâce au vibromètre laser. D'après l'Eq. (2.6),  $H(f)$  peut alors être déduit du rapport des FFT des deux signaux.

La Fig. 2.3 représente sa valeur absolue  $|H(f)|$  en fonction de la fréquence. On observe qu'au-delà de 1 Hz, l'amplitude de déplacement du vibreur décroît fortement avec la fréquence, ce qui explique que le vibreur ne suive pas les variations rapides du signal électrique reçu.

En supposant que le comportement du vibreur est linéaire, on peut déterminer, à partir de l'Eq. (2.6), le signal corrigé  $u_{cor}(t)$  à envoyer au vibreur afin d'obtenir le déplacement voulu  $\beta_{th}(t)$  :

$$u_{cor}(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{F}\{\beta_{th}(t)\}}{H(f)} \right\} \quad (2.7)$$

La Fig. 2.4 représente un exemple de signal corrigé envoyé au vibreur et le déplacement obtenu. On remarque qu'un pic de tension au début de l'impulsion ( $t = 0$ ) permet de compenser la faible réponse du vibreur à haute fréquence. Cependant, le déplacement obtenu de cette manière reste différent du déplacement voulu.

Ce désaccord est dû au comportement non linéaire du vibreur. Par exemple, la gravité crée une asymétrie entre les mouvements du vibreur dirigés vers le haut et vers le bas. Par ailleurs, outre les non-linéarités internes du vibreur, les forces extérieures exercées sur le vibreur, liées à la hauteur d'eau ou la tension élastique de la membrane, dépendent de l'amplitude du mouvement et varient au cours de la déformation.

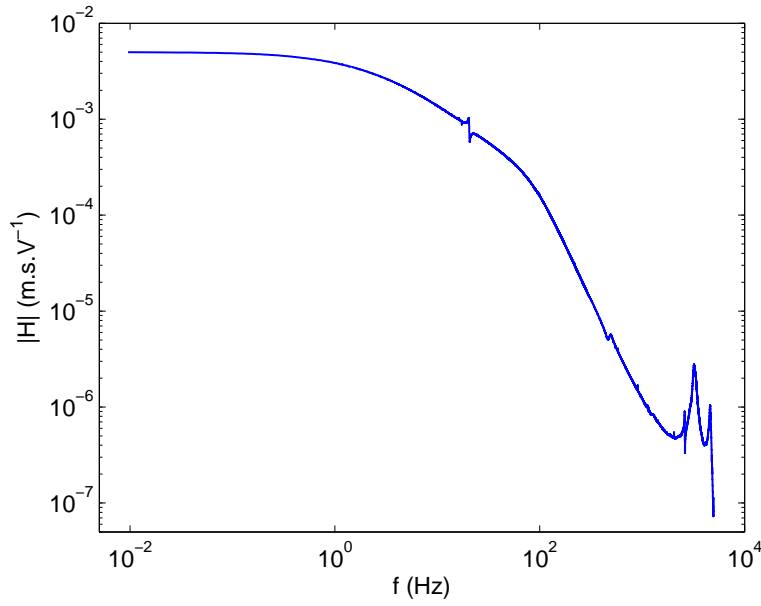


FIGURE 2.3 – Valeur absolue de la réponse en fréquence du vibreur  $|H(f)|$  en fonction de la fréquence  $f$ .  $H(f)$  est obtenue selon l'Eq. 2.6 par la mesure de l'amplitude de déplacement du vibreur et de la tension appliquée.

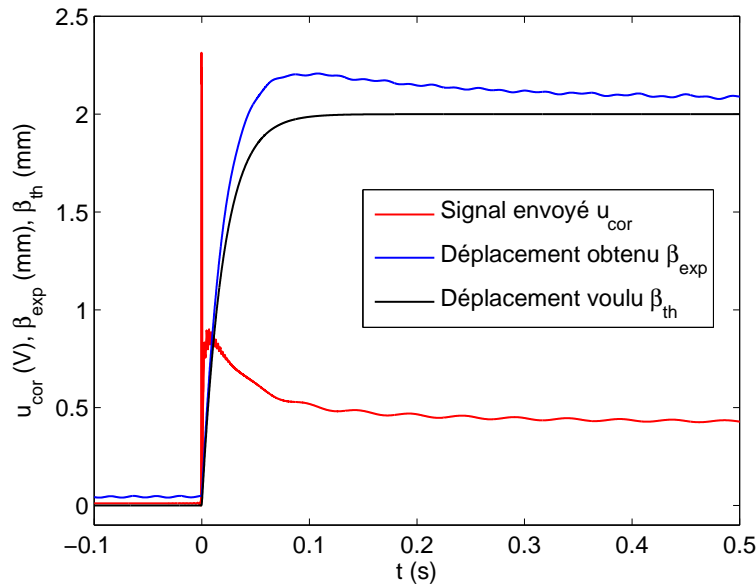


FIGURE 2.4 – Obtention d'une déformation du fond de type exponentiel (temps de montée  $\tau_b = 20$  ms, amplitude  $\zeta_m = 2$  mm) avec prise en compte du spectre de réponse en fréquence. Les lignes représentent le signal envoyé au vibreur après correction selon l'Eq. (2.7) (rouge), la déformation du fond obtenue (bleu) et celle voulue (noir).

### 2.2.2 Algorithme par affinements successifs

A notre connaissance, il n'existe pas de méthode pour ce type de situation, l'asservissement n'étant pas suffisamment précis. Pour prendre en compte les non-linéarités du système, nous avons eu l'idée de concevoir un algorithme, mis en pratique avec Matlab, fonctionnant par affinements successifs. Il permet de déterminer une fonction de réponse en fréquence effective, spécifique au mouvement du vibreur désiré. Nous décrivons ici son fonctionnement. Pour un déplacement voulu  $\beta_{th}$ , une

impulsion  $u_1$  de même forme est tout d'abord envoyée au vibreur. L'évolution réelle du piston  $\beta_1$  est alors mesurée par le vibromètre laser (Fig. 2.5). Le ratio des FFT de  $\beta_1$  et  $u_1$  fournit une fonction de réponse effective  $H_1$ .

$$H_1(f) = \frac{\mathcal{F}\{\beta_1(t)\}}{\mathcal{F}\{u_1(t)\}} \quad (2.8)$$

Sur le modèle de l'Eq. (2.7), on peut calculer une impulsion corrigée  $u_2$  qui est alors à nouveau envoyée au vibreur :

$$u_2 = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{F}\{\beta_{th}(t)\}}{H_1} \right\} \quad (2.9)$$

Comme le montre la Fig. 2.5, le déplacement obtenu  $\beta_2$  reste différent du déplacement voulu  $\beta_{th}$ . Cependant, le ratio des FFT de  $\beta_2$  et  $u_2$  fournit une fonction de réponse effective  $H_2$  plus spécifique au déplacement voulu que  $H_1$  car elle est calculée avec des signaux proches de ce cas précis. Comme précédemment, on peut alors calculer un nouveau signal corrigé  $u_3$ . Le signal à envoyer au vibreur peut donc être obtenu par affinements successifs :

$$u_{j+1} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{F}\{\beta_{th}(t)\}}{\mathcal{F}\{\beta_j(t)\}} \cdot \mathcal{F}\{u_j(t)\} \right\}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.10)$$

Le ratio  $\mathcal{F}\{\beta_{th}(t)\} / \mathcal{F}\{\beta_j(t)\}$  dans l'Eq. (2.10) joue finalement le rôle de facteur correctif pour chaque composante fréquentielle du signal envoyé au vibreur. Nous observons sur la Fig. 2.5 qu'après une série de cinq corrections, la différence entre l'impulsion voulue l'impulsion mesurée est très faible. En pratique, elle ne dépasse jamais 5 %.

Cette méthode permet d'obtenir des déplacements très rapides grâce au pic de tension envoyé au démarrage. Ainsi pour une impulsion d'amplitude  $\zeta_m = 5$  mm, on peut atteindre un temps de montée inférieur à 10 ms, alors que le temps de réponse du vibreur pour un échelon de tension correspondant est de l'ordre de 100 ms. L'algorithme que nous avons développé dans le cadre de cette thèse permet alors d'atteindre les régimes de déformation rapide du fond nécessaires pour cette expérience. Il pourrait bien sûr être utilisé pour d'autres applications nécessitant la production de mouvements courts et contrôlés par un vibreur ou tout autre appareil présentant un comportement non linéaire.

## Mise en pratique

Il est à noter que l'utilisation de la FFT suppose que le signal traité est périodique, la partie considérée constituant alors une période. Il faut donc veiller à ce que les valeurs au début et à la fin du signal soient identiques pour ne pas introduire de hautes fréquences liées à une discontinuité du signal au bord. Dans notre cas, la fonction de déplacement complète est par conséquent constituée successivement d'une phase de 5 s au repos, une montée de durée caractéristique  $\tau_b$ , une pause de 5 s, une redescente puis une pause d'environ 10 s pour s'assurer que le vibreur est effectivement revenu à son niveau de repos (voir Fig. 2.6).

Par ailleurs, dans le cas de l'impulsion exponentielle  $\beta_{exp}$ , le début de la déformation voulue implique une discontinuité en vitesse en  $t = 0$  qui correspond à une accélération infinie initiale (voir Fig. 2.7). Pour ce démarrage, l'algorithme produit alors un pic de tension à envoyer au vibreur qui tend vers l'infini. Pour ne pas entraver le bon fonctionnement de l'algorithme, nous avons remplacé la partie en question par un polynôme du troisième degré d'une durée de 1 ms (voir Fig. 2.7). Cette durée

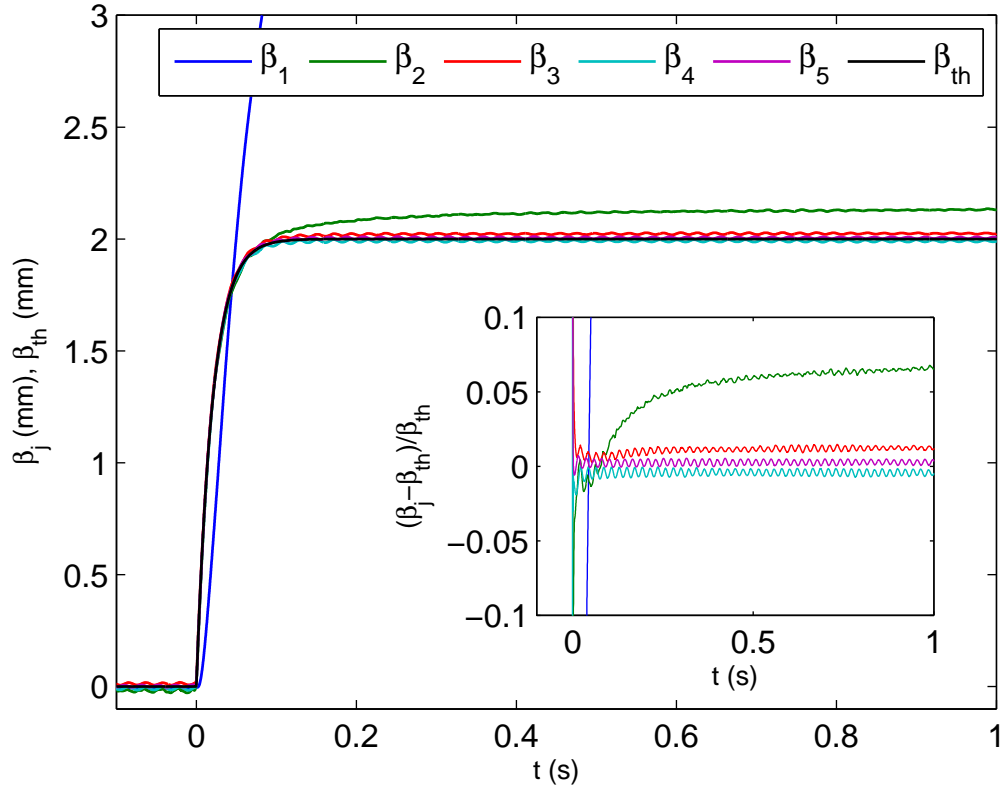


FIGURE 2.5 – Déplacement voulu (noir) et déplacements obtenus après affinements successifs (couleurs) pour une déformation du fond de type exponentiel ( $\tau_b = 20$  ms,  $\zeta_m = 2$  mm). Encart : Erreurs relatives correspondantes entre déplacement voulu et déplacements obtenus

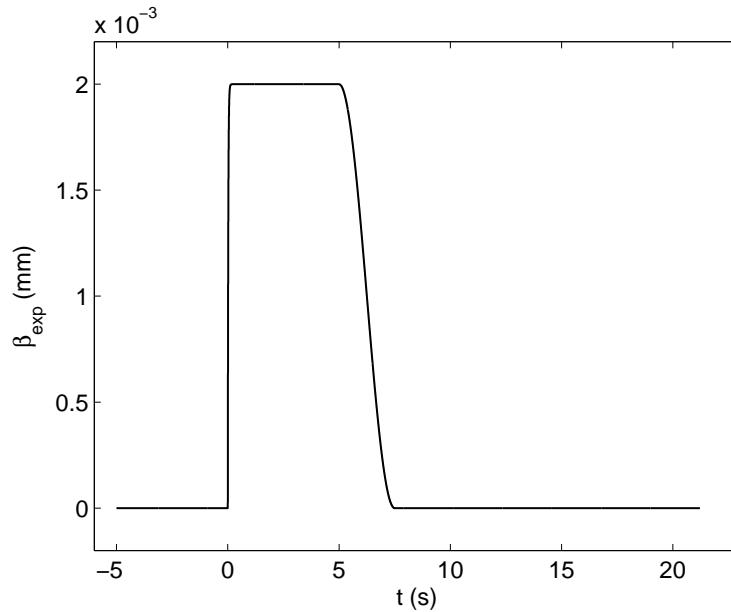


FIGURE 2.6 – Déplacement complet du vibreur lors d'une mesure pour une déformation du fond de type exponentiel ( $\tau_b = 20$  ms,  $\zeta_m = 2$  mm).

est suffisante pour éviter toute saturation en tension dans l'ensemble des mesures effectuées. Le polynôme est déterminé en imposant des conditions aux limites de continuité avec la fonction  $\beta_{\text{exp}}$



ainsi que sa dérivée temporelle.

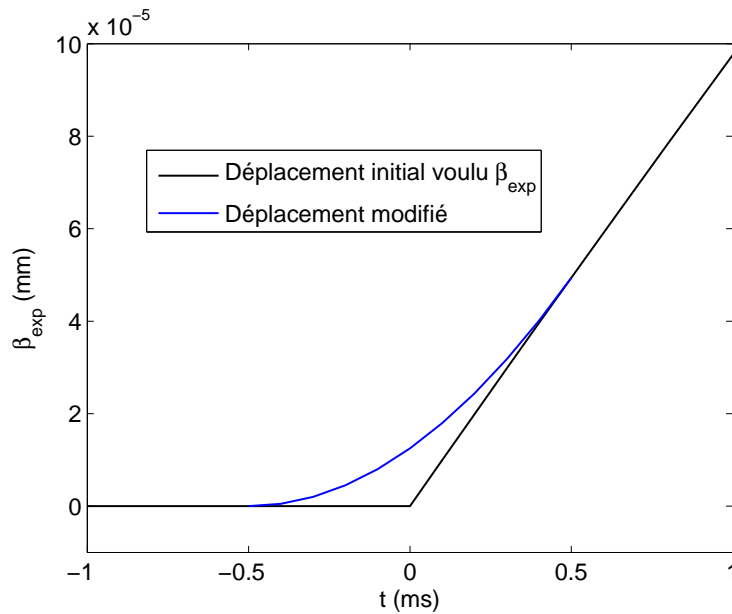


FIGURE 2.7 – Zoom sur le démarrage d’une impulsion de type exponentiel ( $\tau_b = 20$  ms,  $\zeta_m = 2$  mm). Déplacement initial voulu (noir) et déplacement modifié pour éviter la production d’un pic de tension infini (bleu).

## 2.3 Techniques de mesures

Les expériences réalisées permettent la mesure simultanée sur les mêmes images du champ de vitesse sous la surface et des déformations de la surface libre. Pour cela, on analyse le mouvement de particules isodensité dispersées dans l’eau et d’autres piégées à la surface libre.

### 2.3.1 Vélocimétrie par images de particules (PIV)

Le champ de vitesse au sein du liquide a été mesuré par vélocimétrie par images de particules (Particle Image Velocimetry - PIV). Des particules de polyamide (diamètre  $50 \mu\text{m}$ ) diffusant la lumière sont dispersées dans le volume du fluide et une nappe laser éclaire une tranche verticale du fluide passant par le centre du bassin. Une caméra rapide Phantom (V9) est placée perpendiculairement à la nappe laser (voir Fig. 2.1). Le champ de vitesse est déterminé à partir du déplacement local de particules entre deux images successives.

L’algorithme de PIV a été réalisé par Leonardo Gordillo et est détaillé dans sa thèse [21]. Le principe est le suivant : les images enregistrées par la caméra sont découpées en fenêtres d’interrogation carrées (par exemple  $64 \times 64$  pixels) au sein desquels on calcule la fonction de corrélation croisée spatiale 2D entre deux images successives. La position du maximum de la fonction de corrélation correspond alors au déplacement moyen des particules contenues dans la fenêtre d’interrogation considérée. On accède ensuite à des fenêtres d’interrogation de taille plus petite (par exemple 32 puis 16 pixels de côté), et donc à une meilleure résolution, par une méthode itérative avec raffinements successifs [22] : les fenêtres d’interrogation de 32 pixels de la deuxième image sont translatées du déplacement calculé pour la fenêtre d’interrogation de 64 pixels qui la contient (voir Fig. 2.8). Ceci permet d’obtenir un

nombre maximal de particules en commun entre les fenêtres d'interrogation des deux images et ainsi d'améliorer les résultats de la PIV.

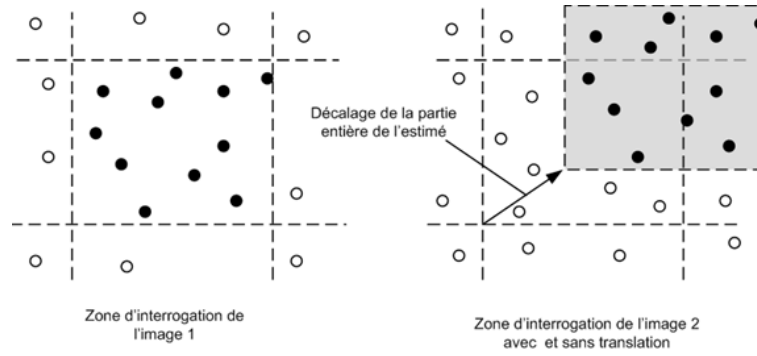


FIGURE 2.8 – La fenêtre d'interrogation de la deuxième image (à droite) subit un décalage prédit par des calculs à plus grande échelle pour que les fenêtres d'interrogation des deux images aient le maximum de particules en commun. Source de l'image : [23]

Le caractère axisymétrique du dispositif et l'absence de vitesse orthoradiale permettent ainsi de connaître le champ de vitesse 3D dans l'ensemble du fluide à partir de ces mesures.

### Mise en pratique

La reproductibilité des expériences permet de réaliser 10 mesures pour chaque jeu de données. La superposition de 10 images à chaque instant permet d'augmenter la densité de particules sur chaque image et d'améliorer les résultats [24] (voir Fig. 2.9).

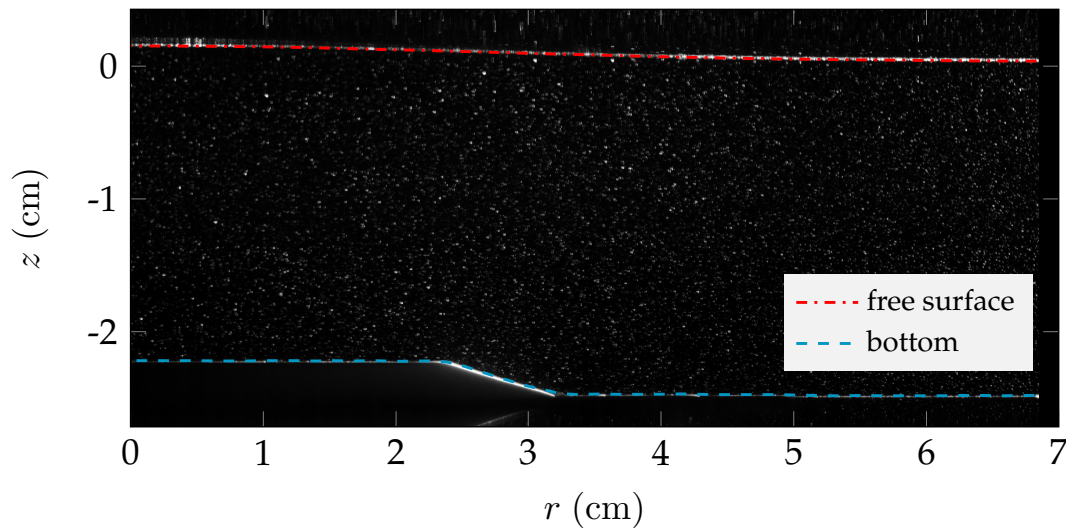


FIGURE 2.9 – Exemple d'image utilisée pour le traitement PIV.  $z$  est la profondeur du fluide et  $r$  le rayon depuis le centre de la cuve.

Pour éviter la sédimentation des particules de polyamide, du sel est dissout dans l'eau avec une concentration massique de 2.7% pour obtenir la même densité que celle des particules ( $d = 1.03$ ).

### 2.3.2 Détection de la surface libre par transformée de Radon

Dans le cas linéaire, la mesure de la déformation de la surface libre est réalisée sur les mêmes images que les mesures de PIV. Au-delà de l'intérêt de mesurer simultanément la surface libre et le champ de vitesse, ceci permet d'améliorer l'algorithme de PIV. En effet, sur les images de la caméra, la surface libre joue le rôle d'un miroir pour les particules de PIV car l'angle d'incidence des rayons lumineux est important. Des particules fantômes apparaissent alors au-dessus de la surface libre sur les images analysées (voir Fig. 2.9). Si ces particules sont contenues dans les fenêtres d'interrogation de PIV, elles faussent les mesures du champ de vitesse. La détection de la surface libre rend possible la création de masques dynamiques afin de supprimer, sur les images, les particules situées au-dessus de l'interface.

Pour cela, la surface est recouverte de particules de polyamide de  $50\text{ }\mu\text{m}$ . Ces dernières flottent par effet de tension de surface et forment une ligne identifiable mais discontinue (voir Fig. 2.9). La détection par transformée de Radon est alors adaptée à ce type de situation. Le principe, décrit par Sanchis et Jensen [25], est de découper l'image en une succession de fenêtres autour de la surface. On cherche dans chaque fenêtre la plus lumineuse des lignes définies par :

$$\rho - x \cos \theta - y \sin \theta = 0 \quad (2.11)$$

avec  $\rho$  la distance au centre de l'image et  $\theta$  l'angle avec la verticale (voir Fig. 2.10).

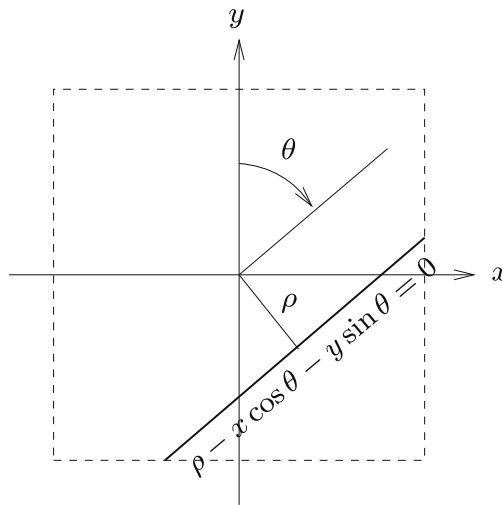


FIGURE 2.10 – Schéma du principe de la transformée de Radon. Source de l'image : [25]

La transformée de Radon intègre l'intensité lumineuse  $I(x, y)$  le long de ces lignes :

$$\mathcal{R}(\rho, \theta) = \iint I(x, y) \delta(\rho - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy \quad (2.12)$$

avec  $\delta$  la fonction de Dirac. En faisant parcourir à  $\rho$  et  $\theta$  un espace limité aux valeurs plausibles, on calcule les valeurs pour lesquelles  $\mathcal{R}$  est maximal. La transformée de Radon détecte ainsi la ligne la plus lumineuse de chaque fenêtre. Une ligne continue est alors obtenue en interpolant les segments calculés sur l'ensemble des fenêtres le long de la surface libre. Pour chaque série de mesures, les résultats sont moyennés sur 10 mesures identiques. Un exemple de surface détectée est tracé sur la Fig. 2.9.



# Chapitre 3

## Outils théoriques

### 3.1 Théorie linéaire

Nous présentons ici la théorie linéaire des ondes de surface générées par un fond mobile proposée par Hammack [5]. Nous considérons le cas axisymétrique<sup>1</sup> développé en partie dans sa thèse [4] et que nous complétons, notamment par le calcul des champs de vitesse.

Nous nous plaçons dans un domaine de fluide  $D$ , muni d'un repère en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , situé entre le fond du bassin et la surface libre, et supposé infini horizontalement. La coordonnée  $z = 0$  est définie par la surface libre au repos. En notant  $h$  la hauteur d'eau, le fond non déformé est alors défini par  $z = -h$ . Les variables sont supposées indépendantes de  $\theta$  en raison de la symétrie axiale du problème. Pour  $t > 0$ , la surface libre est décrite par  $z(r, t) = \eta(r, t)$  et le fond est décrit par  $z(r, t) = -h + \zeta(r, t)$ , où  $\zeta(r, t) = \zeta_m \alpha(r) \beta(t)$  est le produit de l'amplitude de la déformation  $\zeta_m$ , du profil spatial  $\alpha(r)$  et de la fonction temporelle de déplacement  $\beta(t)$  (voir section 2.1). On suppose par ailleurs  $\lim_{r \rightarrow \infty} \zeta(r, t) = 0$ .

Nous écrivons maintenant les équations de la mécanique des fluides dans l'hypothèse d'un écoulement irrotationnel. Il existe donc un potentiel de vitesse  $\phi(r, z, t)$ , tel que  $\mathbf{v} = \nabla \phi$ , où  $\mathbf{v}$  est le vecteur vitesse. Comme le fluide est incompressible,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  et  $\phi$  satisfait l'équation de Laplace dans le domaine  $D$  :

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1)$$

Les conditions aux limites à la surface libre et au fond peuvent respectivement s'écrire :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial r} \quad \text{en } z = \eta(r, t) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \quad \text{en } z = -h + \zeta(r, t) \quad (3.3)$$

On considère par ailleurs que l'écoulement est non visqueux et que les effets capillaires sont négligeables<sup>2</sup>. La condition dynamique à la surface libre peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\eta = 0 \quad \text{en } z = \eta(r, t) \quad (3.4)$$

---

1. Le caractère axisymétrique de la déformation de la surface libre a été vérifié *a posteriori* dans les expériences.

2. Ces hypothèses sont justifiées dans la partie 3.c de l'article reproduit en section 4.2.

Hammack [5] a montré que trois régimes de déformation du fond peuvent être considérés : le cas rapide ou impulsif lorsque le temps caractéristique de déformation  $\tau_b$  est petit devant la demi-période de la vague  $\tau_w$  ( $\tau_b \ll \tau_w$ ) ; le régime lent ou rampant, pour lequel  $\tau_b \gg \tau_w$  ; et le régime intermédiaire pour lequel  $\tau_b \sim \tau_w$ . Pour le cas rapide, Hammack a montré qu'il était possible de linéariser le système d'équations (3.1)-(3.4) pour l'aspect génération si l'amplitude de la déformation du fond est négligeable devant la hauteur d'eau :  $\zeta_m/h \ll 1$ . Dans le cas lent, aucune condition de linéarité n'est requise lors de la génération.

Dans le cadre de notre étude expérimentale,  $\zeta_m/h = 0.06$  pour le cas rapide et évolue progressivement jusqu'à  $\zeta_m/h = 0.2$  pour le cas lent. Nous linéarisons le système d'équations (3.1)-(3.4) en négligeant les termes non linéaires et les nouvelles équations sont appliquées au fond et à la surface libre au repos (non déformées). Le système d'équations devient :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (3.8)$$

Les Eqs (3.6) et (3.8) peuvent être combinées pour donner la condition à la surface libre suivante :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (3.9)$$

Nous pouvons désormais utiliser des transformées intégrales pour résoudre ce système d'équations linéaires. Elles vont permettre de remplacer les dérivées radiales et temporelles par des produits. Comme les variables du problème sont définies uniquement pour  $t \geq 0$ , nous appliquons la transformée de Laplace dans le domaine temporel :

$$\tilde{f}(s) \equiv \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \equiv \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (3.10)$$

Dans le domaine spatial, nous utilisons la transformée de Hankel d'ordre zéro, qui est équivalente à la transformée de Fourier 2D pour une géométrie cylindrique :

$$\hat{f}(k) \equiv \mathcal{H}_0\{f(r)\}(k) \equiv \int_0^{+\infty} r J_0(kr) f(r) dr \quad (3.11)$$

où  $J_0$  est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre zéro. En appliquant ces deux transformées aux Eqs (3.5), (3.9), (3.7) et (3.6), et en notant que  $\mathcal{H}_0\left\{\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr}\right\}(k) = -k^2 \hat{f}(k)$ , on obtient :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}(k, z, s)}{\partial z^2} - k^2 \tilde{\phi}(k, z, s) = 0 \quad (3.12)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\phi}(k, z, s)}{\partial z} \right|_{z=0} + \frac{s^2}{g} \tilde{\phi}(k, 0, s) = 0 \quad (3.13)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\phi}(k, z, s)}{\partial z} \right|_{z=-h} - s \tilde{\zeta}(k, s) = 0 \quad (3.14)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\phi}(k, z, s)}{\partial z} \right|_{z=0} - s \tilde{\eta}(k, s) = 0 \quad (3.15)$$

L'Eq. (3.12) est une équation différentielle dont les solutions sont de la forme :

$$\tilde{\phi}(k, z, s) = A(k, s) \cosh kz + B(k, s) \sinh kz \quad (3.16)$$

L'utilisation des conditions aux limites décrites par les Eqs (3.13) et (3.14) mènent à :

$$\tilde{\phi}(k, z, s) = \frac{gs \tilde{\zeta}(k, s)}{(s^2 + \omega(k)^2) \cosh kh} \left( \frac{s^2}{gk} \sinh kz - \cosh kz \right) \quad (3.17)$$

où  $\omega(k) = \sqrt{gk \tanh kh}$  est la relation de dispersion des ondes de gravité.

La déformation du fond étant séparable en temps et en espace, c'est également le cas de sa transformée :  $\tilde{\zeta}(k, s) = \zeta_m \hat{\alpha}(k) \tilde{\beta}(s)$ . Il vient donc :

$$\phi(r, z, t) = \mathcal{H}_0^{-1} \left\{ \frac{\zeta_m \hat{\alpha}(k)}{\cosh kh} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{gs \tilde{\beta}(s)}{s^2 + \omega(k)^2} \left( \frac{s^2}{gk} \sinh kz - \cosh kz \right) \right\} (k, z, t) \right\} \quad (3.18)$$

L'Eq. (3.6) permet alors d'obtenir la déformation de la surface libre :

$$\eta(r, t) = \mathcal{H}_0^{-1} \left\{ \frac{\zeta_m \hat{\alpha}(k)}{\cosh kh} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2 \tilde{\beta}(s)}{s^2 + \omega(k)^2} \right\} (k, t) \right\} \quad (3.19)$$

Hammack ne s'est pas intéressé au champ de vitesse dans le cadre de son étude. Toutefois, l'Eq. (3.18) donne accès à la vitesse puisque  $\mathbf{v} = \nabla \phi$ . En remarquant que  $\mathcal{H}_1 \left\{ \frac{df}{dr} \right\} (k) = k \mathcal{H}_0 \{f\} (k)$  avec  $\mathcal{H}_1$  la transformée de Hankel d'ordre un<sup>3</sup>, on a :

$$v_r(r, z, t) = \mathcal{H}_1^{-1} \{k \hat{\phi}(k, z, t)\} = \mathcal{H}_1^{-1} \left\{ \frac{k \zeta_m \hat{\alpha}(k)}{\cosh kh} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{gs \tilde{\beta}(s)}{s^2 + \omega(k)^2} \left( \frac{s^2}{gk} \sinh kz - \cosh kz \right) \right\} (k, z, t) \right\} \quad (3.20)$$

---

3. La transformée de Hankel d'ordre un est définie de la même manière que la transformée de Hankel d'ordre zéro (voir Eq. (3.11)) en remplaçant la fonction de Bessel d'ordre zéro,  $J_0$ , par une fonction de Bessel d'ordre un,  $J_1$ .

$$v_z(r, z, t) = \mathcal{H}_0^{-1} \left\{ \frac{\partial \hat{\phi}(k, z, t)}{\partial z} \right\} = \mathcal{H}_0^{-1} \left\{ \frac{\zeta_m \hat{\alpha}(k)}{\cosh kh} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{gs\tilde{\beta}(s)}{s^2 + \omega(k)^2} \left( \frac{s^2}{g} \cosh kz - k \sinh kz \right) \right\} (k, z, t) \right\} \quad (3.21)$$

Les Eqs (3.18)-(3.21) vont permettre de comparer les résultats expérimentaux du chapitre 4 aux prédictions de la théorie linéaire. Pour cela, il est nécessaire de calculer les transformées de Laplace et de Hankel ainsi que leurs inverses qui interviennent dans ces équations. Nous détaillons dans la section suivante comment ces transformées intégrales sont estimées en pratique.

## 3.2 Implémentation numérique

### 3.2.1 Transformée de Laplace

Les transformées de Laplace, intervenant dans les Eqs (3.18)-(3.21), peuvent être calculées de façon analytique pour les fonctions temporelles utilisées dans l'expérience,  $\beta_{\text{exp}}$  et  $\beta_{\text{sin}}$  (Eq. (2.2)-(2.3)) [5] :

$$\tilde{\beta}_{\text{exp}}(s) = \frac{1}{s(\tau_b s + 1)} \quad (3.22)$$

$$\tilde{\beta}_{\text{sin}}(s) = \frac{\pi^2(1 + e^{-s\tau_b})}{2s(\tau_b^2 s^2 + \pi^2)} \quad (3.23)$$

Ces expressions peuvent alors être injectées dans les Eqs (3.18)-(3.21). Les transformées de Laplace inverses peuvent également être calculées de façon analytique, en utilisant notamment le théorème des résidus et le fait que pour une fonction  $f$ ,  $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}\tilde{f}(s)\} = H(t-c)f(t-c)$ , avec  $H$  la fonction de Heaviside. A titre d'exemple, les déformations de la surface libre peuvent respectivement s'écrire :

$$\eta_{\text{exp}}(r, t) = \mathcal{H}_0^{-1} \left\{ \frac{\zeta_m \hat{\alpha}(k)}{\cosh kh} \frac{1}{1 + \tau_b^2 \omega(k)^2} [\cos \omega t + \tau_b \omega \sin \omega t - e^{-\alpha t}] \right\} \quad (3.24)$$

$$\eta_{\text{sin}}(r, t) = \mathcal{H}_0^{-1} \left\{ \frac{\zeta_m \hat{\alpha}(k)}{2 \cosh kh} \frac{\pi^2}{\pi^2 - \tau_b^2 \omega^2} [\cos \omega t - \cos \pi t / \tau_b + H(t - \tau_b)(\cos \omega(t - \tau_b) + \cos \pi t / \tau_b)] \right\} \quad (3.25)$$

Il est à noter qu'il n'existe pas à notre connaissance de transformée de Laplace discrète pour laquelle le couple transformée/transformation inverse peut être aisément calculé à partir d'un signal discret arbitraire. Pour décrire la déformation du fond, il est donc nécessaire d'utiliser des fonctions temporelles analytiques pour lesquelles les transformées de Laplace peuvent être calculées.

Après que les transformées de Laplace des Eqs (3.18)-(3.21) et leurs inverses ont été calculées, il reste donc à évaluer les transformées de Hankel et leurs inverses comme celles présentes dans les Eqs (3.24) et (3.25).

### 3.2.2 Transformée de Hankel

La transformée de Hankel  $\mathcal{H}_0$  du profil spatial de la déformation du fond peut être calculée analytiquement. En revanche, les transformées de Hankel inverses  $\mathcal{H}_0^{-1}$  et  $\mathcal{H}_1^{-1}$  dans les Eqs (3.18)-(3.21) sont



compliquées et il ne nous est pas possible d'en donner une expression analytique. Nous avons donc écrit un algorithme pour les calculer numériquement à l'aide de transformées de Hankel discrètes. Pour cela, nous nous inspirons des travaux de Yu *et al.* [26], qui utilisent les séries de Fourier-Bessel pour évaluer les transformées de Hankel d'ordre zéro. Cette méthode a par ailleurs été étendue aux transformées de Hankel d'ordres supérieurs [27]. Les séries de Fourier-Bessel pour la transformée de Hankel sont équivalentes aux séries de Fourier pour la transformée de Fourier.

Une fonction réelle  $f$  définie sur un intervalle  $[0, a]$  ( $a > 0$ ) peut être décomposée en une série de Fourier-Bessel sous la forme :

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{pm} J_p \left( \alpha_{pm} \frac{r}{a} \right), \quad 0 \leq r \leq a \quad (3.26)$$

avec  $\alpha_{pm}$  la  $m^{\text{ème}}$  racine de la fonction de Bessel  $J_p$  de première espèce et d'ordre  $p$  et :

$$c_{pm} = \frac{2}{a^2 J_{p+1}^2(\alpha_{pm})} \int_0^a f(r) J_p \left( \alpha_{pm} \frac{r}{a} \right) r dr \quad (3.27)$$

On suppose qu'on peut choisir  $a$  tel que  $f(r > a) = 0$ . Alors :

$$\int_0^a f(r) J_p \left( \alpha_{pm} \frac{r}{a} \right) r dr = \int_0^{\infty} f(r) J_p \left( \alpha_{pm} \frac{r}{a} \right) r dr = \hat{f}_p \left( \frac{\alpha_{pm}}{a} \right) \quad (3.28)$$

avec  $\hat{f}_p = \mathcal{H}_p\{f\}$  la transformée de Hankel d'ordre  $p$  de la fonction  $f$ . La fonction  $f$  peut alors s'écrire :

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2J_p \left( \alpha_{pm} \frac{r}{a} \right)}{a^2 J_{p+1}^2(\alpha_{pm})} \hat{f}_p \left( \frac{\alpha_{pm}}{a} \right), \quad 0 \leq r \leq a \quad (3.29)$$

L'Eq. (3.29) permet ainsi de calculer les transformées inverses des Eqs (3.18)-(3.21) et donc d'accéder aux vitesses et aux déformations de toute la surface libre sur le domaine de rayon inférieur à  $a$ .

### Mise en pratique

La valeur  $a$  intervenant dans l'Eq. (3.29) doit être choisie de telle sorte que les grandeurs calculées soient nulles pour  $r > a$ . Nous choisissons donc toujours  $a$  plus grand que la distance maximale parcourue par les ondes sur la durée considérée. Dans le cadre de ce travail, les mesures durent 1 s et les vitesses de propagation sont de l'ordre de  $0.5 \text{ m.s}^{-1}$ . La valeur  $a = 0.7 \text{ m}$  est donc choisie.

Par ailleurs, le nombre de racines connues pour les fonctions de Bessel étant fini, on remplace la borne  $\infty$  de la somme dans l'Eq. (3.29) par la borne  $N$  lors des calculs. C'est la convergence de la somme qui détermine cette borne. On remarque que cette convergence a lieu lorsque les fréquences spatiales atteintes correspondent à une résolution spatiale adéquate, de l'ordre du centimètre pour notre problème. Pour les calculs de cette partie, nous avons choisi  $N = 3000$ , soit une résolution spatiale de  $0.2 \text{ mm}$ .

### 3.3 Conclusion

Nous avons donc décrit ici la théorie linéaire de Hammack qui s'applique aux ondes générées par une déformation du fond axisymétrique. Le calcul aboutit aux Eqs (3.18)-(3.21) exprimant analytiquement les déformations de la surface libre et les vitesses dans le fluide lors d'une telle déformation. L'accès à ces grandeurs se fait par le calcul des transformées de Laplace et de Hankel et de leurs inverses, qui interviennent dans les Eqs (3.18)-(3.21). Nous avons alors présenté la façon dont elles sont calculées afin d'accéder aux déformations de la surface libre et aux vitesses dans l'ensemble du domaine de fluide affecté par les déformations du fond et les ondes de surface générées.

# Chapitre 4

## Résultats

### 4.1 Résumé

Les résultats obtenus dans le cadre de cette étude ont fait l'objet d'un article publié dans *Proceedings of the Royal Society A* [19], reproduit dans la section suivante. Avec le dispositif expérimental décrit dans le chapitre 2, nous étudions le rôle des caractéristiques spatiotemporelles de la déformation du fond sur la génération des ondes de surface dans le régime linéaire. La cuve carrée de 1 m de côté est remplie d'une hauteur d'eau  $h = 2.5$  cm. Le piston circulaire situé au fond de la cuve, de rayon  $r_1 = 2.5$  cm, subit alors une impulsion verticale de forme temporelle exponentielle ou sinusoïdale, de durée caractéristiques  $\tau_b \in [10; 500]$  ms et d'amplitude  $\zeta_m \in [1.5; 5.0]$  mm. Comme dans le cas 1D de Hammack [5], trois régimes peuvent être distingués à partir du rapport,  $\bar{\tau} \equiv \tau_b/\tau_w$ , entre le temps caractéristique de déformation du fond  $\tau_b$  et la demi-période de l'onde générée  $\tau_w \approx 130$  ms : le cas rapide ( $\bar{\tau} \ll 1$ ), le cas lent ( $\bar{\tau} \gg 1$ ) et le cas intermédiaire ( $\bar{\tau} \sim 1$ ).

Nous montrons que les champs de vitesse sous la surface illustrent bien la transition entre ces trois régimes. Dans le cas rapide, pendant la déformation du fond, on observe un mouvement d'ensemble vertical du liquide situé au-dessus de la zone déformée (voir Fig. 3.a de l'article). Le champ de vitesse à la surface est alors vertical. A la fin de la déformation, le fluide est immobile. Nous montrons ainsi qu'il n'y a pas d'inertie avant que l'onde commence à se propager. Dans le cas intermédiaire, la propagation de l'onde débute avant la fin de la déformation du fond, ce qui entraîne la coexistence d'un champ de vitesse initié par cette déformation et un autre lié à la propagation de l'onde (voir Fig. 3.b de l'article). Enfin, dans le cas lent, la surface libre est presque immobile et la composante verticale de la vitesse devient nulle à la surface (voir Fig. 3.c de l'article). Le champ de vitesse est alors orienté vers l'extérieur de la zone déformée et ressemble à l'écoulement non visqueux d'un jet face à une paroi.

Les déformations de la surface libre ont également été analysées. Dans le cas rapide ( $\bar{\tau} \ll 1$ ), on observe, comme dans le cas 1D [5], que l'amplitude et la forme spatiale de la surface libre à la fin de la déformation du fond ( $t = \tau_b$ ) sont indépendantes de  $\tau_b$  et du type d'impulsion (voir Fig. 5 de l'article). Le profil spatial de la surface libre est égal à celui de la déformation finale du fond filtré par un filtre passe-bas (voir Fig. 6.a de l'article). A la fin d'une déformation rapide du fond, le liquide est donc immobile et la structure spatiale de la surface libre est indépendante de la forme temporelle de l'impulsion. L'onde générée et son évolution temporelle lors de la propagation sont alors également indépendantes des paramètres temporels de la déformation du fond. Nous retrouvons là le cas instantané souvent considéré dans les simulations numériques de tsunamis des systèmes d'alerte en temps réel. Nous avons vu dans le chapitre 1 d'introduction que ces codes numériques utilisent souvent une condition initiale immobile pour la propagation des tsunamis qui

est la translation directe de la déformation finale du fond à la surface libre. Cette approche est donc en partie validée pour les déformations du fond rapides, sauf que ces simulations ne prennent pas en compte l'effet du filtre passe-bas spatial, qui joue un rôle lorsque la hauteur d'eau n'est pas petite devant l'étendue de la zone déformée.

Lorsque  $\bar{\tau} \gtrsim 1$ , l'onde de surface générée n'est plus indépendante des paramètres temporels de la déformation du fond et l'amplitude de l'onde générée diminue avec  $\bar{\tau}$  (voir Fig. 5 de l'article) puisque la propagation a lieu avant la fin du mouvement du fond. Pour  $\bar{\tau} \gg 1$ , l'amplitude maximale de l'onde évolue alors comme  $\bar{\tau}^{-1}$  si l'impulsion est de type exponentiel et comme  $\bar{\tau}^{-7/4}$  si elle est de type sinusoïdal. Ce dernier résultat est différent du cas 1D [5] pour lequel une évolution en  $\bar{\tau}^{-1}$  était observée pour les deux types d'impulsion. Par ailleurs, l'ensemble des résultats expérimentaux sont trouvés en bon accord avec la théorie linéaire de Hammack présentée dans la section 3.1. Ils mettent en évidence que la colonne d'eau située au-dessus de la zone déformée joue le rôle d'un filtre passe-bas spatial couplé avec un filtre passe-haut temporel.

Enfin, nous avons montré dans cet article que dans le système d'équations, pendant l'étape de déformation du fond, le cas rapide ( $\bar{\tau} \ll 1$ ) correspond à une gravité nulle et le cas lent ( $\bar{\tau} \gg 1$ ) à une gravité infinie. Le caractère ondulatoire des déformations de la surface libre n'intervient donc pas. Ces deux cas asymptotiques peuvent alors être décrit par des systèmes d'équations simplifiés, où la déformation de la surface libre est découplée du champ de vitesse. Le potentiel vitesse est alors décrit par l'équation de Laplace associée à des conditions aux limites bien définies en  $z = 0$  et  $z = -h$ . Dans le cadre de ces approximations, la structure spatiale du champ de vitesse est conservée tout au long du mouvement du fond (voir notamment les lignes de courant en gris sur les Figs 3.a et c) et l'amplitude des vecteurs vitesses est simplement proportionnelle à la vitesse de déformation du fond. Dans le cas rapide, la forme spatiale de la surface libre est également conservée tout au long du mouvement du fond et l'amplitude de déformation est proportionnelle à l'amplitude de déformation du fond. Dans le cas lent, la surface libre est immobile.

Dans les cas lent et rapide, il est alors possible d'obtenir l'ensemble des caractéristiques spatiotemporelles du système à partir d'un calcul unique. La simplification des systèmes d'équation permet de plus de les résoudre dans des cas où la profondeur d'eau n'est pas uniforme, ce qui n'est pas le cas de la théorie linéaire de Hammack [5]. Nous avons ainsi réalisé une expérience de déformation rapide du fond dans le cas où le piston était surélevé avant le début de la déformation d'une hauteur  $\zeta_0 = 9$  mm dans une eau de profondeur  $h_\infty = 30$  mm. Nous montrons que la forme de la surface libre obtenue à la fin de la déformation du fond est bien prédite par le nouveau système d'équations. Cette approche a l'avantage d'avoir un coût de calcul faible et de s'adapter aux profondeurs d'eau non uniforme, une situation fréquemment rencontrée près des zones de subduction qui donnent naissance aux tsunamis. À terme, elle pourrait être utilisée dans les simulations numériques en temps réel pour déterminer la structure spatiale de la surface libre à la fin d'une déformation rapide du fond.

## 4.2 Article publié dans *Proceedings of the Royal Society* [19]

## Research



**Cite this article:** Jamin T, Gordillo L, Ruiz-Chavarría G, Berhanu M, Falcon E. 2015 Experiments on generation of surface waves by an underwater moving bottom. *Proc. R. Soc. A* **471**: 20150069. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2015.0069>

Received: 2 February 2015

Accepted: 30 April 2015

**Subject Areas:**

fluid mechanics, wave motion, geophysics

**Keywords:**

tsunami generation, gravity surface waves, linearized water wave problem

**Author for correspondence:**

Leonardo Gordillo  
e-mail: [lgordill@ing.uchile.cl](mailto:lgordill@ing.uchile.cl)

Electronic supplementary material is available at <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2015.0069> or via <http://rspa.royalsocietypublishing.org>.

# Experiments on generation of surface waves by an underwater moving bottom

Timothée Jamin<sup>1</sup>, Leonardo Gordillo<sup>1,3</sup>, Gerardo Ruiz-Chavarría<sup>2</sup>, Michael Berhanu<sup>1</sup> and Eric Falcon<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, MSC, UMR 7057 CNRS, 75013 Paris, France

<sup>2</sup>Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 México DF, Mexico

<sup>3</sup>Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Casilla 487-3, Santiago, Chile

 LG, 0000-0002-9516-1346

We report laboratory experiments on surface waves generated in a uniform fluid layer whose bottom undergoes an upward motion. Simultaneous measurements of the free-surface deformation and the fluid velocity field are focused on the role of the bottom kinematics (i.e. its spatio-temporal features) in wave generation. We observe that the fluid layer transfers bottom motion to the free surface as a temporal high-pass filter coupled with a spatial low-pass filter. Both filter effects are often neglected in tsunami warning systems, particularly in real-time forecast. Our results display good agreement with a prevailing linear theory without any parameter fitting. Based on our experimental findings, we provide a simple theoretical approach for modelling the rapid kinematics limit that is applicable even for initially non-flat bottoms: this may be a key step for more realistic varying bathymetry in tsunami scenarios.

## 1. Introduction

Most tsunamis are triggered by sudden displacements of the seabed during earthquakes. To predict tsunami hazards in real time, actual warning models require, first and foremost, data of the free-surface initial waveform in the open seas. Buoy networks dedicated to detect tsunamis may provide direct measurements of wave heights at fixed positions across the oceans [1], which can be used to reconstruct the initial tsunami waveform

through inversion. However, these data only become available after the tsunami waves have reached the buoy locations. As reconstruction comes from inversion, data are not only required in a single buoy but in a set of them, which means that waveform estimations become reliable only after tsunamis have travelled an important distance across the sea. Far-field locations can thus rely on buoy network data, but not near-field locations, which are usually struck by the tsunami waves before the initial waveform can be reconstructed.

Tsunami warning systems thus require an alternative way to estimate the tsunami initial waveform while buoy records are unavailable. The standard is to use a faster indirect method based on the fault source and the seismic data from nearby stations. The seabed displacement is computed numerically from the fault slip parameters using Okada's model [2], and then translated to the ocean free surface. The technique provides a fast estimation of the initial waveform that can be used as an input for tsunami-propagation codes. Tsunami risks at different locations can then be forecasted using a discretized version of the estimated waveform via ready-to-use *offline* calculations (Green's functions) [3]. However, this procedure often underestimates the surface wave amplitude (e.g. for the 2004 Indian Ocean tsunami [4]).

Several reasons have been proposed to explain this bias [5–12], including the seabed-kinematics role during an earthquake (i.e. its spatio-temporal features) [12–15]. Bottom displacement is considered to be instantaneous if its typical rise time is small compared with the time scale of the generated waves at the free surface [14]. Most earthquakes meet this condition, although other remarkable tsunamigenic events barely satisfy it: for instance, in two of the largest tsunamis ever registered, the bottom displacements may have been notably slow [16]. Numerical codes used in warning systems, however, are more focused on analysing wave propagation on the varying bathymetry of oceanic basins, which is achieved via numerical integration of nonlinear shallow water equations (e.g. the MOST [17] and the TUNAMI [18]). Warning codes are prone to neglect seabed kinematics and consider that bottom displacements are instantaneous. Thus, they use as initial condition a simple translation of the final deformation of the source bottom to the ocean surface. On the other hand, numerical simulations that do suitably consider bed-sea kinematic coupling during displacements are at hand and in a broad range of approaches: linear three-dimensional (3D) potential flow [19], higher order nonlinear shallow-water theory [20], fully nonlinear potential flow [21,22] and full Navier–Stokes equations [23,24] (for a comparison between several approaches, see [25]). Computational costs however remain high in most cases, which makes their application for real-time forecasting hard. Furthermore, numerical simulations also require bottom kinematics *a priori*, an input that is hard to determine during events. During the last few years, a powerful non-hydrostatic numerical model, NHWAVE have come into scene [26]. The model is able to predict 3D effects for a given initial condition (i.e. initially non-flat bottom) with an outstanding accuracy and lower computational cost by splitting the ocean in very few vertical layers. Results are very promising [27].

Numerical simulations, theory and experiments show that bottom dynamics play a role. Even if the deformation happens at the instantaneous limit, the free-surface displacement is not equal to the bottom one as considered by translational models [28–30]. In realistic scenarios, hindcast simulations have also shown that bed dynamics do have an effect. For the 2011 Tohoku tsunami, Grilli *et al.* [27] showed using both NHWAVE and high-order Boussinesq simulations that dynamic-source models yield tsunami waveforms remarkably different than instantaneous source models. Indeed, dynamic models show an excellent agreement with field measurements.

On the other hand, laboratory experiments dealing with the influence of bed-uplift kinematics in tsunami generation are rare and have been based on measurements of the free-surface deformation [29,31–33], providing limited information about the fluid dynamics. Velocity measurements in the bulk are even rarer and only concern landslide-triggered tsunamis [34,35]. Furthermore, most of these laboratory experiments have been performed in channels overlooking the 3D geometry of real scenarios [29,32,34–36]. The lack of tsunami-oriented experiments contrasts with their unquestionable importance. Controlled laboratory experiments not only supply a way to validate numerical simulations under well-known inputs (cf. [37]), but also may elucidate which physical mechanisms dominate a given regime.

In this article, we analyse experimentally and theoretically the hydrodynamic coupling between the bottom and the free-surface motion in a 3D fluid layer, focusing on the role that the bottom kinematics play in wave generation. We aim to better understand how spatio-temporal features of the bottom deformation affect the shape and the amplitude of the generated waves. For this purpose, we designed an idealized scenario where waves are generated by an axisymmetric deformation in the centre of a flat-bottom laboratory tank. We performed combined measurements of the free-surface deformation and the fluid velocity field. Our results are then compared with a linear theory for underwater moving bottoms [38]. Although some of our experimental parameters are by orders of magnitude far from real tsunami-generation conditions, essential features are still well reproduced. Based on our experimental findings, we also provide a theoretical framework that gives a simple and different insight on the generation of waves by impulsive bottom motions. The results could be applied to determine initial waveforms in uneven bottom configurations.

## 2. Experimental set-up

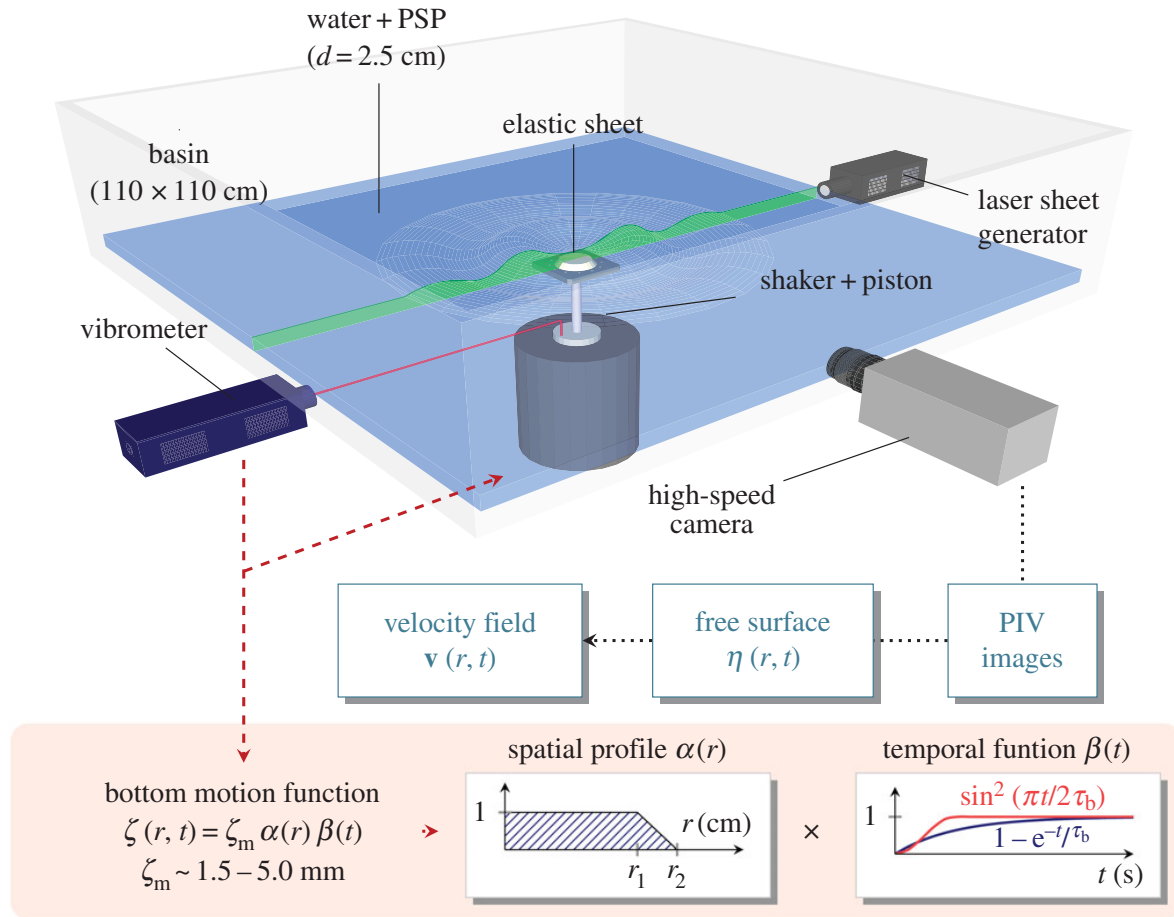
We performed our experiments in a  $110 \times 110 \times 30 \text{ cm}^3$  Plexiglas basin filled with water to a depth of  $h = 2.5 \text{ cm}$ . A circular region (radius  $r_2 = 3.25 \text{ cm}$ ) was carved in the bottom centre and covered with a stretched elastic sheet. The sheet is deformed by means of a solid flat circular piston ( $r_1 = 2.5 \text{ cm}$ ) placed beneath the membrane and attached to an electromechanical shaker (figure 1). As a result of the set-up geometry, the bottom vertical motion can be described as a separable spatio-temporal function with circular symmetry,  $\zeta(r, t) = \zeta_m \alpha(r) \beta(t)$ , where  $\zeta_m$  is the maximal bottom deformation;  $\alpha(r)$  is the spatial profile along the radial horizontal coordinate  $r$  (figure 1 (inset)); and  $\beta(t)$  is the displacement time function. The last one was arbitrarily chosen to be an exponential rise,  $\beta_{\text{exp}}(t) = 1 - e^{-t/\tau_b}$ , or a half-sine one,  $\beta_{\text{sin}}(t) = \sin^2[\pi t/(2\tau_b)]$  if  $t \leq \tau_b$  or 1 if  $t > \tau_b$ ; where  $\tau_b$  is defined as the rise time. To achieve this, the shaker input signal was determined by exploiting the bottom velocity records from a laser Doppler vibrometer. Our system can be used to study several rise times, and upward bottom amplitudes. Value ranges are displayed in the following table:

bed displacement function	$\tau_b$	$\zeta_m$
exponential $\beta_{\text{exp}}(t)$	10 – 500 ms	1.5 – 5.0 mm
half-sinus $\beta_{\text{sin}}(t)$	10 – 500 ms	1.5 – 5.0 mm

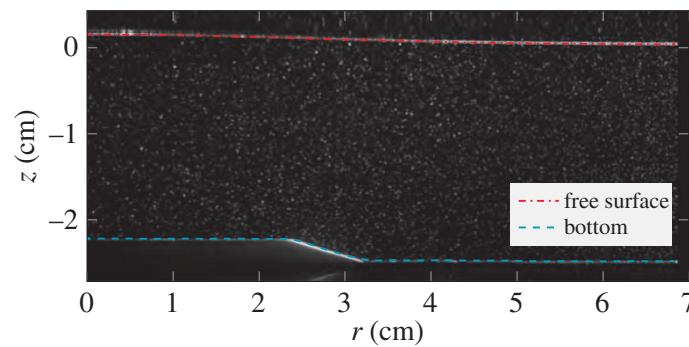
Thus, typical bottom velocities vary from 1 to  $30 \text{ cm s}^{-1}$ . A total number of 22 different scenarios (different bed displacement function,  $\tau_b$  and  $\zeta_m$ ), each consisting of 10 runs, were analysed. The basin extent was chosen to avoid wave reflections on the lateral walls during the generation process.

The velocity field in the bulk during bottom and surface deformations is obtained using Particle Image Velocimetry (PIV). A laser sheet passing through the basin centre illuminated a vertical slice of water seeded with  $50 \mu\text{m}$  polyamide particles (PSP), as shown in figure 1. To avoid particle settling, the water was mixed with some NaCl (up to a mass concentration of 2.7%) so the aqueous solution matches the density of particles. A high-speed camera placed in front of the illuminated region provided an imaging area of  $71 \times 30 \text{ mm}^2$  ( $1600 \times 692$  pixels), which was recorded at 500 Hz during  $\tau_m = 1 \text{ s}$  ( $\tau_m$  is defined as the measurement time). Since the system is axisymmetric, these measurements build a 3D picture of the flow. The surface of the water layer was blown with more particles, which due to their surface tension, tend to rest in the surface. In the images, the particles form an identifiable line, which can be used for detection (figure 2). The free-surface vertical deformation  $\eta(r, t)$  was then obtained by applying a Radon transform algorithm on the images [39]. This algorithm integrates the intensity along all the possible straight lines contained in a sub-window and finds the maximal value. A continuous and smooth curve is then obtained by interpolating the segments (slope and position) along the whole free surface. An example of the detected free surface by the algorithm is plotted in figure 2. Finally, we applied





**Figure 1.** Experimental set-up. A layer of water is contained in a basin where a shaker-piston vertically deforms an elastic sheet placed at the bottom centre. The piston motion is recorded using a laser vibrometer. Images from a sectional cut of the fluid are obtained using a laser sheet generator and a high-speed camera. The bottom dimensionless spatial profile  $\alpha(r)$  and the time displacement function  $\beta(t)$  are also displayed. (Online version in colour.)



**Figure 2.** A typical image of the region of interest (side view) for the study of waves generated by a moving bottom. The liquid is seeded with particles (white points) both in the bulk and in the free surface. Those at the free surface form a quasi-continuous brighter line that is used to identify the position of the free surface  $\eta(r, t)$ . The bottom position  $\zeta(r, t)$  can also be detected with standard contrast techniques. The snapshot was taken at  $t = 80$  ms in a half-sinus bed deformation scenario ( $\zeta_m = 5$  mm,  $\tau_b = 150$  ms,  $h = 2.5$  cm). (Online version in colour.)

a PIV grid-refining scheme [40] (up to  $16 \times 16$  pixels windows, no overlapping) using an average correlation method [41] on 10 experimental runs for each set of parameters.<sup>1</sup> All the data used throughout this article are available at a public repository at [42].

The two time scales in our experiment are the bottom rise time  $\tau_b$  and the typical time of the generated waves  $\tau_w$ . We defined  $\tau_w$  as the semi-period of the wave, i.e. the time between

<sup>1</sup>Owing to the reproducibility of experiments, we superimpose pictures of 10 identical runs to increase the number of particles on the processed images, improving PIV results.



the first maximum and minimum of the water surface deformation at the basin centre ( $r = 0$ ). In our experiment,  $\tau_w \simeq 130$  ms is the same for any displacement time function  $\beta$  and most of rise times  $\tau_b$  (see results below). This value is related to the dominant wavelength of the generated wave  $\lambda_w \approx 10$  cm (according to acquired images), through the dispersion relation  $\tau_w = \pi / \sqrt{gk_w \tanh k_w h}$ , where  $g$  is gravity and  $k_w$  is the dominant wavenumber of the generated wave.<sup>2</sup> Note that  $\lambda_w > 2r_2 = 6.5$  cm. During measurements, capillary waves were not observed<sup>3</sup> (see discussion in §3c). We focus on one experimental time ratio simply defined as  $\bar{\tau} = \tau_b / \tau_w$ , which varies between 0.08 and 4. The relevance of the time ratio in tsunami generation was noticed by Hammack [29], who suitably identified three wave-response regimes to bottom deformations: impulsive ( $\bar{\tau} \ll 1$ ), transitional ( $\bar{\tau} \sim 1$ ) and creeping ones ( $\bar{\tau} \gg 1$ ). The Froude number in our measurements  $Fr = \zeta_m / \tau_b \sqrt{gh}$  varies between 0.02 and 0.3.

### 3. Results and discussion

#### (a) Velocity field

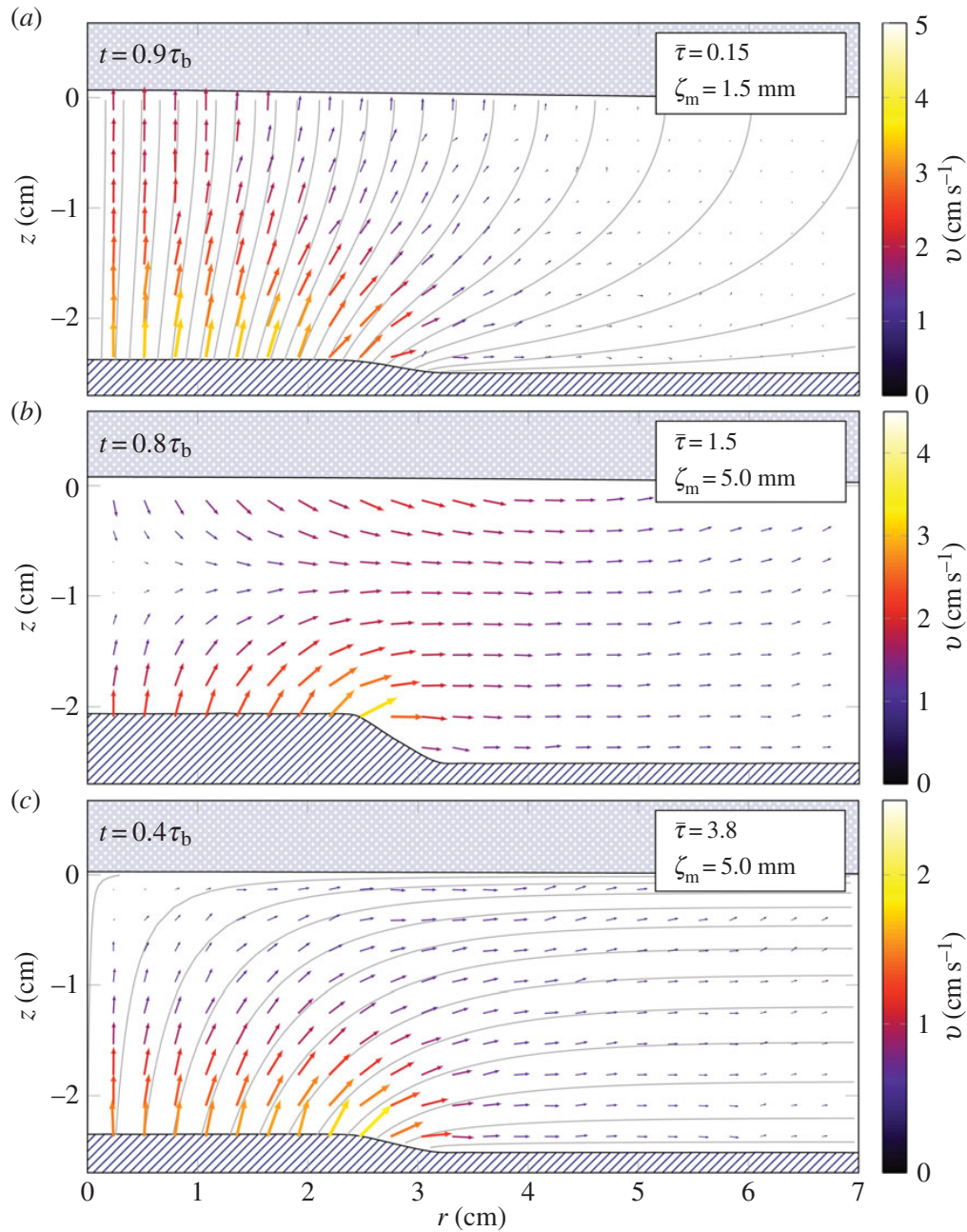
Within the above classification, we display (in figure 3) three characteristic snapshots of the wave-generation velocity fields for half-sine type displacements. The vertical coordinate is denoted as  $z$  such that at rest, the free surface matches  $z = 0$  and the bottom,  $z = -h$ . When  $\bar{\tau} \ll 1$ , we observe an upward global motion during the bottom uplift. Indeed, the velocity field just below the free surface is vertical (figure 3a) as predicted in [43]. Gravity-wave propagation starts remarkably after the end of the bottom motion as shown in videos.<sup>4</sup> When  $\bar{\tau} \sim 1$ , the flow resembles that of figure 3a at short times. However, before the bottom motion ends, waves start to propagate radially from the generation region: an oscillating flow occurs right beneath the free surface (figure 3b). In this case, both bottom deformation and wave propagation occur simultaneously suggesting that the bottom kinematics affects induced waves. For  $\bar{\tau} \gg 1$ , the free surface remains mostly stationary and accordingly, the vertical component of the velocity vanishes when approaching the free surface (figure 3c). In this stage, the outward flow reminds that of a moving bottom in the presence of a fixed boundary at  $z = 0$ . We observed that exponential-rise bottom displacements (not shown) display similar behaviour.

To quantify the transition between the slow and rapid regimes, we compute the kinetic energy from the fluid velocity field. Figure 3 shows that the region  $r < 7$  cm contains most of the kinetic energy during the bottom deformation. As shown in figure 4 (inset), the kinetic energy within this volume,  $E_K$ , captures also the main temporal features of the motion (see also [44]). The bottom uplift induces an intense first maximum of  $E_K$ . As the bottom stops afterwards, a local minimum  $E_K^-$  appears and later, a second maximum  $E_K^+$  emerges induced by wave propagation. We define the contrast of kinetic energy as  $(E_K^+ - E_K^-) / (E_K^+ + E_K^-)$ . As shown in figure 4, the contrast is close to unity for  $\bar{\tau} \ll 1$ : the liquid can be considered as motionless at the end of the bottom deformation ( $E_K^- \approx 0$ ), with its velocity being negligible compared with those due to wave propagation. Inertia seems to be absent since no flow outlasts the bottom motion: the liquid layer and the bottom behaves like a single block. For larger  $\bar{\tau}$ , the wave propagation begins while the bottom is still moving so the energy contrast decreases to zero. Furthermore, for  $\bar{\tau} \gtrsim 1.4$ , the contrast is not defined any more because the bottom deformation and the wave propagation overlap so much that  $E_K^-$  and  $E_K^+$  do not exist at all. This shows that the energy contrast depicts well the transition between rapid and slow scenarios. The data scattering observed in figure 4 has no physical origin and is inherent to PIV measurements as the technique holds some uncertainties. For exponential

<sup>2</sup>The generated wave is mainly dispersive as  $\lambda_w = 4h$ , in contrast with real tsunami scenarios where waves are less dispersive.

<sup>3</sup>The electromechanical shaker was intentionally decoupled from the tank (no solid contact) so that high-frequency vibrations could not be directly transferred to the tank. The only contact took place between the piston and the soft membrane used for the bottom deformation. This configuration avoids the emergence of capillary waves due to shocks at small  $\tau_b$  bed uprise motion. Notice that PSP particles at the free surface are likely to inhibit capillary waves.

<sup>4</sup>See the electronic supplementary material for velocity-field videos of the runs depicted in figure 3.



**Figure 3.** Experimental velocity fields in the water during half-sine bottom displacements for three typical  $\bar{\tau}$  values. The streamlines (set of grey curves) in (a,c) were computed numerically using an asymptotic model for the  $\bar{\tau} \ll 1$  and  $\bar{\tau} \gg 1$  cases (see explanation in §3d). In all cases, the free-surface deformation is significantly smoother than the bottom one. (Online version in colour.)

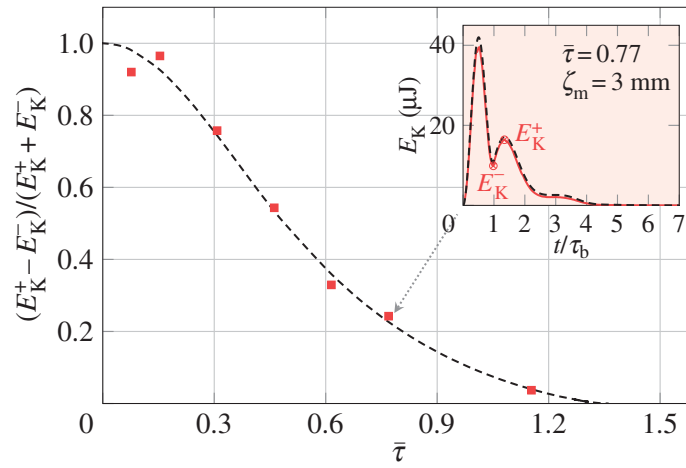
bottom motions (not shown), times at which extrema of  $E_K$  occur are different from the half-sine case,<sup>5</sup> but the contrast of kinetic energy behaves similarly with  $\bar{\tau}$ .

## (b) Free surface

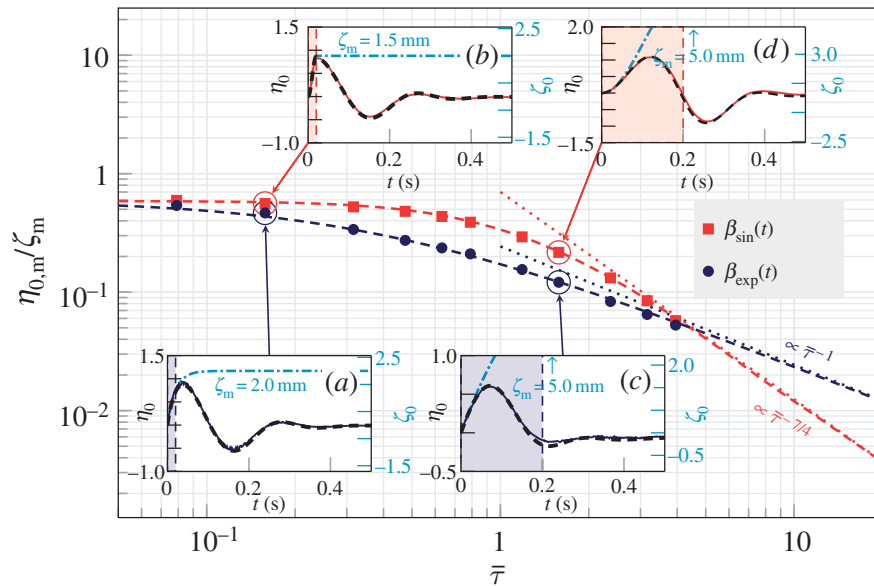
Since the fluid velocity field is coupled with the free-surface deformation, both quantities share related spatio-temporal features.<sup>6</sup> The insets of figure 5 depict the bottom and the free-surface elevations at  $r = 0$ ,  $\zeta_0(t)$  and  $\eta_0(t)$ , as a function of time. We observe in all cases that the free surface and the bottom are synchronized at the beginning of the motion. For  $\bar{\tau} \ll 1$ , this is true throughout the bottom uplift and regardless of the displacement time function  $\beta(t)$  as time satisfies  $t < \tau_b \ll \tau_w$  (figure 5a–b). Besides, the subsequent stage is independent of the displacement-time

<sup>5</sup>For example, the first intense maximum of  $E_K$  occurs at  $t = 0$  for the exponential case.

<sup>6</sup>Coupled in the same sense that velocity is coupled with position in a harmonic oscillator, i.e. with a  $90^\circ$  phase difference.



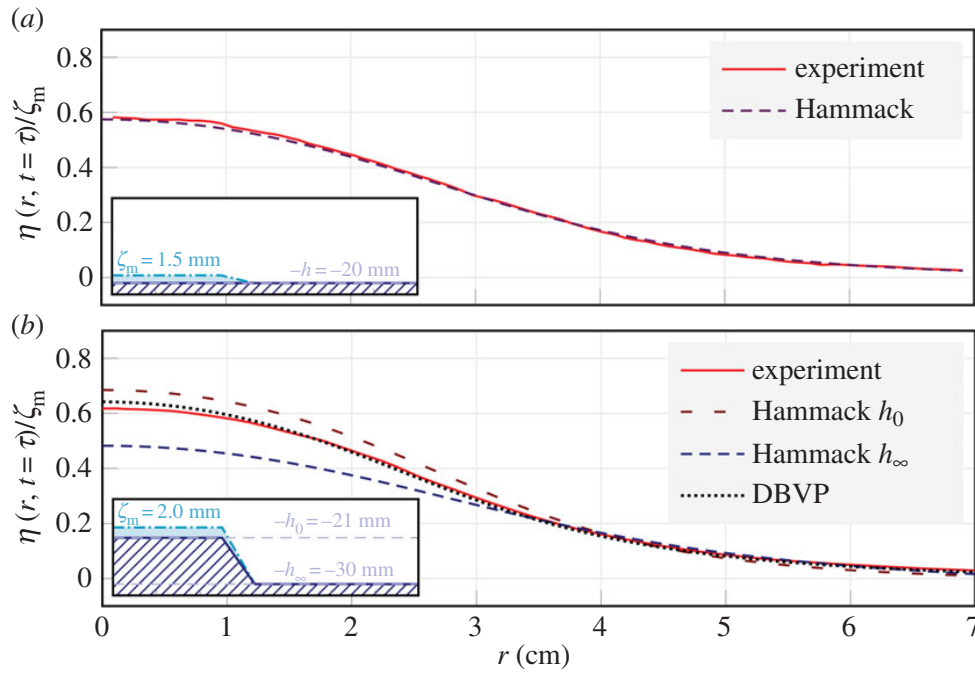
**Figure 4.** Inset: experimental (solid line) and theoretical (dashed line) kinetic energy  $E_K$  versus time.  $E_K^-$  is the local minimum of kinetic energy near  $t = \tau_b$  and  $E_K^+$  is the local maximum of kinetic energy due to the wave propagation. Experimental (squares) and theoretical (dashed line) contrast of kinetic energy versus  $\bar{\tau}$ . (Online version in colour.)



**Figure 5.** Insets: bottom and free-surface deformations in mm at  $r = 0$ ,  $\zeta_0$  and  $\eta_0$ , versus time ( $\zeta_0$  in dash-dotted lines;  $\eta_0$  experiments in solid lines; theory in dashed lines) for exponential (a,c) and half-sine (b,d) bottom displacements. The vertical dashed lines represent  $t = \tau_b$  for each run. The wave time scale  $\tau_w$  is found to be 130 ms in all the cases. Dimensionless free-surface maximal elevation at  $r = 0$ , against  $\bar{\tau}$  for different bottom displacements (see legend). Symbols are experimental data, dashed lines are theoretical results and dotted lines are asymptotic behaviours ( $\bar{\tau} \gg 1$ ). (Online version in colour.)

history of the bottom. Contrariwise, for  $\bar{\tau} \gtrsim 1$ , exponential and half-sine bed displacements induce free-surface responses that not only differ from rapid ones, but also from one another (figure 5c, d), e.g. the negative part of  $\eta_0$  is more pronounced for the half-sine case. This evidences that for  $\bar{\tau} \gtrsim 1$  the generated-wave shape depends on the nature of  $\beta(t)$  as well as on its typical time  $\tau_b$ , which confirms that the bottom kinematics is crucial in non-impulsive wave generation.

To understand more precisely its role, we plot in figure 5 the dimensionless maximal elevation of the free surface at  $r = 0$ ,  $\eta_{0,m}/\zeta_m$ , as a function of the time ratio  $\bar{\tau}$ . As expected,  $\eta_{0,m}$  decreases with  $\bar{\tau}$  and converges to the same asymptote for  $\bar{\tau} \ll 1$  independently of the nature of  $\beta(t)$ . For  $\bar{\tau} \gg 1$ , we observe two different behaviours:  $\eta_{0,m}$  decreases as  $\bar{\tau}^{-1}$  for exponential bottom displacements and as  $\bar{\tau}^{-7/4}$  for half-sine ones. This differs from one-dimensional experiments where a  $\bar{\tau}^{-1}$  power law fits both cases [29]. To summarize, when motion is transferred from the bottom to the free surface, the fluid layer behaves as a temporal high-pass filter (cut-off at  $\bar{\tau}^{-1} \approx 1$ ).



**Figure 6.** Insets: initial bottom shape  $\zeta(r, t = 0)$  (hatched areas), and final bottom shape after a half-sine impulsive deformation,  $\zeta(r, t \geq \tau = 20 \text{ ms})$  (coloured area/dash dotted lines) for: (a) *flat-bottom* initial configuration and (b) *non-flat-bottom* initial configuration: the piston is raised 9 mm above the basin bottom beforehand. Main: corresponding free surfaces at the end of the deformation,  $\eta(r, t = \tau)$ . (a) Experimental data (solid line); Hammack's linear theory (dashed line). (b) Experiments (solid line); Hammack's linear theory considering depth above the piston  $h_0 = 21 \text{ mm}$  (loosely dashed line); depth far from the piston,  $h_\infty = 30 \text{ mm}$ , (densely dashed line); decoupled boundary value problem (DBVP) approach (dotted line). See discussion in §3d. (Online version in colour.)

Note that  $\eta_{0,m}/\zeta_m$  does not reach unity when  $\bar{\tau} \rightarrow 0$ , as a consequence of the spatial low-pass filtering effects. The effects are highlighted in figure 6a, where we plot the spatial profiles of the bottom and the free surface at the end of an impulsive bed motion ( $t = \tau$ ;  $\bar{\tau} \ll 1$ ). We observe that the free surface is smoother than the bottom so the water column acts as a spatial low-pass filter. Note that this final free-surface profile is independent of  $\bar{\tau}$  and of the nature of  $\beta(t)$  (as long as  $\bar{\tau} \ll 1$ ). Low-pass filtering effects also explain why the dominant wavelength in our results,  $\lambda_w \approx 10 \text{ cm}$ , is larger than the size of the deformed region,  $2r_2 = 6.5 \text{ cm}$ .

### (c) Linear theory

The experimental data displayed in figures 4–6 are all found to be in good agreement with theoretical curves without any parameter fitting. The curves were calculated using the axisymmetric version of Hammack's tsunami-generation theory which neglects capillary, compressibility and viscous effects [38]. In our experiments, capillary effects are indeed negligible since the typical wavelength  $\lambda_w \approx 10 \text{ cm}$  is nearly 1 order of magnitude larger than the critical wavelength of capillary waves,  $\lambda_c = 2\pi\sqrt{\gamma/(\rho g)} \approx 1.4 \text{ cm}$  ( $\gamma \approx 50 \text{ dyn cm}^{-1}$  is the surface tension and  $\rho \approx 1 \text{ g cm}^{-3}$  the fluid density). The observed flow is also incompressible as  $(\{\zeta_m/\tau_b, h/\tau_b, r_1/\tau_b\} \ll c_s)$ , where  $c_s \approx 1500 \text{ m s}^{-1}$  is the sound speed in water [45]. Viscous effects are also absent as time scales associated with viscous processes,  $\tau_v \gtrsim 10 \text{ s}$ , are much larger than the experimental time scales.<sup>7</sup>

<sup>7</sup>Three different time scales, each of them associated with a different viscous process, can be calculated: (i) the decay time of the generated gravity waves due to the viscous boundary layer on the bottom:  $\tau_v^b = \tau_v \sinh 2k_w h \approx 50 \text{ s}$ , where  $\tau_v = \sqrt{\lambda_w^2 \tau_w / 2\pi^3 \nu}$  ( $\nu \approx 10^{-2} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  is the kinematic viscosity), (ii) the wave decay time due to the viscous boundary layer on the free surface is  $\tau_v^s = 2\tau_v \tanh k_w h \approx 10 \text{ s}$ , and (iii) the viscous-diffusion characteristic time in the bulk  $\tau_v^v = \lambda_w^2 / 8\pi^2 \nu \approx 200 \text{ s}$  [46].



After neglecting capillary, compressibility and viscous effects, the flow can be assumed to be irrotational and hence the system can be expressed in terms of a velocity potential  $\phi$  that satisfies

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3.1)$$

in the bulk. The experimental amplitude parameter  $\zeta_m/h$  is small enough to linearize boundary conditions [38]. Thus, if the bottom is initially flat, the dynamic condition at the free surface as well as the kinematic boundary conditions can be written as

$$\partial_t \phi|_{z=0} + g\eta = 0, \quad (3.2)$$

$$\partial_z \phi|_{z=-h} - \partial_t \zeta = 0 \quad (3.3)$$

and

$$\partial_z \phi|_{z=0} - \partial_t \eta = 0. \quad (3.4)$$

To solve this system of equations, we apply the Laplace transform in  $t$  to the displacement time function,  $\tilde{\beta}(s) \equiv \mathcal{L}\{\beta(t)\}(s)$ , and the Hankel transform of zeroth order in  $r$  to the spatial profile,  $\hat{\alpha}(k) \equiv \mathcal{H}_0\{\alpha(r)\}(k) \equiv \int_0^{+\infty} r J_0(kr) \alpha(r) dr$ , where  $J_0$  is the zeroth-order Bessel function of the first kind. The latter is equivalent to a two-dimensional (2D) Fourier transform under circular symmetry. Accordingly, the Hankel transform of the free-surface deformation may be written as [38]

$$\hat{\eta}(k, t) = \frac{\zeta_m \hat{\alpha}(k)}{\cosh kh} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2 \tilde{\beta}(s)}{s^2 + \omega(k)^2} \right\} (k, t), \quad (3.5)$$

where  $\omega(k) = \sqrt{gk \tanh kh}$  is the gravity-wave dispersion relation. The direct and inverse Laplace transforms in equation (3.5) can be evaluated in closed form for both  $\beta_{\text{exp}}(t)$  and  $\beta_{\text{sin}}(t)$ . Besides, the spatial transform  $\hat{\alpha}(k)$  may be computed numerically. The spatio-temporal free-surface deformation  $\eta(r, t) = \mathcal{H}_0^{-1}\{\hat{\eta}(k, t)\}$  can be found likewise using a Fourier–Bessel series representation of  $\mathcal{H}_0^{-1}$  [47]. The velocity field can also be obtained by calculating the velocity potential  $\phi$  through the formula

$$\hat{\phi}(k, z, t) = \frac{\zeta_m \hat{\alpha}(k)}{\cosh kh} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{gs \tilde{\beta}(s)}{s^2 + \omega(k)^2} \left( \frac{s^2}{gk} \sinh kz - \cosh kz \right) \right\} (k, z, t). \quad (3.6)$$

Theoretical dashed lines in figures 4–6 are computed using equations (3.5) and (3.6) and display very good agreement with experimental data. The first factor in equation (3.5) is the Hankel transform of the final bottom deformation but modulated with a low-pass filter,  $(\cosh kh)^{-1}$ , that smooths the free surface as shown in figure 6. The second factor is spatio-temporal and relates the time  $t$  (corresponding to  $s$  in the Laplace domain) with the two characteristic times: the wave semi-period  $\tau_w$  (corresponding to  $\omega$ ) and the bottom rise time  $\tau_b$  (contained in  $\tilde{\beta}(s)$ ).

#### (d) Asymptotic analysis (decoupled boundary value problem approach)

In this section, we make an asymptotic analysis of (3.5) and (3.6), i.e. the linear model for tsunami-waves generation, for both the impulsive case ( $\bar{\tau} \ll 1$ ) and the creeping case ( $\bar{\tau} \gg 1$ ).

For the asymptotic expansion, consider first the impulsive limit  $\bar{\tau} \ll 1$ , so the expansion is made in terms of  $\bar{\tau}$ . We consider  $t \ll \tau_w$ ,  $s^2 + \omega^2 \sim s^2$ , the second factor of equation (3.5) becomes simply  $\beta(t)$  (and  $\partial_t \beta(t) \sinh kz/k$  in equation (3.6)), gravity effects vanish yielding interface elevations instantaneously equal to the bottom low-pass-filtered deformations

$$\eta(r, t) = \mathcal{H}_0^{-1} \left\{ \frac{\zeta_m \hat{\alpha}(k)}{\cosh kh} \right\} (r) \beta(t) + \mathcal{O}(\bar{\tau}^2) \quad (3.7)$$

and

$$\phi(r, z, t) = \mathcal{H}_0^{-1} \left\{ \frac{\zeta_m \hat{\alpha}(k) \sinh kz}{k \cosh kh} \right\} (r) \partial_t \beta(t) + \mathcal{O}(\bar{\tau}^2). \quad (3.8)$$

The asymptotic expansion is valid only for  $t \lesssim \tau_b$ . This is consistent with the behaviour observed experimentally at short times: the fluid and the free surface moves synchronously with the bottom

(figures 3*a* and 5 (insets)). For later times,  $t \gtrsim \tau_b$ ,  $\beta(t)$  can be considered as a Heaviside function  $H(t)$  provided that  $\bar{\tau} \ll 1$ . Hence,  $\tilde{\beta}(s) = \tilde{H}(s) = s^{-1}$ , and the second factor in equation (3.5) becomes a propagation term:  $\hat{\eta}(k, t) = \zeta_m \hat{\alpha}(k) \cos \omega(k)t / \cosh kh$ . As stated by Kajiura [28], this is equivalent to a Cauchy–Poisson wave problem in which only the final bottom deformation is low-pass filtered and transferred to the surface as an initial condition. Likewise, we have shown that the fluid is motionless when the bottom motion ends. No trace from the temporal features of the initial motion is left. This explains the memory loss of the bottom-displacement history observed in our experiments.

Like free-surface deformation, velocity potential for the impulsive limit ( $\bar{\tau} \ll 1$ ) has a striking feature: gravity plays no role during the bottom motion, i.e.  $t \leq \tau_b \ll \tau_w$  (equations (3.5) and (3.6)). Accordingly, we analyse the limit  $g \rightarrow 0$ . At leading order, we can drop the gravity term in equation (3.2), so  $\phi|_{z=0} = 0$  and the free surface  $\eta$  decouples from equations (3.1)–(3.3). This yields a decoupled boundary value problem (DBVP) for the velocity potential  $\phi$ , equivalent to solve Laplace equation with given boundary conditions:

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \phi|_{z=0} = 0 \quad \text{and} \quad \partial_z \phi|_{z=-h} = \partial_t \zeta. \quad (3.9)$$

The free-surface deformation  $\eta$  may then be obtained from equation (3.4). Note that for any bed motion  $\zeta(x, y, t)$  separable in space and time, i.e.  $\zeta(x, y, t) = \zeta_m \alpha(x, y) \beta(t)$ , the velocity field generated by (3.9) scales with the velocity of the bottom,  $\partial_t \beta$ , while the streamlines and vector orientation are steady. The boundary condition  $\phi|_{z=0} = 0$  is consistent with the experimentally observed features in figure 3*a*: a vertical velocity field at the free surface.

Another interesting limit stands for the creeping case where  $\bar{\tau} \gg 1$ . Accordingly, the expansion now given in terms of  $\bar{\tau}^{-1}$ . We consider  $t \gg \tau_w$ , the free-surface deformation from (3.5) and the velocity field from (3.6) yield at dominant order to

$$\eta(r, t) = \mathcal{H}_0^{-1} \left\{ \frac{\zeta_m \hat{\alpha}(k)}{gk \sinh kh} \right\} (r) \partial_{tt} \beta(t) + \mathcal{O}(\bar{\tau}^{-4}) \quad (3.10)$$

and

$$\phi(r, z, t) = \mathcal{H}_0^{-1} \left\{ -\frac{\zeta_m \hat{\alpha}(k) \cosh kz}{k \sinh kh} \right\} (r) \partial_t \beta(t) + \mathcal{O}(\bar{\tau}^{-2}). \quad (3.11)$$

Again, the velocity potential is independent of  $g$ . Although, the dependence on  $k$  is different than in the impulsive case. Note that the free-surface-deformation dominant term is not  $\mathcal{O}(1)$ , which is equal to zero, but the following one, which is  $\mathcal{O}(\bar{\tau}^{-2})$ . The term is proportional to the ratio of the bottom acceleration and gravity.<sup>8</sup> Be aware that there is not any conflict between the form of the asymptotic expansions and the asymptotic behaviour of  $\eta_{0,m}/\zeta_m$  in the creeping limit ( $\bar{\tau} \gg 1$ ) depicted in figure 5. For our largest values of  $\bar{\tau}$ , maximal deformations are attained at  $t \gtrsim \tau_w$ , for which the asymptotic expansion is not valid.

Another DBVP can be found for this case. Consider  $g \rightarrow \infty$  in equation (3.2): hence  $\eta = 0$ . The new DBVP is again equivalent to solve Laplace equation but with a different boundary condition at  $z = 0$

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \partial_z \phi|_{z=0} = 0 \quad \text{and} \quad \partial_z \phi|_{z=-h} = \partial_t \zeta. \quad (3.12)$$

The properties are similar to those of the impulsive case: proportionality to  $\partial_t \beta$  and steady streamlines for space–time separable functions. We find again in  $\partial_z \phi|_{z=0} = 0$  that the velocity field is horizontal at the free surface as observed experimentally in figure 3*c*.

For both limits,  $\bar{\tau} \gg 1$  and  $\bar{\tau} \ll 1$ , the DBVP can be straightforwardly solved using a finite-difference scheme for the Laplace equation [48, pp. 1024–1031]. The method differs from Green's function approach developed in [43]. The computed streamlines fit in an excellent way the measured velocity field (figure 3*a,c*). On the other hand, while for  $\bar{\tau} \gg 1$ ,  $\eta \simeq 0$ , for initially flat bottoms undergoing impulsive uplifts ( $\bar{\tau} \ll 1$ ),  $\eta$  can be obtained from equation (3.4). This leads to the spatial low-pass filtered results found previously.

<sup>8</sup>The asymptotic expansion goes as  $\tau^{-2n}$  as a consequence of the term  $s^2/(s^2 + \omega^2)$  inside the inverse Laplace transform in equation (3.5).

The DBVP approach has another great advantage: it can be adapted to initially arbitrary-shaped-bottom basins by simply writing the bottom condition as  $\partial_z \phi|_{z=-h(x,y)} = \partial_t \zeta$ . To experimentally validate the DBVP approach under this configuration, we considered a non-flat-bottom initial condition in our tank, i.e. the piston was raised above the basin-bottom level beforehand (figure 6*b* (inset)). In figure 6*b*, we plot the spatial profile of the free surface at the end of an impulsive bottom deformation ( $\bar{\tau} \ll 1$ ). We observe that the DBVP results displays very good agreement with the experimental profile. Comparison with other initially flat-bottom models is not straightforward: for instance, the water depth  $h$  used in Hammack's linear theory is not defined anymore. Two different water depths are involved:  $h_0$  above the piston and  $h_\infty$  elsewhere. The spatial profiles obtained with Hammack's linear theory, using either  $h = h_0$  or  $h = h_\infty$ , are significantly different from the experimental profile. This demonstrates the usefulness of the DBVP approach for taking into account varying bathymetry, if present (see the discussion below).

Note that dependence on time in the DBVP equations is slaved to  $\zeta(t)$ . Thus, to compute free-surface deformation during an impulsive bottom motion ( $\bar{\tau} \ll 1$ ,  $t \leq \tau_b$ ), Laplace equations need to be solved just once and then scaled by  $\beta(t)$ . For later times ( $t > \tau_b$ ), classical wave-propagation routines can be easily plugged. The initial waveform will be provided by the impulsive DBVP at the end of the bottom motion (static initial condition).

Owing to its low cost, one solving-Laplace-equation step, the method may be used as a computationally affordable routine to incorporate terrain conditions in impulsive tsunami generation real scenarios.

## (e) Application to tsunamis

Tsunami-generation experiments in laboratory tanks deal with a clear compromise between scalability to realistic scenarios and feasibility, controllability and measurability. The aim of our experiments was to understand the role of the spatio-temporal features of bottom motion on induced waves (e.g. measuring simultaneously the velocity field and the free-surface deformation during the process). Thus, we had to make a suitable choice of the dimensions of the experiments. Accordingly, our experimental parameters ( $\zeta_m^+/h^+ = 0.06 - 0.2$ ,  $r_1^+/h^+ = 1$ ,  $\tau_b^+ = 10 - 500$  ms) obviously differ from those of real tsunamis ( $\zeta_m^*/h^* \sim 10^{-3}$ ,  $r_1^*/h^* \sim 10 - 20$ ,  $\tau_b^* \sim 1 - 100$  s) by several orders of magnitude. Notwithstanding, we have shown that at our chosen scales, bottom-induced wave generation is governed by Hammack's linear theory, and in its fast and slow asymptotics, by the DBVP framework. In this section, we carefully check the validity of the same theoretical frameworks when scaled up to typical tsunami scales. The check-up requires not only the analysis of the linear-theory assumptions but also the evaluation of some key dimensionless numbers.

- Concerning viscosity and capillarity effects, we can verify that both effects decrease as length scales increases. This means that in real scenarios, they should be even smaller than in our set-up.<sup>9</sup>
- Nonlinear effects are measurable through the dimensionless quantity  $\zeta_m/h$ , which is much lower in real-tsunami scenarios than in our experiments ( $\zeta_m^*/h^* \sim 10^{-3} \ll \zeta_m^+/h^+ \sim 10^{-1}$ ). This means that for real-tsunami scenarios linear theory should fit even better.<sup>10</sup>
- Geometry issues, which can be quantified by the size ratio  $r_1/h$ , require a deeper analysis. In our experiments, we fixed  $r_1^+/h^+ = 1$  to highlight the spatial low-pass filtering. For accepted tsunami values ( $r_1^*/h^* \sim 10 - 20$ ), filtering effects are expected to be weak. However, recent and more direct evidence shows that tsunami initial waveforms have a

<sup>9</sup>Compressibility, on the other hand, may have some effect as  $h/\tau_b$  and  $r_1/\tau_b$  become non-negligible compared with the speed of sound  $c_s$  at plausible tsunami scenarios. However, it is far from being dominant. Numerical integrations show that acoustic-gravity waves just superpose on a main signal which is equal to incompressible gravity wave (see e.g. fig. 2 in [45]).

<sup>10</sup>Since,  $\eta/\zeta_m$  and  $\phi/\zeta_m$  are independent of  $\zeta_m$  (see equations (3.5) and (3.6)), as a consequence of linearity, our experiments are able to capture the dynamic features for smaller amplitude waves, as those from real-tsunami scenarios.

- complex spatial distribution with significantly smaller length scales:  $r_1^*/h^* \lesssim 5$ , as shown with data from two recent tsunami sources (including the large 2011 Tohoku tsunami in Japan) [49,50]. Their spatial distributions may be approximated by spherical-cap deformations, which yield low-pass filtering  $\eta_{0,m}^*/\zeta_m^*$ -corrections of 10% [28].
- Dynamic effects, can be analysed in terms of the time ratio  $\bar{\tau} = \tau_b/\tau_w$ . In this case, the typical tsunami range of time ratios  $\bar{\tau}^* \in [0.003, 0.3]$  is located on the left-hand side of figure 5, which makes them suitable for the impulsive DBVP approach. In our experiments,  $\bar{\tau}^+ \in [0.08, 4]$ . First, notice that although the fastest tsunamis are beyond our experimental range, the asymptote for  $\bar{\tau} \ll 1$  is largely attained within it, so that our work covers faster tsunamigenic earthquakes. Besides, temporal high-pass filtering effects become significant for slowest tsunami scenarios. For instance, the 2004 Sumatra-Andaman tsunamigenic earthquake in Indonesia displayed rise times estimated at  $\tau_b^* \approx 3$  min while  $\tau_w^* \approx 10$  min (i.e.  $\bar{\tau}^* \sim 0.3$ ) [51]. According to our results, this yields  $\eta_{0,m}/\zeta_m$ -corrections from 10% (half-sine displacement time function) to 40% (exponential rise) compared to the nearly instantaneous case. Furthermore, as earthquakes may involve different timescales between rise and subsidence times, our extended range of  $\bar{\tau}^+$ -values is of importance to know from which timescales surface waves generated by a bottom motion become negligible.<sup>11</sup>
  - Effects due to bathymetry (non-flat bottoms initial conditions) are hard to quantify by a single dimensionless parameter, since corrections will depend on the particular geometrical features around the source. However, it is known that water depth may vary abruptly in the fault crosswise direction in subduction zones, the archetype of tsunamigenic regions. To illustrate with one case, water depth varies by a factor of 3 over 60 km at the source of the 2011 Tohoku tsunami [52]. Although the source bathymetry of this event is far from being axisymmetric, the initial condition is roughly comparable to figure 6b. Finally, we have shown that the DBVP approach that we provide in this study may be applied to uncover bathymetry effects on tsunami waveforms.

Note that the application of some of our results to real-time tsunami forecasts may be limited by the fact that seismic data do not provide much details about the seabed kinematics (e.g. rise time, spatial resolution). For instance, the currently used spatial resolution for bottom deformations at tsunami sources is  $25 \times 50 \text{ km}^2$  (NOAA SIFT Green's functions). However, higher spatial resolutions in tsunami sources may become available soon in standard real-time simulations. Indeed, Crowell *et al.* [53] have recently shown that it is possible to obtain seabed deformations at high resolutions within 2 min after the strike of an earthquake using GPS data.

## 4. Conclusion

In conclusion, we have investigated the generation of free surface waves by an underwater moving bottom. The experiments, which included simultaneous measurements of fluid velocity field and free-surface displacement in an initially flat-bottom configuration, display excellent agreement without any parameter fitting with a linear theory of gravity waves. Although the small scale of our wave-generation set-up cannot be compared to real-tsunami scenarios, our experiments are able to capture underlying features of dynamic coupling in tsunami-wave generation. Essentially, the fluid layer transfers motion from the bottom to the free surface as a temporal high-pass filter coupled with a spatial low-pass filter. Transfer models that perform a simple translation, such as those used by tsunami warning systems, overlook both filters effects. Supported on measured velocity fields, we have developed an alternative theoretical guideline for taking into account spatial filtering for impulsive bottom uplifts. Furthermore, the impulsive

<sup>11</sup> However, linear-theory corrections due to 'uprise slowness' yield lower amplitudes, while those of the observed tsunami were larger. The cause may be a resonance mechanism due to a richer bottom kinematics, e.g. a slowly spreading fault, as predicted in [15]. To analyse this, we are running experiments on a new setup that supports complex-dynamics scenarios. Results are far from the scope of this manuscript and will be published separately.



model was adapted to predict the initial waveforms generated for initially non-flat-bottom configurations. This is achieved via a one-step-in-time numerical integration of Laplace equation in a suitable domain and under given boundary conditions. The results have been successfully validated with experiments. The new guideline may help to include *in situ* bathymetry data in tsunami scenarios at low computational cost: this would be a key for improving real-time forecast tsunami simulations.

Further experimental work will involve studying other spatial/dynamic features of realistic tsunami scenarios, e.g. non-axisymmetric spatial distribution, complex bottom kinematics (e.g. spreading faults). Beyond tsunami-oriented experiments, we also intend to probe nonlinear effects for larger bottom deformations. Further theoretical work, will include a rigorous higher order analysis of the asymptotic expansions for the impulsive and creeping limits.

**Data Accessibility.** All the data used throughout this article are available at a public repository: <http://dx.doi.org/10.6084/m9.figshare.979238>.

**Authors' Contributions.** T.J. performed the experiments, set up the mechanical excitation control, analysed and interpreted data, adapted the linear model and wrote the paper; L.G. performed the experiments, wrote data processing codes (PIV and free-surface detection), analysed and interpreted data, developed the DBVP approach and wrote the paper. T.J. and L.G. contributed equally to this work. G.R.-C. performed the experiments; M.B. conceived and designed the study; E.F. conceived, designed and coordinated the study. All the authors discussed and edited the manuscript and gave final approval for publication.

**Competing Interests.** We declare we have no competing interests.

**Funding.** T.J. was supported by the DGA-CNRS PhD program and L.G. by a 2012 Postdoctoral Fellowship of the AXA Research Fund. G.R.-C. was supported by the program Research in Paris 2011 of the City of Paris. This research was financed by the ANR Turbulon 12-BS04-0005.

**Acknowledgements.** We acknowledge F. Dias for fruitful discussions about this topic. We thank A. Lantheaume and the LIED (Université Paris Diderot) for their technical help.

## References

1. Mungov G, Eblé M, Bouchard R. 2013 DART<sup>®</sup> tsunameter retrospective and real-time data: a reflection on 10 years of processing in support of tsunami research and operations. *Pure Appl. Geophys.* **170**, 1369–1384. (doi:10.1007/s00024-012-0477-5)
2. Okada Y. 1985 Surface deformation due to shear and tensile faults in a half-space. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **75**, 1135–1154.
3. Arcas D, Uslu B. 2010 PMEL tsunami forecast series: vol. 2. Technical report.
4. Geist EL, Titov VV, Synolakis C. 2006 Tsunami: WAVE of CHANGE. *Sci. Am.* **294**, 56–63. (doi:10.1038/scientificamerican0106-56)
5. Geist EL, Bilek SL, Arcas D, Titov VV. 2006 Differences in tsunami generation between the December 26, 2004 and March 28, 2005 Sumatra earthquakes. *Earth Planets Space* **58**, 185–193. (doi:10.1186/BF03353377)
6. Maeda T, Furumura T, Sakai S, Shinohara M. 2011 Significant tsunami observed at ocean-bottom pressure gauges during the 2011 off the Pacific coast of Tohoku Earthquake. *Earth Planets Space* **63**, 803–808. (doi:10.5047/eps.2011.06.005)
7. Tanioka Y, Seno T. 2001 Sediment effect on tsunami generation of the 1896 Sanriku Tsunami Earthquake. *Geophys. Res. Lett.* **28**, 3389–3392. (doi:10.1029/2001GL013149)
8. Dutykh D, Dias F. 2010 Influence of sedimentary layering on tsunami generation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **199**, 1268–1275. (doi:10.1016/j.cma.2009.07.011)
9. Synolakis C, Bardet JP, Borrero JC, Davies HL, Okal EA, Silver EA, Sweet S, Tappin DR. 2002 The slump origin of the 1998 Papua New Guinea Tsunami. *Proc. R. Soc. Lond. A* **458**, 763–789. (doi:10.1098/rspa.2001.0915)
10. Okal EA, Synolakis C. 2004 Source discriminants for near-field tsunamis. *Geophys. J. Int.* **158**, 899–912. (doi:10.1111/j.1365-246X.2004.02347.x)
11. Sammarco P, Renzi E. 2008 Landslide tsunamis propagating along a plane beach. *J. Fluid Mech.* **598**, 107–119. (doi:10.1017/S0022112007009731)
12. Geist EL, Titov VV, Arcas D, Pollitz FF, Bilek SL. 2007 Implications of the 26 December 2004 Sumatra-Andaman Earthquake on tsunami forecast and assessment models for great Subduction-Zone Earthquakes. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **97**, S249–S270. (doi:10.1785/0120050619)

13. Synolakis C, Liu P, Carrier G, Yeh H. 1997 Tsunamigenic sea-floor deformations. *Science* **278**, 598–600. (doi:10.1126/science.278.5338.598)
14. Geist EL. 1998 Local tsunamis and earthquake source parameters. *Adv. Geophys.* **39**, 117–209. (doi:10.1016/S0065-2687(08)60276-9)
15. Todorovska MI, Trifunac MD. 2001 Generation of tsunamis by a slowly spreading uplift of the sea floor. *Soil Dyn. Earthquake Eng.* **21**, 151–167. (doi:10.1016/S0267-7261(00)00096-8)
16. Kanamori H. 1972 Mechanism of tsunami earthquakes. *Phys. Earth Planet. Interiors* **6**, 346–359. (doi:10.1016/0031-9201(72)90058-1)
17. Titov VV, Gonzalez FI 1997 Implementation and testing of the method of splitting tsunami (MOST) model. Technical Report NOAA Technical Memorandum ERL PMEL-112, Seattle.
18. UNESCO. 1997 IUGG/IOC Time Project: numerical method of tsunami simulation with the leap-frog scheme. Technical Report IOC Manuals and Guides No. 35, Paris.
19. Ichiye T. 1958 A theory on the generation of tsunamis by an impulse at the sea bottom. *J. Oceanogr. Soc. Jpn* **14**, 41–44.
20. Fuhrman DR, Madsen PA. 2009 Coastal engineering. *Coastal Eng.* **56**, 747–758. (doi:10.1016/j.coastaleng.2009.02.004)
21. Grilli ST, Vogelmann S, Watts P. 2002 Development of a 3D numerical wave tank for modeling tsunami generation by underwater landslides. *Eng. Anal. Boundary Elements* **26**, 301–313. (doi:10.1016/S0955-7997(01)00113-8)
22. Grilli ST, Dias F, Guyenne P, Fochesato C, Enet F. 2010 Progress in fully nonlinear potential flow modeling of 3D extreme ocean waves. *Adv. Numer. Simul. Nonlinear Water Wave (Advances in Coastal and Ocean Engineering)*, Q. Ma, ed **11**, 75–128.
23. Gisler GR. 2008 Tsunami simulations. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **40**, 71–90. (doi:10.1146/annurev.fluid.40.111406.102208)
24. Kakinuma T 2009 Numerical simulation of tsunami generation. *Kôkyûroku* **1645**, 14–21. (<http://hdl.handle.net/2433/140682>)
25. Kervella Y, Dutykh D, Dias F. 2007 Comparison between three-dimensional linear and nonlinear tsunami generation models. *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **21**, 245–269. (doi:10.1007/s00162-007-0047-0)
26. Ma G, Shi F, Kirby JT. 2012 Shock-capturing non-hydrostatic model for fully dispersive surface wave processes. *Ocean Model.* **43–44**, 22–35. (doi:10.1016/j.ocemod.2011.12.002)
27. Grilli ST, Harris JC, Tajalli Bakhsh TS, Masterlark TL, Kyriakopoulos C, Kirby JT, Shi F. 2012 Numerical simulation of the 2011 Tohoku tsunami based on a new transient FEM co-seismic source: comparison to far- and near-field observations. *Pure Appl. Geophys.* **170**, 1333–1359. (doi:10.1007/s00024-012-0528-y)
28. Kajiura K. 1963 The leading wave of a tsunami. *Bull. Earthquake Res. Inst.* **41**, 535–571.
29. Hammack JL. 1973 A note on tsunamis: their generation and propagation in an ocean of uniform depth. *J. Fluid Mech.* **60**, 769–799. (doi:10.1017/S0022112073000479)
30. Dutykh D, Dias F, Kervella Y. 2006 Linear theory of wave generation by a moving bottom. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Serie I-Mathématique* **343**, 499–504. (doi:10.1016/j.crma.2006.09.016)
31. Takahasi R, Hatori T. 1962 A model experiment on the Tsunami generation from a bottom deformation area of elliptic shape. *Bull. Earthquake Res. Inst.* **40**, 873–883.
32. Wiegel RL. 1955 Laboratory studies of gravity waves generated by the movement of a submerged body. *Trans. Am. Geophys. Union* **36**, 759–774. (doi:10.1029/TR036i005p00759)
33. Enet F, Grilli ST. 2007 Experimental study of tsunami generation by three-dimensional rigid underwater landslides. *J. Waterway Port Coastal Ocean Eng.* **133**, 442–454. (doi:10.1061/(ASCE)0733-950X(2007)133:6(442))
34. Fritz HM, Hager WH, Minor HE. 2003 Landslide generated impulse waves. 1. Instantaneous flow fields. *Exp. Fluids* **35**, 505–519. (doi:10.1007/s00348-003-0659-0)
35. Fritz HM, Hager WH, Minor HE. 2003 Landslide generated impulse waves. 2. Hydrodynamic impact craters. *Exp. Fluids* **35**, 520–532. (doi:10.1007/s00348-003-0660-7)
36. Viroulet S, Sauret A, Kimmoun O. 2014 Tsunami generated by a granular collapse down a rough inclined plane. *Europhys. Lett.* **105**, 34004. (doi:10.1209/0295-5075/105/34004)
37. Enet F, Grilli ST, Watts P 2003 Laboratory experiments for tsunamis generated by underwater landslides: Comparison with numerical modeling. In *Proc. Thirteenth (2003) International Offshore and Polar Engineering Conference*, pp. 372–379.
38. Hammack JL 1972 *Tsunamis—a model of their generation and propagation*. PhD thesis, California Institute of Technology—W. M. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, Pasadena, CA, USA.

39. Sanchis A, Jensen A. 2011 Dynamic masking of PIV images using the Radon transform in free surface flows. *Exp. Fluids* **51**, 871–880. (doi:10.1007/s00348-011-1101-7)
40. Westerweel J, Dabiri D, Gharib M. 1997 The effect of a discrete window offset on the accuracy of cross-correlation analysis of digital PIV recordings. *Exp. Fluids* **23**, 20–28. (doi:10.1007/s003480050082)
41. Meinhart CD, Wereley S, Santiago J. 2000 A PIV algorithm for estimating time-averaged velocity fields. *J. Fluids Eng.* **122**, 285–289. (doi:10.1115/1.483256)
42. Gordillo L, Jamin T, Ruiz-Chavarría G, Berhanu M, Falcon E. 2014 Experiments on tsunami waves. figshare. (doi:10.6084/m9.figshare.979238)
43. Tyvand PA, Storhaug ARF. 2000 Green functions for impulsive free-surface flows due to bottom deflections in two-dimensional topographies. *Phys. Fluids* **12**, 2819–2833. (doi:10.1063/1.1290392)
44. Dutykh D, Dias F. 2009 Energy of tsunami waves generated by bottom motion. *Proc. R. Soc. A* **465**, 725–744. (doi:10.1098/rspa.2008.0332)
45. Nosov MA. 1999 Tsunami generation in compressible ocean. *Phys. Chem. Earth Part B* **24**, 437–441. (doi:10.1016/S1464-1909(99)00025-8)
46. Miles JW. 1967 Surface-wave damping in closed basins. *Proc. R. Soc. Lond. A* **297**, 459–475. (doi:10.1098/rspa.1967.0081)
47. Arfken GB, Weber HJ. 2005 *Mathematical methods for physicists*, 6th edn. Oxford, UK: Elsevier Academic Press.
48. Press WH, Teukolsky SA, Vetterling WT, Flannery BP. 2007 *Numerical recipes 3rd edition: the art of scientific computing*, 3rd edn. New York, NY, USA: Cambridge University Press.
49. Fujii Y, Satake K. 2008 Tsunami waveform inversion of the 2007 Bengkulu, southern Sumatra, earthquake. *Earth Planets Space* **60**, 993–998. (doi:10.1186/BF03352856)
50. Fujii Y, Satake K, Sakai S, Shinohara M, Kanazawa T. 2011 Tsunami source of the 2011 off the Pacific coast of Tohoku Earthquake. *Earth Planets Space* **63**, 815–820. (doi:10.5047/eps.2011.06.010)
51. Fujii Y, Satake K. 2007 Tsunami Source of the 2004 Sumatra-Andaman Earthquake Inferred from Tide Gauge and Satellite Data. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **97**, S192–S207. (doi:10.1785/0120050613)
52. Oguri K, Kawamura K, Sakaguchi A, Toyofuku T, Kasaya T, Murayama M, Fujikura K, Glud RN, Kitazato H. 2013 Hadal disturbance in the Japan Trench induced by the 2011 Tohoku–Oki Earthquake. *Sci. Rep.* **3**, 1915.
53. Crowell BW, Bock Y, Melgar D. 2012 Real-time inversion of GPS data for finite fault modeling and rapid hazard assessment. *Geophys. Res. Lett.* **39**, L09305.



# Chapitre 5

## Conclusion et perspectives

Dans cette partie, nous avons étudié la génération d'ondes à la surface d'un fluide par un fond mobile. Nous avons pour cela utilisé un dispositif expérimental de laboratoire constitué d'une cuve d'environ un mètre de côté, remplie d'une hauteur d'eau de quelques centimètres. Le centre de la cuve était alors troué et remplacé par un piston circulaire subissant des impulsions verticales. Nous avons réussi à obtenir des impulsions de formes temporelles et d'amplitudes bien contrôlées grâce à un algorithme que nous avons développé. Des mesures simultanées des déformations de la surface libre et du champ de vitesse ont alors été réalisées pour la première fois. Les résultats expérimentaux obtenus sont résumés dans la section 4.1. Comme dans le cas 1D étudié par Hammack [5], différents régimes sont observés et sont trouvés dépendant du rapport  $\bar{\tau}$  entre le temps caractéristique de déformation du fond  $\tau_b$  et la demi-période de l'onde  $\tau_w$ .

Nos résultats mettent en évidence les rôles de filtre passe-bas spatial et de filtre passe-haut temporel joués par la colonne d'eau située au-dessus de la zone déformée. En effet, dans le cas rapide ( $\bar{\tau} \ll 1$ ), l'amplitude et la forme de l'onde générée ne dépendent pas de  $\tau_b$  mais la forme spatiale atteinte à la fin du mouvement du fond correspond à une version lissée et atténuée de la déformation finale du fond, révélant le filtre passe-bas spatial. Le filtre passe-haut temporel est visible car pour les déformations moins rapides ( $\bar{\tau} \gtrsim 1$ ), l'amplitude de l'onde diminue avec  $\bar{\tau}$ . Dans ce cas, l'évolution de l'onde générée dépend de la forme temporelle du déplacement du fond.

Nous avons par ailleurs montré que la structure du champ de vitesse est spécifique au régime de déformation considéré. Les déformations rapides du fond ( $\bar{\tau} \ll 1$ ) induisent des mouvements d'ensemble de la colonne d'eau au-dessus de la zone déformée et les vitesses à la surface sont verticales. Le fluide devient immobile à la fin de la déformation, avant le début de la propagation de l'onde. Les déformations lentes ( $\bar{\tau} \gg 1$ ) sont associées à des écoulements horizontaux, dirigés vers l'extérieur de la zone déformée. Le régime intermédiaire ( $\bar{\tau} \sim 1$ ) voit quant à lui la coexistence d'un écoulement généré par le fond et d'un écoulement lié à la propagation de l'onde.

L'interaction entre écoulements hydrodynamiques et ondes de surface est ici mise en lumière par le fait que  $\tau_b$  est le temps caractéristique de l'écoulement, induit par le fond, alors que  $\tau_w$  est celui des ondes de surface. Le cas rapide correspond aux composantes hautes fréquences d'un écoulement, et la surface libre est alors synchronisée avec les fluctuations de vitesses sous la surface. La gravité, qui n'a pas le temps d'agir, peut être considérée comme nulle et le caractère ondulatoire de la déformation de la surface libre n'intervient pas avant la phase de propagation. Au contraire, dans le cas lent, la surface libre n'est pas déformée et c'est elle qui impose la structure spatiale du champ de vitesse. Pour les fluctuations de vitesses de l'écoulement à basses fréquences, la gravité peut alors être considérée comme infinie et la surface libre joue le rôle de paroi indéformable : l'énergie cinétique verticale est alors redistribuée horizontalement.

Ces résultats confirment l'importance des caractéristiques spatio-temporelles de la déformation du fond dans le cas des tsunamis. Pour les tsunamis initiés par des déformations du fond de durée non négligeables devant la période de l'onde, il est nécessaire de prendre en compte le fait que l'onde débute sa propagation avant la fin de la déformation. Pour les déformations rapides, nous avons proposé une approche théorique qui s'appuie sur le fait que la gravité peut être considérée comme nulle dans ce cas. Nous avons pu obtenir un système d'équations simplifié qui permet de prédire, avec un coût de calcul faible, la déformation de la surface libre à la fin du mouvement du fond avant l'étape de propagation. Cette approche permet également de s'adapter à des générations en profondeur non uniforme, ce que nous avons validé expérimentalement. Il s'agit d'un point important puisque la profondeur peut varier de façon notable dans les zones de subduction, près desquelles on observe des séismes sous-marins.

L'ensemble de nos résultats expérimentaux présente par ailleurs un bon accord avec la théorie linéaire. Il s'agit là également d'une validation de notre dispositif expérimental, en particulier de sa capacité à produire des déformations rapides, d'amplitude et de vitesse bien contrôlées (voir section 2.2). Les **perspectives** de notre étude concernent les régimes non linéaires en conditions contrôlées, que nous avons commencé à explorer lors d'un stage de Florian Nguyen (étudiant de L3). On a vu dans la section 3.1 que, dans le cas de déformations rapides du fond ( $\bar{\tau} \ll 1$ ), le critère de linéarité retenu par Hammack [5] pour l'aspect génération est que l'amplitude de la déformation du fond  $\zeta_m$  soit petite devant la hauteur d'eau  $h$  ( $\zeta_m \ll h$ ). Nous avons donc sondé des déformations rapides d'amplitude  $\zeta_m \sim h$  pour un déplacement du fond de type sinusoïdal.

Lorsqu'elles sont importantes, les déformations de la surface libre ne peuvent plus être mesurées en détectant la ligne blanche délimitant l'interface sur les images PIV comme on l'a fait dans cette partie (voir section 2.3.2). En effet, le positionnement de la caméra est tel que la surface libre disparaît du champ si la déformation est trop importante car les rayons lumineux qui en sont issus sont obstrués par la surface libre au repos. Pour ce régime non linéaire, de fortes déformations de la surface libre sont combinées à une faible épaisseur d'eau. Nous utilisons donc la technique de mesure de profilométrie par transformée de Fourier, décrite dans la partie III (voir section 13.5.2), qui fournit une mesure spatio-temporelle 2D de la surface libre.

La déformation du fond est générée par un piston circulaire de rayon  $r_1 = 25$  mm. La hauteur d'eau est uniforme et a été choisie assez faible ( $h \leq 10$  mm) pour atteindre des valeurs de  $\zeta_m/h$  suffisantes avec  $\zeta_m \leq 7.5$  mm. Après la fin de la déformation du fond, les mesures montrent alors parfois l'apparition d'une onde centripète dans la région située juste au-dessus de la zone déformée. La déformation de la surface libre reste axisymétrique. On trace donc sur la Fig. 5.1 les profils spatiaux selon la coordonnée radiale pour différents temps de mesure après la fin de la déformation ( $t \geq \tau_b$ ). Pour  $t = \tau_b$ , la déformation de la surface libre est proche de celle prédite par la théorie linéaire, mais pour les temps supérieurs, un bourrelet circulaire apparaît à la périphérie de la zone déformée puis se propage jusqu'au centre du piston.

Ce phénomène peut dans un premier temps s'expliquer par le fait qu'à la fin du mouvement du fond, la profondeur d'eau n'est plus uniforme. Au bord du piston ( $r \approx r_1$ ), la vitesse de phase de l'onde  $c_w \approx \sqrt{gh}$  est donc discontinue, ce qui provoque une réflexion de l'onde similaire à celles observées en optique à l'interface de deux milieux d'indices différents. Ici, le caractère circulaire de la déformation provoque le piégeage et la focalisation d'une onde centripète, comme prédit théoriquement par Stefanakis *et al.* [9] dans une géométrie très proche de la nôtre.

Nous avons vu dans cette partie que, dans le cas rapide linéaire, la déformation de la surface libre à la fin du mouvement du fond est indépendante de  $\tau_b$  et le liquide est immobile. Si on conserve ces hypothèses, on s'attend donc à ce que l'amplitude de l'onde centripète soit également indépendante de  $\tau_b$  si les autres paramètres sont fixés. Or, nous avons pu observer que cette amplitude augmente

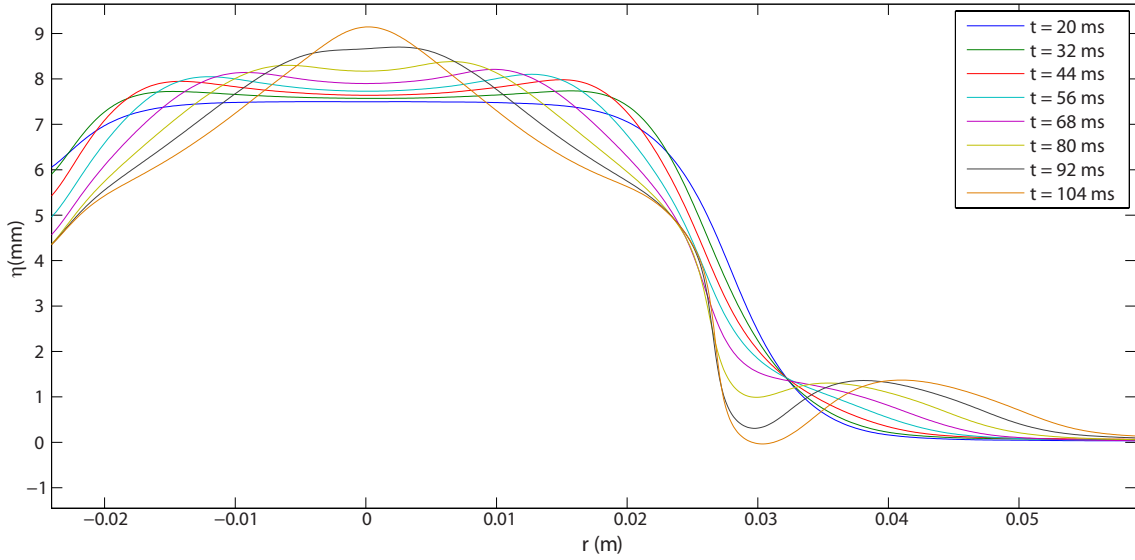


FIGURE 5.1 – Profils spatiaux de la surface libre  $\eta$  selon la coordonnée radiale  $r$  pour des temps successifs après la fin de la déformation. Déplacement de type sinusoïdal.  $\zeta_m = 7.5$  mm,  $h = 5$  mm,  $\tau_b = 20$  ms. Rayon du piston déformant le fond :  $r_1 = 2.5$  cm.

avec la vitesse de déformation du fond. Nous avons réalisé de premières analyses quantitatives à partir de mesures des déformations de la surface libre pour différents  $\tau_b$ ,  $\zeta_m$  et  $h$ . Nous avons pu montrer que l'amplitude de cette onde semble contrôlée par le rapport sans dimension  $\Pi = \zeta_m / (\tau_b \sqrt{gh})$ . La Fig. 5.2 montre l'amplitude maximale adimensionnée de la déformation au centre de la zone déformée en fonction du rapport  $\Pi$ . On voit qu'il n'y a pas d'onde centripète lorsque  $\Pi \lesssim 1$ , alors que le phénomène croît avec  $\Pi$  lorsque  $\Pi \gtrsim 1$ .

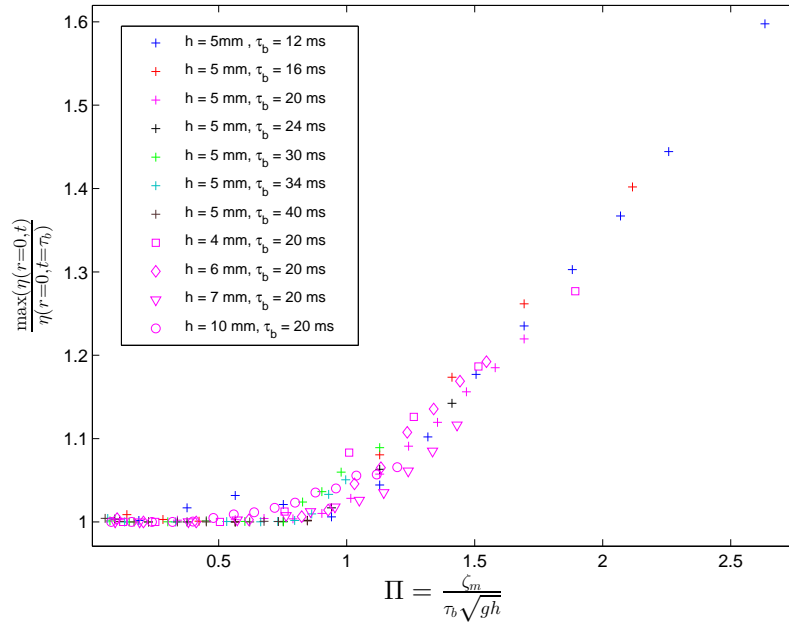


FIGURE 5.2 – Amplitude maximale adimensionnée au centre de la cuve en fonction du nombre sans dimension  $\Pi$ .

On peut noter que  $\Pi$  est similaire à un nombre de Froude  $Fr$  puisqu'il est le rapport entre la vitesse de déformation du fond  $\zeta_m / \tau_b$  et la vitesse de propagation des ondes de gravité en eau



peu profonde  $\sqrt{gh}$ . Dans le cas des ondes, le nombre de Froude peut classiquement quantifier le ratio entre la vitesse d'un écoulement horizontal et la vitesse d'ondes se propageant à sa surface. Ici, la génération et la propagation sont orthogonales et ces deux processus sont *a priori* séparés dans le temps (cas rapide), ce qui rend l'analogie difficile. Mais ces résultats préliminaires mettent en évidence la présence d'effets inertiels. Le phénomène pourrait par exemple être lié à une inertie encore présente dans le liquide à la fin du mouvement du fond ou à un mécanisme proche d'une onde de choc. Il est également possible que, dans le cas de grandes amplitudes  $\zeta_m \sim h$ , la déformation de la surface libre à la fin du mouvement du fond dépende de  $\tau_b$ . Des analyses complémentaires doivent donc être menées ainsi que des mesures du champ de vitesse pour mieux comprendre l'origine du phénomène observé.



## Deuxième partie

# Oscillations d'une goutte de fluide magnétique



# Chapitre 6

## Introduction

### 6.1 Contexte

Négligées dans la partie précédente, les forces de tension de surface sont très importantes dans le cas d'un petit volume de liquide tel qu'une goutte. Ces forces tendent à minimiser la surface du liquide en contact avec l'air. Ainsi, lorsque la gravité est négligeable (*i.e.* goutte d'eau de diamètre  $D \lesssim 1$  mm), ce sont elles qui imposent la forme sphérique du liquide. L'énergie capillaire, proportionnelle à la surface, est alors minimale. Pour des gouttes de plus grande taille, la gravité intervient et aplatit la goutte. A partir d'une certaine taille ( $D \gtrsim 10$  mm), la goutte est de forme quasi-cylindrique.

Quand une goutte de liquide est excitée par une force extérieure, sa surface libre fait apparaître des motifs oscillants pour certaines fréquences de résonance. Par exemple, dans le cas d'une goutte sphérique, les perturbations induisent une augmentation de la surface libre et les forces de tension de surface tendent alors à ramener la goutte à sa forme d'équilibre minimisant la surface. Des oscillations résultent alors d'un échange entre énergie capillaire à la surface et énergie cinétique de l'écoulement en volume.

Des comportements de goutte oscillante apparaissent dans différents domaines et à différentes échelles. Ainsi, la dynamique oscillante d'une goutte liquide est utilisée pour modéliser des collisions de masses stellaires ou les oscillations d'étoiles à neutrons en astrophysique [28], et les noyaux dans la fission nucléaire [29, 30], ou en biologie cellulaire [31]. Ces gouttes sont également impliquées en métrologie pour mesurer des viscosités [32] ou la tension de surface de matériaux fondus [33, 34]. A un niveau plus pratique, la physique de la déformation de gouttes liquides intervient dans l'impression (génération de gouttes d'encre), le mélange de nuages de gouttes, la manipulation de gouttes en microfluidique, optofluidique, et dans l'industrie pharmaceutique [35]. Depuis les travaux pionniers de Rayleigh [36], les fréquences de résonance des modes azimutaux à la périphérie d'une goutte aplatie (voir Figs 6.1 et 6.2.a) ont été étudiées expérimentalement par différents modes de forçage : goutte d'eau sur une plaque vibrée [37–40] ou sur un bain vibrant [41], en microgravité [42], par lévitation acoustique ou sur coussin d'air [43, 44], ou encore sur sa propre vapeur (Leidenfrost) [45–47]. L'excitation d'une goutte de métal liquide par les forces de Lorentz a également été étudiée [48, 49].

Un nouveau défi consiste à contrôler et ajuster les oscillations d'une goutte de liquide de façon non intrusive. Il serait par exemple intéressant de pouvoir décaler les fréquences propres pour éviter certaines bandes de fréquences dans certaines situations pratiques. Les ferrofluides, constitués d'une suspension stable de nanoparticules magnétiques, sont des liquides sensibles au champ magnétique. Ils sont connus pour décaler les fréquences propres ou les seuils d'instabilités hydrodynamiques

usuelles comme Kelvin-Helmholtz, Rayleigh-Taylor ou Rayleigh-Plateau [50, 51]. La manipulation de gouttes de ferrofluides au moyen d'un aimant est par ailleurs largement utilisée en microfluidique ou pour les technologies de laboratoires sur puce [52–54], et dans des dynamiques d'auto-assemblage [55]. Il est à noter que cette partie s'inscrit ainsi dans la continuité de mon stage de Master 2 durant lequel nous avons étudié l'instabilité d'un origami capillaire constitué d'une goutte de ferrofluide dans un champ magnétique [56].

## 6.2 Plan de la partie

Nous nous intéressons dans cette partie aux oscillations d'une goutte aplatie de ferrofluide, déposée sur un substrat superhydrophobe (et donc libre de ses mouvements latéraux), soumis à une vibration verticale en l'absence et en présence d'un champ magnétique. Deux types d'oscillations sont alors observées. Les premières sont des modes azimutaux, qui se caractérisent par la présence de lobes oscillants à la périphérie de la goutte (voir Figs 6.1 et 6.2.a). Ces lobes apparaissent au-delà d'un certain seuil d'accélération du vibreur et oscillent à la fréquence moitié de la fréquence de forçage. Ils sont liés à une résonance paramétrique non linéaire (voir section 6.3.2). En-dessous du seuil d'apparition des modes azimutaux, la goutte présente le deuxième type d'oscillations : des modes axisymétriques qui sont liés à la présence d'ondes circulaires à la surface supérieure de la goutte (voir Fig. 6.2.b). Cette résonance est linéaire et sans seuil.

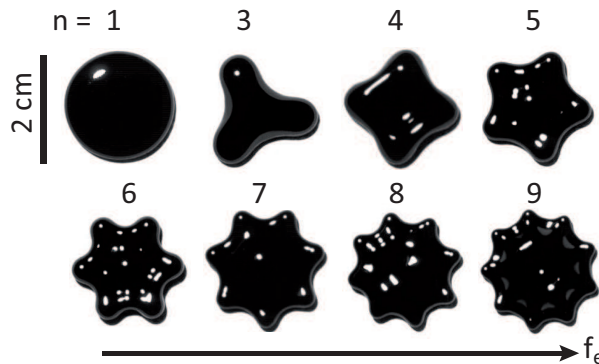


FIGURE 6.1 – Photos de modes azimutaux vus de dessus à la périphérie d'une goutte de ferrofluide aplatie lorsque la fréquence d'excitation augmente.  $n$  est le numéro du mode.  $B = 0$ .

Le présent chapitre expose des rappels sur les modes azimutaux et axisymétriques ainsi que sur les ferrofluides. Le dispositif expérimental général utilisé dans cette partie est présenté au chapitre 7. Le chapitre 8 présente les résultats obtenus pour les modes azimutaux. Nous observons alors que les fréquences propres des modes azimutaux dépendent de l'intensité du champ magnétique  $B$ . Nous montrons expérimentalement et théoriquement que le champ nous permet de contrôler la tension de surface effective de la goutte de ferrofluide. En effet, la contribution magnétique est équivalente à celle d'une tension de surface négative.

Le chapitre 9 étudie les modes axisymétriques de la goutte qui se manifestent par des fluctuations du rayon. Ces modes peuvent être décrits par des ondes circulaires à la surface de la goutte dont les modes propres correspondent aux solutions stationnaires fixées par la géométrie de la goutte. Les fréquences propres observées à champ nul sont ainsi très bien prédites par la relation de dispersion des ondes gravito-capillaires. En présence de champ, l'ajout du terme magnétique dans la relation de dispersion permet de prédire la dépendance en champ magnétique des fréquences propres des différents modes avec un paramètre ajustable.

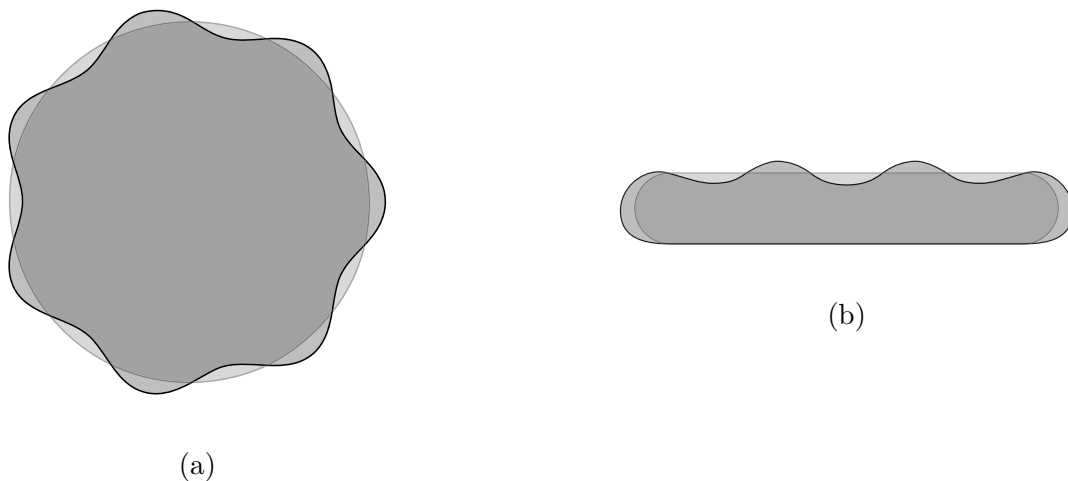


FIGURE 6.2 – (a) Vue de dessus d'un mode **azimutal** ( $n = 7$ ) à la périphérie d'une goutte aplatie. (b) Vue de côté d'un mode **axisymétrique** ( $m = 3$ ) à la surface de la goutte. Vue en coupe verticale passant par le centre.

Enfin, le chapitre 10 reproduit les résultats du chapitre 8 en présence d'une plaque sur la surface supérieure de la goutte. Cela permet d'éliminer les modes axisymétriques en supprimant les ondes à la surface de la goutte et ainsi de vérifier que le couplage entre modes azimutaux et modes axisymétriques n'intervient pas dans le décalage des fréquences propres des modes azimutaux avec le champ magnétique.

*Les séries de mesure de cette partie ont été réalisées par Yacine Djama (étudiant de L3) puis Claude Laroche. Les analyses ont été discutées avec Jean-Claude Bacri.*

## 6.3 Modes azimutaux à la périphérie d'une goutte aplatie : rappels

### 6.3.1 Fréquences de résonance théoriques

Les modes azimutaux sont caractérisés par l'apparition de lobes oscillants à la périphérie de la goutte aplatie, de forme cylindrique (voir Fig. 6.2.a). La présence de ces lobes augmente la surface périphérique de la goutte et donc l'énergie capillaire. L'oscillation correspond alors à une compétition entre l'inertie des lobes, caractérisée par l'énergie cinétique, et les forces de tension de surface, tendant à ramener la goutte à sa forme cylindrique d'équilibre, à la manière d'un ressort.

Le calcul des fréquences propres des modes azimutaux consiste alors à écrire la conservation de l'énergie de la goutte aplatie  $d(E_k + E_c)/dt = 0$ , où  $E_k$  est l'énergie cinétique et  $E_c$  est l'énergie capillaire. Ce calcul, proche de celui réalisé par Rayleigh [36] dans le cas d'une colonne de fluide, est décrit en détail dans l'annexe A. Nous introduisons ici seulement les éléments nécessaires à la bonne compréhension de la physique du phénomène.

Considérons une goutte cylindrique de hauteur  $h$  et de rayon  $R$  (voir Fig. 6.3.a). On note  $S_{\perp}$  la surface perpendiculaire à la gravité, constituée du dessus et du dessous de la goutte, et  $S_{\parallel}$  la surface périphérique de la goutte. Les lobes sont décrits par de petites déformations radiales de la périphérie de la goutte, d'amplitude  $a_n(t) \ll R$  autour d'un rayon instantané moyen  $\bar{R}(t)$ . En coordonnées polaires, le rayon s'écrit :  $r(\theta, t) = \bar{R}(t) + a_n(t) \cos(n\theta)$  avec  $n$  le nombre de lobes (voir Fig. 6.3.b).

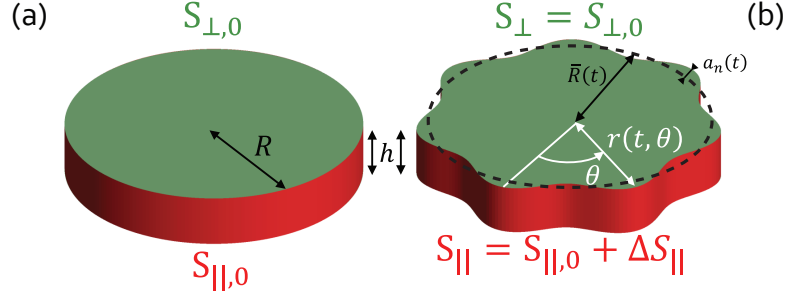


FIGURE 6.3 – Vue schématique de la goutte aplatie. (a) Au repos, la goutte est assimilée à un cylindre. (b) En présence de lobes, la surface périphérique augmente.

On peut montrer qu'en présence de lobes,  $S_{\perp}$  reste constante alors que la surface périphérique  $S_{\parallel}$  augmente de la quantité :

$$\Delta S_{\parallel}(t) \equiv S_{\parallel}(t) - S_{\parallel,0} = \frac{\pi h a_n^2(t)(n^2 - 1)}{2R} \quad (6.1)$$

L'indice "0" désigne le cas au repos. La variation d'énergie capillaire vaut donc :

$$\Delta E_c(t) = \gamma \Delta S_{\parallel}(t) = \frac{\gamma \pi h a_n^2(t)(n^2 - 1)}{2R} \quad (6.2)$$

Il s'agit d'un accroissement de l'énergie ( $\Delta E_c > 0$ ) car la surface augmente en s'éloignant de la forme cylindrique. On peut montrer par ailleurs que l'énergie cinétique s'écrit :

$$E_k(t) = \frac{\pi \rho h R^2}{2n} \left( \frac{da_n}{dt} \right)^2 \quad (6.3)$$

La conservation de l'énergie, qui s'écrit  $d(E_k + E_c)/dt = 0$ , permet d'obtenir l'équation régissant l'amplitude des lobes, initialement obtenue par Rayleigh [36] :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_n}{dt^2} + \omega_n^2 a_n(t) &= 0, \\ \text{avec } \omega_n^2 &= \frac{\gamma}{\rho R^3} n(n^2 - 1) \end{aligned} \quad (6.4)$$

A noter que cette fréquence peut aussi se déduire en partie de l'analyse dimensionnelle [ $\omega_n^2 \sim \gamma/(\rho R^3)$ ], mais ceci ne permet pas de connaître la dépendance en  $n$ . L'amplitude des lobes est donc de la forme  $a_n(t) = A_n \cos \omega_n t$  et  $f_n = \omega_n/(2\pi)$  est la fréquence propre du mode azimutal constitué de  $n$  lobes. Un moyen de faire apparaître ces lobes est l'instabilité paramétrique, via une excitation verticale.

### 6.3.2 Instabilité paramétrique

Une excitation paramétrique des modes azimutaux consiste à moduler leurs fréquences propres dans le temps, provoquant ainsi une résonance non linéaire. D'après l'Eq. (6.4), la modulation des

fréquences propres est possible en faisant varier le rayon de la goutte, par exemple par une excitation verticale. Considérons que le rayon modulé s'écrit  $\bar{R}(t) = R(1 + \varepsilon \cos \omega_e t)$ , avec  $\varepsilon$  l'amplitude adimensionnée de l'oscillation du rayon et  $\omega_e = 2\pi f_e$  la pulsation d'excitation. Pour de petites amplitudes ( $\varepsilon \ll 1$ ), l'équation paramétrique gouvernant l'amplitude des lobes s'écrit alors :

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \omega_n^2 (1 - 3\varepsilon \cos \omega_e t) a_n(t) = 0 \quad (6.5)$$

L'Eq. (6.5) est une équation de Mathieu [57], dont les solutions peuvent être représentées sous forme de “langues” d'instabilité, dans un diagramme de phase en fonction de l'amplitude  $3\varepsilon$  des oscillations de la fréquence propre et du rapport au carré de la fréquence propre et de la fréquence d'excitation,  $f_n^2/f_e^2$ . Ainsi, sur la Fig. 6.4, les courbes représentent l'amplitude seuil  $3\varepsilon_c$  au-delà de laquelle on observe le mode azimutal en fonction de la fréquence d'excitation. Ces courbes, dites de marginalité, séparent les zones de stabilité (goutte cylindrique) des zones d'instabilités (mode azimutal) pour différents coefficients de viscosité ( $\kappa$ ).

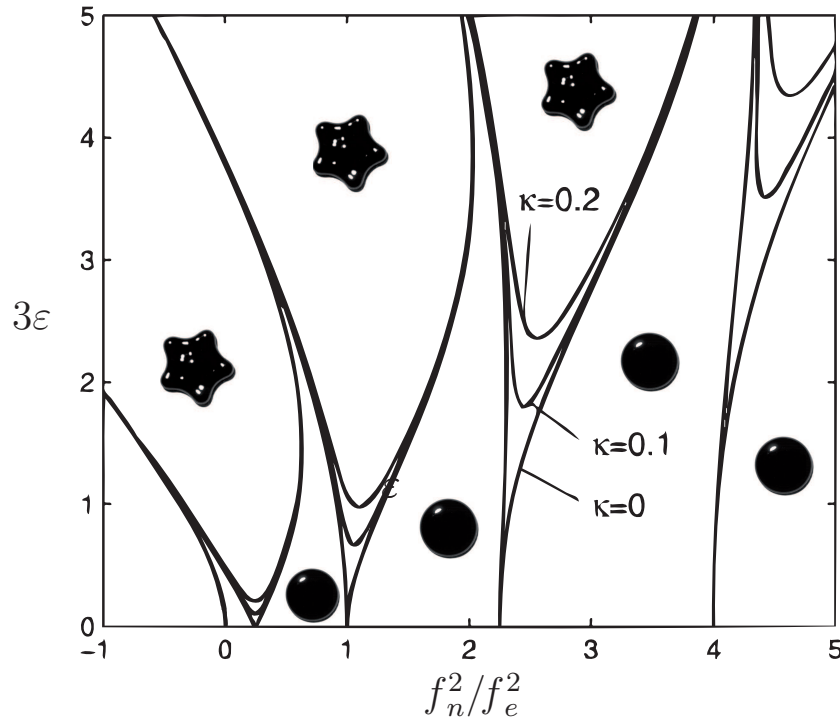


FIGURE 6.4 – Diagramme de phase de l'instabilité paramétrique en fonction de l'amplitude  $3\varepsilon$  des oscillations de la fréquence propre et du rapport au carré de la fréquence propre et de la fréquence d'excitation,  $f_n^2/f_e^2$ .  $\kappa$  représente un coefficient de viscosité. Image adaptée de [58].

La langue la plus à gauche (plus haute fréquence d'excitation) correspond au mode fondamental. On observe que le seuil d'apparition de l'instabilité est minimal (et non nul en présence de viscosité) lorsque  $f_n^2/f_e^2 = 1/4$ , soit  $f_e = 2f_n$ . Les lobes à la périphérie de la goutte oscillent alors à la fréquence moitié du forçage. Dans les chapitres 8 et 10, nous déterminons les fréquences propres des modes azimutaux en évaluant ces minima de façon indirecte.

En effet, le paramètre d'excitation intervenant dans l'Eq. (6.5) est l'amplitude d'oscillation du rayon,  $\varepsilon$ , différent du paramètre de contrôle de l'expérience, qui est l'accélération verticale du vibreur. Il est alors généralement considéré que ces deux paramètres ont des rôles équivalents [37, 40]. C'est l'hypothèse faite dans le chapitre 8. Toutefois, les observations dans le chapitre 9 remettent en cause cette hypothèse car les oscillations du rayon présentent des résonances à certaines fréquences. Dans

le chapitre 10, une plaque fixe dans le référentiel du laboratoire et située au-dessus de la goutte permet alors de supprimer ces résonances et de relier directement les oscillations du rayon de la goutte à l'amplitude d'oscillation verticale du vibreur.

## 6.4 Modes axisymétriques d'une goutte : rappels

L'instabilité paramétrique décrite précédemment est une résonance non linéaire. En présence de viscosité, les modes azimutaux apparaissent au-delà d'un certain seuil d'excitation verticale. Dans le chapitre 9, nous étudions les modes axisymétriques de la goutte présentés sur la Fig. 6.2.b. Ces modes sont au contraire issus d'une résonance linéaire sans seuil et sont observables pour les amplitudes d'excitation inférieures au seuil d'apparition des modes azimutaux. Le calcul exact des fréquences propres des modes axisymétriques a été réalisé par le passé dans le cas d'une goutte sphérique sans gravité [59] et un modèle les prédit de façon précise pour des gouttes sessiles (*i.e.* présentant une ligne de contact à la périphérie) uniquement pour des angles de contact  $\theta_c$  autour de  $90^\circ$  [60]. Toutefois, notre goutte est ici aplatie et placée sur une surface superhydrophobe ( $\theta_c \approx 165^\circ$ , voir section 7.2).

### 6.4.1 Ondes gravito-capillaires

Même si notre goutte n'est pas sessile, notre cas est proche de celui des gouttes sessiles aplaties que Noblin *et al.* [39, 61] ont étudiées. On peut comme eux interpréter les modes axisymétriques par la présence d'ondes stationnaires à la surface de la goutte, excitées par la vibration du substrat. On rappelle que la relation de dispersion pour des ondes de surface gravito-capillaires de pulsation  $\omega = 2\pi f$  (avec  $f$  la fréquence) et de nombre d'onde  $k = 2\pi/\lambda$  (avec  $\lambda$  la longueur d'onde) dans un fluide de profondeur finie  $h$  s'écrit [62] :

$$\omega^2 = \left( gk + \frac{\gamma k^3}{\rho} \right) \tanh kh \quad (6.6)$$

Si les ondes à la surface de la goutte respectent l'Eq. (6.6), les résonances observées pour les fréquences propres des modes axisymétriques correspondent à des ondes stationnaires de longueurs d'onde fixées par la géométrie du système. Noblin *et al.* [39, 61] interprètent les modes axisymétriques par une analogie avec les modes propres d'ondes de surface 1D pour deux types de conditions aux limites. Pour une faible amplitude de vibration du substrat, les auteurs observent que la ligne de contact entre la goutte et le substrat reste fixe. Elle est alors considérée comme un nœud pour les ondes à la surface de la goutte (voir Fig. 6.5.a).

Les longueurs d'ondes des modes propres sont alors décrites par l'équation :  $(j - 1/2)\lambda_j = 2p$ , où  $j = 2, 3, 4, \dots$  et  $2p$  est la longueur de l'interface liquide/air le long d'un plan vertical passant par le centre la goutte (voir Fig. 6.5.b). Pour de grandes amplitudes de vibration du substrat, la ligne de contact avec entre la goutte et le substrat devient mobile dans l'étude de Noblin *et al.* (voir Fig. 6.5.c). Cette fois, la ligne de contact correspond à un ventre pour les ondes à la surface de la goutte. La condition aux limites s'écrit alors :  $i\lambda_i = 2p$  où  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Dans les deux cas, l'Eq. (6.6) permet de prédire les fréquences propres des modes axisymétriques, correspondant aux longueurs d'ondes fixées par la géométrie du système. Noblin *et al.* trouvent alors un bon accord général entre les fréquences propres ainsi prédites et les fréquences propres mesurées expérimentalement [39, 61].



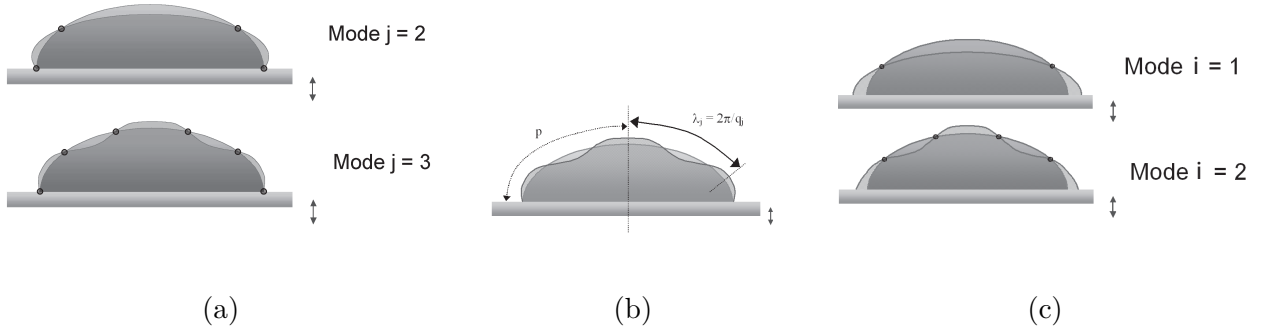


FIGURE 6.5 – Schéma des modes axisymétriques à la surface d’une goutte sessile aplatie dans les modèles de Noblin *et al.* [39, 61]. *Source des images* : [63].

### 6.4.2 Ondes en géométrie cylindrique

Toutefois, l’analogie avec des ondes de surface 1D faite par Noblin *et al.* [39, 61] est limitée car la géométrie de la goutte est cylindrique. Les nombres d’onde des modes propres en géométrie cylindrique sont en effet différents du cas 1D. Soit un bassin de géométrie cylindrique, centré en  $r = 0$  dans un repère en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . Dans le régime linéaire d’ondes harmoniques, la déformation verticale de la surface libre,  $\eta$ , pour des ondes circulaires symétriques s’écrit sous la forme de fonctions de Bessel de première espèce et d’ordre zéro,  $J_0$  [62] :

$$\eta(r, t) = \eta_0 J_0(kr) \cos \omega t \quad (6.7)$$

avec  $\eta_0$  une constante réelle. La première condition utilisée par Noblin *et al.* adaptée au cas cylindrique s’écrit donc :  $J_0(k_j p) = 0$ , soit  $k_j p = 5.52, 8.65, 11.79, 14.93, 18.07...$  Pour le deuxième cas, lorsque la ligne de contact est mobile, les ventres des ondes se trouvent à la périphérie de la goutte. Cette condition s’écrit :

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial r} \right|_{r=p} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad J_1(k_i p) = 0 \quad (6.8)$$

Les nombres d’ondes des modes axisymétriques sont donc ici définis par les racines de la fonction de Bessel d’ordre 1,  $J_1 : k_i p = 3.83, 7.02, 10.17, 13.32, 16.47...$

Les fréquences propres correspondant à ces nombres d’onde déterminés par les conditions aux limites peuvent à nouveau être calculés avec l’Eq. (6.6). Il est à noter que le passage du cas 1D au cas cylindrique améliore sensiblement la prédiction des fréquences propres dans notre expérience.

## 6.5 Ferrofluides : rappels

Les gouttes utilisées dans cette partie sont constituées de ferrofluide. En présence d’un champ magnétique statique, l’énergie d’un tel liquide dépend de la forme de la goutte et de la valeur du champ magnétique. Ceci introduit alors des forces supplémentaires complexes d’intensité contrôlable, qui vont jouer un rôle dans les oscillations des gouttes puisque celles-ci modifient la forme de la goutte. Nous présentons donc dans cette partie quelques propriétés des ferrofluides afin de mieux comprendre l’influence du champ magnétique.

La sensibilité d'un matériau ferromagnétique au champ magnétique se caractérise par sa susceptibilité magnétique  $\chi$ , qui traduit sa capacité d'aimantation lorsqu'un champ magnétique  $B$  est appliqué. Pour tous les matériaux ferromagnétiques connus, la température de Curie, qui correspond à la transition entre l'état ferromagnétique ( $\chi \gg 1$ ) et l'état paramagnétique ( $0 < \chi \ll 1$ ), est inférieure à la température de fusion [50]. Les liquides homogènes issus de la fusion des solides ferromagnétiques sont alors peu sensibles au champ magnétique. Une solution consiste à utiliser des ferrofluides, composés d'une dispersion colloïdale de fines particules magnétiques dans un liquide suspensant. Ces liquides présentent une susceptibilité magnétique intermédiaire ( $\chi \sim 1$ ) et leur forme est alors très sensible au champ magnétique.

### 6.5.1 Stabilité des ferrofluides

Les ferrofluides utilisés pour cette expérience sont constitués de nanoparticules ferromagnétiques dispersées dans l'eau. L'homogénéité et la conservation des propriétés d'un ferrofluide dans le temps est indispensable à la reproductibilité expérimentale. La thèse de Julien Browaeys [64] compare l'agitation thermique aux différents processus physiques susceptibles de provoquer l'agrégation ou la sédimentation des particules magnétiques. Il montre que le faible diamètre et le traitement chimique apporté aux particules magnétiques permettent d'éviter de tels phénomènes. La solution stable obtenue présente un comportement de liquide magnétique dont nous allons décrire les propriétés ci-dessous.

### 6.5.2 Propriétés magnétiques

Chaque particule colloïdale du ferrofluide porte un moment magnétique  $\mathbf{m}$ . L'augmentation de l'aimantation du ferrofluide avec le champ appliqué est le résultat de la compétition entre l'énergie magnétique, qui tend à aligner ces moments avec le champ, et l'agitation thermique, qui, à champ nul, les oriente aléatoirement. Les conditions à la surface des ferrofluides peuvent être modifiées par déformation. En effet, la particularité d'un ferrofluide par rapport à un matériau ferromagnétique solide est sa capacité à se déformer sous l'action d'un champ magnétique. La forme est alors le résultat d'une compétition entre l'énergie magnétique et d'autres énergies comme l'énergie capillaire ou l'énergie gravitationnelle.

Cette particularité donne lieu à des phénomènes intéressants, comme l'instabilité de Rosensweig [50] qui fait apparaître un réseau de pics à la surface du ferrofluide au-delà d'un certain champ magnétique (voir Fig. 6.6). La distance entre les pics et le champ magnétique seuil de leur apparition sont déterminés par la compétition entre énergie magnétique et énergie capillaire.

### 6.5.3 Energie magnétique et forme du ferrofluide

Les oscillations étudiées dans cette partie modifient la forme des gouttes de ferrofluide, modifiant alors son énergie magnétique en présence d'un champ. Nous présentons donc dans cette section les principes physiques qui permettent de déterminer l'énergie magnétique d'un volume de ferrofluide en fonction de sa forme. Par souci de simplicité, on suppose ici que le champ magnétique est suffisamment faible pour que sa susceptibilité magnétique  $\chi$  soit indépendante de  $B$  (*i.e.*  $\chi(B) \approx \chi(B = 0) = \chi$ ), comme c'est le cas pour les valeurs de  $B$  utilisées dans nos expériences.

L'énergie magnétique d'un système magnétique s'écrit alors [50] :

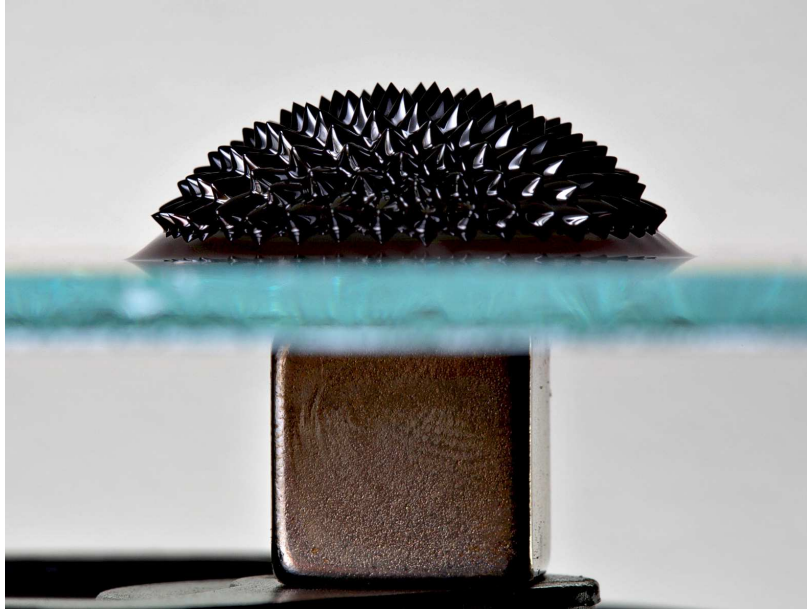


FIGURE 6.6 – Un aimant placé sous du ferrofluide provoque l'instabilité de Rosensweig. *Source* : Gregory F. Maxwell (wikipedia.org).

$$E_m = -\frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \int_V \mathbf{M} dV \quad (6.9)$$

avec  $\mathbf{B}$  le champ magnétique extérieur appliqué,  $V$  le volume du système et  $\mathbf{M}$  l'aimantation. Dans le cas d'une interface plane entre le milieu extérieur et le milieu magnétique, l'aimantation est uniforme. De même, si le système initial observé est une goutte sphérique et que la gravité n'intervient pas, la forme obtenue après déformation dans la direction du champ est très proche d'une ellipsoïde tant que l'élongation n'est pas trop forte [65]. Dans ce cas, l'aimantation est également uniforme [66].  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{M}$  étant colinéaires, on a alors :

$$E_m = -\frac{1}{2}VM B \quad (6.10)$$

$M$  est déterminé par les conditions aux limites entre le milieu extérieur et le milieu magnétique. Considérons une interface plane d'étendue infinie et introduisons le champ magnétique auxiliaire  $\mathbf{H}$ , tel que  $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$ . Le champ magnétique s'écrit alors [50] :

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} \quad (6.11)$$

où  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  est la perméabilité magnétique du vide. Dans le milieu extérieur, on a donc  $\mathbf{H}_{ext} \equiv \mathbf{B}/\mu_0$ . En l'absence de courants surfaciques, les conditions aux limites entre le milieu extérieur et le milieu magnétique s'écrivent :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

Si le champ magnétique est parallèle à l'interface, il y a donc continuité de  $\mathbf{H}$ . Dans le cas d'un film magnétique d'étendue infinie, on a donc  $M = \chi H_{ext} = \chi B/\mu_0$  (voir Fig.6.7.a). Si le champ

magnétique est normal à l'interface, il y a continuité de  $\mathbf{B}$ , d'où  $H_{ext} = (1 + \chi)H$ . On a donc  $M = \chi B / [\mu_0(1 + \chi)]$  (voir Fig. 6.7.b).

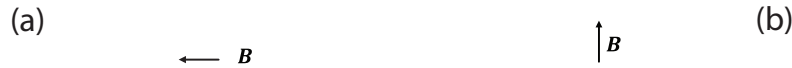


FIGURE 6.7 – Aimantation à l'intérieur d'un film magnétique d'étendue infinie parallèle (a) ou normale (b) à  $B$ .

D'une façon plus générale, lorsque l'aimantation est uniforme, le champ  $H$  local à l'intérieur du milieu magnétique peut aussi s'écrire comme le champ extérieur  $H_{ext}$  diminué d'un champ démagnétisant  $H_D$  produit par le milieu magnétique et s'opposant à  $H_{ext}$  [67] :

$$H = H_{ext} - H_D \quad \text{avec} \quad H_D \equiv DM \quad (6.13)$$

Le coefficient  $D$  est appelé facteur de démagnétisation, dépendant de la forme du matériau ferromagnétique. Il est d'autant plus faible que celui-ci est allongé dans la direction du champ. En utilisant les Eqs (6.13) et (6.11), on obtient alors :

$$M = \frac{\chi B}{\mu_0(1 + \chi D)} \quad (6.14)$$

Et d'après l'Eq. (6.10), on a alors [50] :

$$E_m = -\frac{V\chi B^2}{2\mu_0(1 + \chi D)}. \quad (6.15)$$

Dans le cas d'un plan, on a vu que  $D = 0$  si  $B$  est parallèle à l'interface (Fig. 6.7.a) et  $D = 1$  si  $B$  est normal à l'interface (Fig. 6.7.b) [50]. Dans le cas d'une goutte de forme ellipsoïdale, l'aimantation est uniforme dans le milieu magnétique.  $D$  est alors d'autant plus petit que la goutte est allongée selon l'axe du champ magnétique (voir Fig. 6.8), puisqu'on a une augmentation de la surface alignée avec  $B$ , pour laquelle  $D = 0$ . Une goutte de ferrofluide aura donc tendance à s'allonger selon l'axe du champ magnétique pour minimiser son énergie magnétique.

On peut ainsi calculer la déformation d'une goutte de ferrofluide en l'absence de gravité et en présence d'un champ magnétique. Ce calcul, basé sur la compétition entre énergie capillaire et énergie magnétique, est présenté dans l'annexe B. Il est à noter que les ellipsoïdes (y compris leurs formes extrêmes comme les plans) sont les seules formes pour lesquelles l'aimantation est uniforme à l'intérieur du milieu magnétique.

#### 6.5.4 Ondes à la surface d'un ferrofluide

Les oscillations de la goutte aplatie étudiées dans cette partie s'apparentent à des ondes de surface. Or, les ondes à la surface d'un liquide modifient également les conditions à l'interface entre le milieu extérieur et le milieu magnétique. L'effet du champ magnétique sur les ondes gravito-capillaires à la

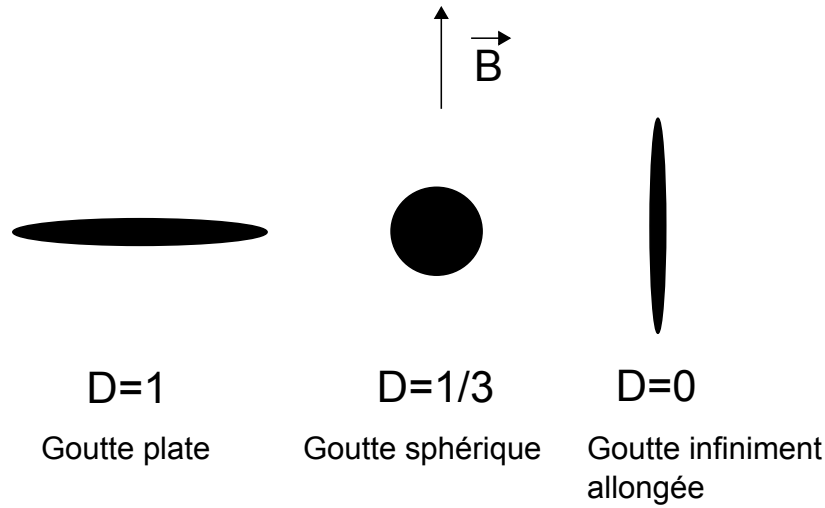


FIGURE 6.8 – Valeur du facteur de démagnétisation  $D$  pour différentes formes de gouttes de ferrofluide, décrites par rapport à la direction du champ magnétique  $B$  [50].

surface d'un ferrofluide a été étudié expérimentalement pour un champ parallèle ou perpendiculaire à la surface ou à la direction de propagation des ondes [50, 68–71]. La relation de dispersion théorique pour des ondes de surface gravito-capillaires linéaires à la surface d'un ferrofluide de profondeur et d'étendue infinies en présence d'un champ magnétique s'écrit [50, 72] :

$$\omega^2 = gk + \frac{\gamma k^3}{\rho} + \alpha \frac{f(\chi) B^2 k^2}{\rho \mu_0} \quad (6.16)$$

où  $f(\chi) > 0$  est une fonction de la susceptibilité magnétique,  $\omega = 2\pi f$  la pulsation et  $k = 2\pi/\lambda$  le nombre d'onde. Les deux premiers termes de l'Eq. (6.16) sont respectivement d'origines gravitationnelle et capillaire. Le dernier terme est lié au couplage entre le champ magnétique et les ondes de surface.  $\alpha$  prend différentes valeurs (0, +1 ou -1) selon la direction du champ magnétique par rapport à la surface libre et par rapport à la direction de propagation des ondes  $\mathbf{k}$ .

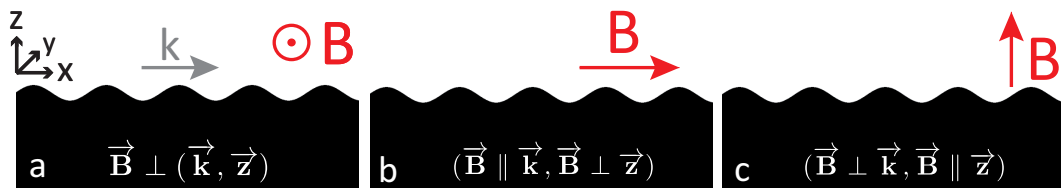


FIGURE 6.9 – Couplage entre le champ magnétique  $B$  et les ondes à la surface d'un ferrofluide. (a)  $B$  est parallèle à la surface au repos et normal à la direction de propagation : pas de couplage ( $\alpha = 0$ ) ; (b)  $B$  est parallèle à la surface et à la direction des ondes : augmentation de leurs fréquences ( $\alpha = +1$ ) ; (c)  $B$  est normal à la surface et à la direction des ondes : diminution de leurs fréquences ( $\alpha = -1$ ).

Si  $B$  est parallèle à la surface au repos et normal à la direction de propagation des vagues (Fig. 6.9.a), l'ensemble de la surface reste parallèle à  $B$  avec ou sans les ondes de surface. Il n'y a pas de couplage ( $\alpha = 0$ ) car  $B$  ne traverse jamais l'interface et il n'y a donc pas de modification de l'énergie magnétique lorsque la surface se déforme [50].

Si  $B$  est à la fois parallèle à la surface au repos et à la direction de propagation des vagues (Fig. 6.9.b), ce n'est plus le cas. Un couplage apparaît alors et  $\alpha = +1$ , car  $B$  est modifié en raison de la condition de continuité de  $B$  de l'Eq (6.12) [50].

Enfin, quand  $B$  est normal à surface au repos (Fig. 6.9c), il y a également couplage mais  $\alpha = -1$ , provenant de la même condition aux limites de  $B$  à l'interface ayant pour effet de concentrer les lignes de champ aux niveaux des pics de déformation de la surface [50].

# Chapitre 7

## Dispositif expérimental

Nous décrivons dans ce chapitre le dispositif expérimental utilisé pour l'étude des oscillations d'une goutte de ferrofluide aplatie soumise à une vibration verticale. Nous présentons également les caractéristiques du substrat superhydrophobe et des ferrofluides utilisés.

### 7.1 Description du montage

La Fig. 7.1.a présente le schéma général du montage utilisé dans cette partie. Une goutte de liquide (eau ou ferrofluide à base d'eau) de tension de surface  $\gamma$  est déposée sur une plaque de cuivre cylindrique de diamètre 80 mm, recouverte d'un substrat superhydrophobe (voir section 7.2). Les forces s'opposant aux mouvements latéraux de la goutte sont alors très faibles. La goutte doit donc être piégée pour ne pas glisser et sortir de la plaque lors de la réalisation des expériences. Pour cela, la plaque a été usinée de façon conique avec une profondeur au centre de 1 mm, ce qui correspond à une pente de  $1.4^\circ$  avec l'horizontale (voir Fig. 7.1.b).

La goutte est de volume  $V$  choisi suffisamment grand pour qu'elle soit aplatie par la gravité et adopte la forme d'une flaque cylindrique de hauteur  $h$  et de rayon  $R$  (voir encart de la Fig. 7.1.a).

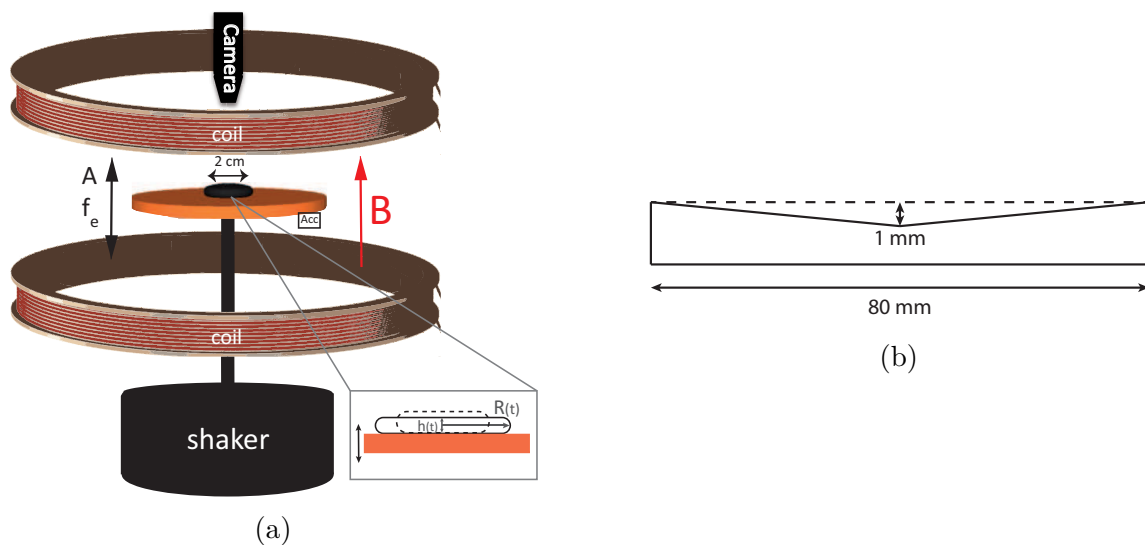


FIGURE 7.1 – (a) Schéma général du dispositif expérimental. (b) Vue en coupe de la forme conique du substrat afin de piéger la goutte. L'échelle n'est pas respectée pour faciliter la compréhension.

Le substrat est relié à un vibreur électromagnétique Brüel & Kjær Type 4809, dont l'accélération

est mesurée par un accéléromètre Brüel & Kjær miniature 4393 fixé sous le substrat.

Le champ magnétique est produit par deux bobines identiques horizontales et coaxiales de diamètres intérieur  $D_i = 25$  cm et extérieur  $D_e = 53$  cm (soit un rayon moyen  $R_m = 19.5$  cm), de hauteur  $H = 11.5$  cm et de résistance interne  $R_b = 0.7 \Omega$ . Elles sont espacées verticalement d'une distance centre à centre  $e = 18.5$  cm. Ceci correspond à une configuration proche de celle des bobines de Helmholtz, définie par  $R_m = e$  et qui permet une bonne homogénéité verticale. Toutefois,  $R_m$  et  $e$  sont choisis légèrement différents afin d'obtenir une homogénéité horizontale sur l'ensemble de la section ( $> 99\%$  [64]).

Les bobines sont alimentées en série par une alimentation de puissance JFA Électronique, pouvant délivrer une tension  $U = 0 - 50$  V et un courant  $I = 0 - 50$  A. Un courant maximal de 36 A est atteint pour une tension appliquée de 50 V, produisant ainsi un champ magnétique  $B$  jusqu'à 780 G ( $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$ ). L'étalonnage des bobines, en mesurant le champ magnétique au niveau de la goutte de ferrofluide, montre que la relation avec l'intensité est linéaire :  $B = aI$ , avec  $a = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ T} \cdot \text{A}^{-1}$ . Ceci permet de connaître le champ magnétique appliqué par lecture de l'intensité parcourant les bobines.

## 7.2 Substrat superhydrophobe

Un substrat superhydrophobe permet de minimiser les forces liées aux lignes de contact afin d'obtenir des expériences beaucoup plus reproductibles [73, 74]. Ceci a nécessité l'application d'un traitement sur la plaque utilisée pour faire vibrer la goutte.

### Argent-HDFT

Nous avons dans un premier temps envisagé l'utilisation d'un traitement chimique décrit dans [75]. Celui-ci consiste d'abord à déposer de l'argent sur la plaque de cuivre en la plongeant dans une solution de nitrate d'argent ( $\text{AgNO}_3$ ) de concentration  $0.01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  pendant 3 minutes. Une réaction d'oxydo-réduction entre les ions argent ( $E_{\text{Ag}^+/\text{Ag}}^0 = 0.799 \text{ V}$ ) et le cuivre ( $E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}^0 = 0.340 \text{ V}$ ) produit un dépôt d'argent sous forme de flocons (voir Fig. 7.2), une rugosité qui est le premier facteur d'hydrophobicité. La plaque est ensuite plongée pendant 20 minutes dans une solution de HDFT (heptadecafluoro-1-decanethiol)<sup>1</sup> à  $10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Les chaînes fluorées se fixent alors aux atomes d'argent et sont le deuxième facteur d'hydrophobicité.

Ce traitement permet d'atteindre un angle de contact d'environ  $170^\circ$  entre une goutte d'eau et le substrat. Toutefois, le ferrofluide<sup>2</sup> n'est pas compatible avec ce traitement car le dépôt d'une goutte sur la plaque entraîne la destruction de la surface superhydrophobe. Une réaction chimique a probablement lieu en raison des ions utilisés pour la stabilisation du ferrofluide.

### Ultra Ever Dry

Nous nous sommes tourné vers le traitement industriel nommé Ultra Ever Dry [76]. Il consiste en l'application de deux couches par pulvérisation. La composition n'est pas fournie par le fabricant mais a été étudiée par le site internet Ars Technica [77]. La spectrométrie photoélectronique X révèle que la première couche est composée de polymères afin de lier les particules de la deuxième

1. Plus précisément, 3,3,4,4,5,5,6,6,7,7,8,8,9,9,10,10,10-heptadecafluoro-1-decanethiol

2. Le ferrofluide n°2 (voir section 7.3.1) n'a pas été testé avec ce traitement



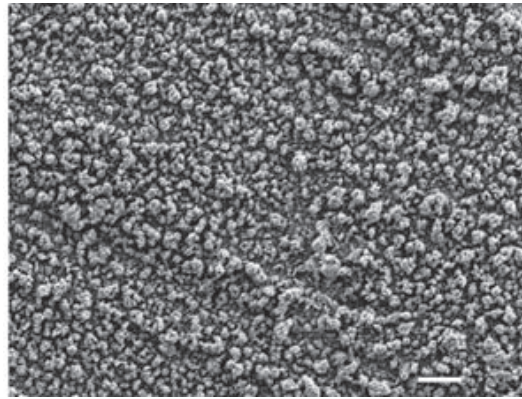


FIGURE 7.2 – Image par microscopie électronique à balayage d'un dépôt d'argent sur du cuivre par réaction d'oxydo-réduction. Source de l'image : [75]

couche au substrat. La deuxième couche contient des fluorocarbures (connus pour être hydrophobes, comme le Teflon) et du dioxyde de silicium  $SiO_2$ . Le substrat est alors lié à des chaînes ramifiées de particules de  $SiO_2$ , celles-ci étant alors entourées de fluorocarbures hydrophobes (voir Fig. 7.3). Le principe de l'Ultra Ever Dry repose ainsi sur la combinaison des deux facteurs d'hydrophobicité du traitement présenté précédemment.

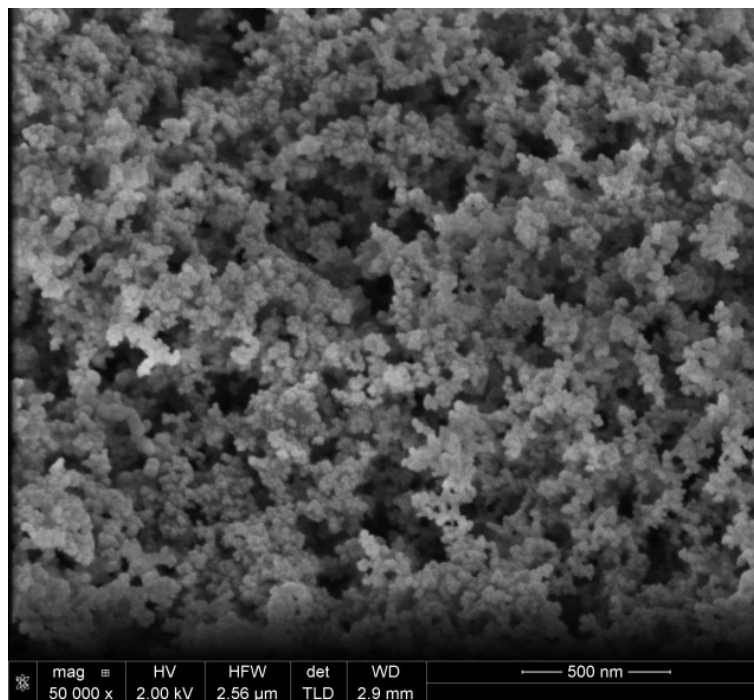


FIGURE 7.3 – Image par microscopie électronique à balayage d'un dépôt d'Ultra Ever Dry. Source de l'image : [77]

Le temps de séchage nécessaire pour l'Ultra Ever Dry est d'environ une heure pour la première couche et est optimal après 2 heures pour la deuxième couche. Ses performances sont bonnes à la fois avec l'eau et les ferrofluides. L'angle de contact entre la goutte et le substrat obtenu est de  $165^\circ$ . Il est à noter que le traitement doit être renouvelé après une journée complète d'expériences.

## 7.3 Ferrofluides

### 7.3.1 Caractéristiques des ferrofluides utilisés

Dans cette partie, deux ferrofluides différents ont été utilisés en raison des quantités trop faibles disponibles d'un même ferrofluide. Ils ont été synthétisés par Delphine Talbot et Sophie Neveu, du laboratoire LI2C de l'Université Pierre et Marie Curie. Le tableau 7.1 regroupe leurs caractéristiques.

Caractéristiques	Ferrofluide n°1 (chap. 8)	Ferrofluide n°2 (chap. 9 et 10)
Type de particules	Maghémite ( $Fe_2O_3$ )	Ferrite de cobalt ( $CoFe_2O_4$ )
Type de ferromagnétique	Doux	Dur
Liquide suspensant	Eau	Eau
Stabilisation	Ionique, Citrate de Sodium	Ionique
Diamètre moyen $d$	7 nm	13.3 nm
Dispersité $\sigma$	$\pm 0.3$ nm	$\pm 0.46$ nm
Fraction volumique $\Phi$	12.4 %	7.5 %
Susceptibilité mag. init. $\chi_i$	1.0	3.2
Aimantation à saturation $M_s$	36 kA.m <sup>-1</sup>	-
Masse volumique $\rho$	1.55 g.cm <sup>-3</sup>	1.6 g.cm <sup>-3</sup>
Tension de surface $\gamma$	43 mN.m <sup>-1</sup>	45 mN.m <sup>-1</sup>
Viscosité dynamique $\eta$	1.4.10 <sup>-3</sup> Pa.s	-

TABLE 7.1 – Caractéristiques des ferrofluides utilisés dans cette partie.

### 7.3.2 Mesures des tensions de surface

#### 7.3.2.1 Ferrofluide n°1 : balance d'arrachement

La tension de surface du ferrofluide n°1,  $\gamma_1$ , a été mesurée grâce à une balance d'arrachement : une plaque en platine de longueur  $L$  et d'épaisseur  $d$  est suspendue à une balance et plongée dans un bain de ferrofluide (Fig. 7.4). Le platine, pyrolysé au chalumeau avant l'expérience pour en enlever les impuretés, permet de considérer que l'angle de contact avec le liquide est nul.

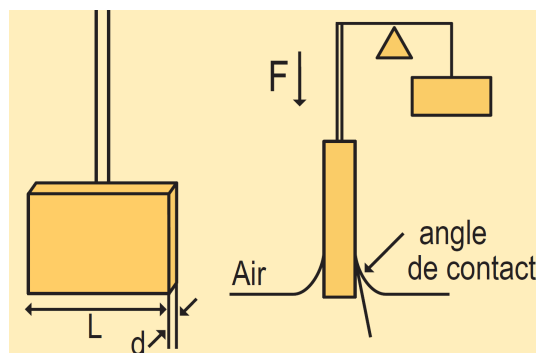


FIGURE 7.4 – Schéma de l'expérience de Wilhelmy (balance d'arrachement). *Source de l'image : www.lauda.fr*

Lorsqu'on retire la plaque, la force dirigée vers le bas subie par la plaque passe par un maximum

lors de l'arrachement  $F_{max} = 2L\gamma$ , indiquée par la lecture de la masse  $m$  sur la balance. On obtient alors :  $\gamma_1 = 43 \pm 3 \text{ mN.m}^{-1}$ .

### 7.3.2.2 Ferrofluide n°2 : goutte pendante

En raison de la faible quantité de liquide disponible, la tension de surface du ferrofluide n°2,  $\gamma_2$ , a été mesurée par la méthode de la « goutte pendante » [78]. Cette méthode consiste à former une goutte de ferrofluide à l'aide d'une seringue (voir Fig. 7.5).

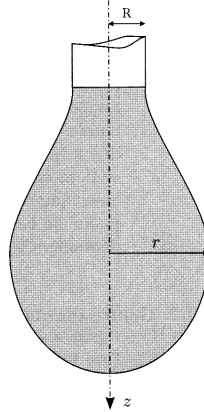


FIGURE 7.5 – Schéma de la méthode de la goutte pendante. *Source de l'image* : De Gennes [78].

En tout point de l'interface, la courbure  $C$  de la goutte doit alors obéir à l'équation  $\gamma C = \rho g z$  où  $z$  est la profondeur et  $C$  la courbure, qu'on peut calculer en connaissant  $r(z)$  en coordonnées cylindriques (voir Fig. 7.5).  $\gamma$  étant le seul paramètre ajustable, on peut en déterminer la valeur en comparant la forme théorique de la goutte à celle obtenue grâce à un système optique l'enregistreur et l'analysant. En raison de la pollution de la surface, la valeur mesurée décroît lors de son contact avec l'air pour atteindre une valeur  $\gamma_2 = 45 \pm 5 \text{ mN.m}^{-1}$ .

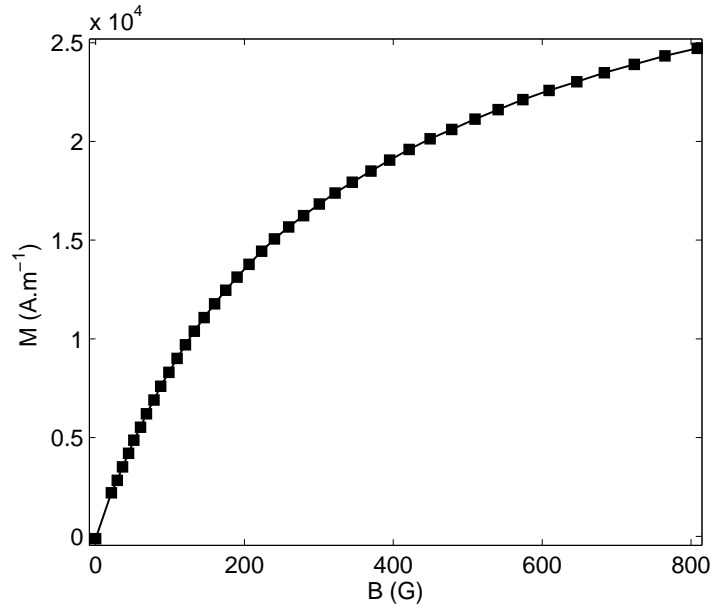
## 7.3.3 Mesures des caractéristiques magnétiques

### 7.3.3.1 Ferrofluide n°1

Un ferrofluide d'interface parallèle au champ magnétique extérieur appliqué  $B$  a une aimantation  $M = \chi B / \mu_0$  (voir Fig. 6.7). La Fig. 7.6 représente la courbe d'aimantation du ferrofluide n°1 ( $M$  vs.  $B$ ), réalisée dans ces conditions par le laboratoire LI2C. L'évolution est très nettement non linéaire. On note cependant que la susceptibilité magnétique à champ nul  $\chi(B = 0)$  constitue une bonne approximation pour les champs atteints lors de nos expériences ( $B < 100 \text{ G}$ ). On mesure  $\chi_{i,1} \equiv \chi_1(B = 0) = 1.0$ . La courbe d'aimantation fournit également la valeur de l'aimantation à saturation  $M_s$  (non visible ici).

### 7.3.3.2 Ferrofluide n°2

Nous ne bénéficions pas de la courbe d'aimantation pour le ferrofluide n°2. Toutefois, nous avons pu étudier la déformation d'une goutte sphérique de ce ferrofluide dans du fréon. En effet, la masse volumique du fréon est proche de celle du ferrofluide, ce qui permet de négliger la gravité et retrouver

FIGURE 7.6 – Courbe d'aimantation  $M$  *vs.*  $B$  du ferrofluide n°1.

les conditions de l'annexe B. En mesurant l'élongation de la goutte avec  $B$ , nous avons alors mesuré  $\chi_{i,2} = 3.2$ . Par analogie avec le ferrofluide n°1, nous considérons que les champs magnétiques utilisés ( $B < 70$  G) sont suffisamment faibles pour pouvoir considérer que l'aimantation du ferrofluide est linéaire, c'est-à-dire  $\chi_2(B) = \chi_2(B = 0) \equiv \chi_{i,2}$ .

# Chapitre 8

## Modes azimutaux à la périphérie d'une goutte magnétique : influence du champ magnétique

### 8.1 Résumé

Les résultats de ce chapitre ont été rédigés sous forme d'un article publié dans *Physical Review Fluids* [79] et reproduit en section 8.2. Nous résumons ici les principaux résultats.

Dans cet article, nous étudions expérimentalement et théoriquement l'influence du champ magnétique sur les fréquences propres des modes azimutaux d'une goutte de ferrofluide. Le dispositif expérimental utilisé est décrit au chapitre 7 (voir Fig. 7.1). Une goutte de ferrofluide de volume  $V = 1$  mL est déposée sur un substrat superhydrophobe qui subit une vibration verticale de fréquence  $f_e$  en présence d'un faible champ magnétique vertical extérieur  $B$ . Au-delà d'une accélération seuil du vibreur  $\Gamma_c$ , un motif azimutal, constitué d'un certain nombre de lobes  $n$ , apparaît à la périphérie de la goutte et oscille à la fréquence moitié du forçage (voir Fig. 8.1 et section 6.3). Pour différents modes azimutaux ( $n = 3, 4, 5$  et  $7$ ) et différents champs magnétiques ( $B = 0, 22, 44, 55, 66, 77, 88$  et  $99$  G), on cherche la fréquence d'excitation  $f_e$  du vibreur pour laquelle  $\Gamma_c$  est minimale (voir Fig. 3 de l'article). Cette fréquence correspond alors au double de la fréquence propre du mode,  $f_n = f_e/2$ , comme attendu pour un forçage paramétrique (voir section 6.3.2).

Nous observons expérimentalement que les fréquences propres des modes azimutaux ainsi obtenues diminuent en présence du champ magnétique (voir Fig. 3 de l'article). La Fig. 8.2 (Fig. 4 de l'article) montre que la valeur absolue du décalage en fréquence  $\omega_n^2(B = 0) - \omega_n^2(B)$  (avec  $\omega_n = 2\pi f_n$ ) est proportionnelle à  $B^2 n(n^2 - 1)$ .

Pour interpréter théoriquement ce décalage en fréquence, nous adoptons un raisonnement analogue à celui du modèle de Rayleigh, présenté dans la section 6.3.1 mais qui ne tient pas compte du rôle de  $B$ . Les fréquences propres peuvent à nouveau être obtenues par l'écriture de la conservation de l'énergie, mais incluant cette fois l'énergie magnétique  $E_m$ , qui dépend de la forme du ferrofluide. Le calcul de  $E_m$  nécessite *a priori* la connaissance de l'aimantation, mais celle-ci est connue en tous points du fluide uniquement dans le cas d'un ellipsoïde car elle y est uniforme (voir section 6.5.3). D'après l'Eq. (6.15), l'énergie magnétique peut s'exprimer dans ce dernier cas sous la forme :

$$E_m = -\frac{\chi B^2 V}{2\mu_0(1 + D\chi)} \quad (8.1)$$

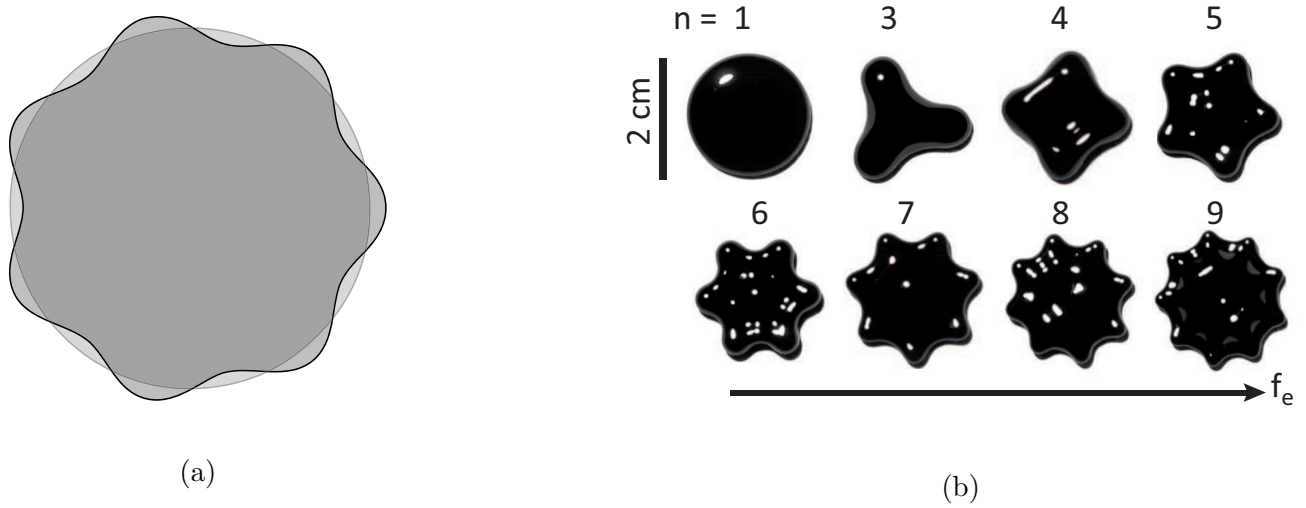


FIGURE 8.1 – (a) Schéma vu de dessus d'un mode azimutal ( $n = 7$ ) à la périphérie d'une goutte aplatie. (b) Photos de modes azimutaux vus de dessus à la périphérie d'une goutte de ferrofluide aplatie lorsque la fréquence d'excitation augmente.  $n$  est le numéro du mode.  $B = 0$ .

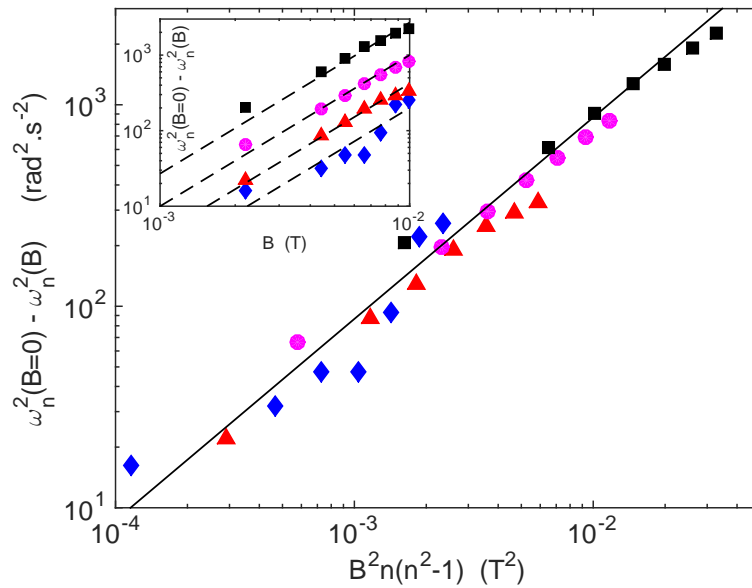


FIGURE 8.2 – Décalage en fréquence  $\omega_n^2(B = 0) - \omega_n^2(B)$  en fonction de  $B^2 n(n^2 - 1)$  pour différents modes :  $n = 3$  (◆),  $4$  (▲),  $5$  (●) et  $7$  (■). La ligne noire, de pente 1, est la prédiction théorique sans paramètre ajustable (voir Eq. 8.3). Encart : Décalage en fréquence en fonction de  $B$ . Les lignes noires en pointillés représentent des lois de puissance en  $B^2$ .

où  $D$  est un facteur de démagnétisation dépendant de la forme de l'ellipsoïde. Des expressions de  $D$  effectives, qui correspondent à des aimantations moyennées sur le volume, existent pour des géométries particulières telles que les parallélépipèdes rectangles [80] ou les cylindres [81]. Mais il n'existe pas d'expressions générales pour le cas de formes complexes telles que celle d'une goutte présentant des lobes périphériques. Toutefois, les expressions connues de  $D$  pour les géométries particulières citées précédemment permettent de comparer ce facteur de démagnétisation au rapport  $r_S$  entre  $S_\perp$ , la surface perpendiculaire à  $B$  (voir Fig. 6.3 ou Fig. 5 de l'article), et la surface totale de la goutte,  $S_\perp + S_\parallel$ . Nous montrons alors sur la Fig. 8.3 (Fig. 6 de l'article) que :

$$D \approx \frac{S_{\perp}}{S_{\perp} + S_{\parallel}} \equiv r_S \quad (8.2)$$

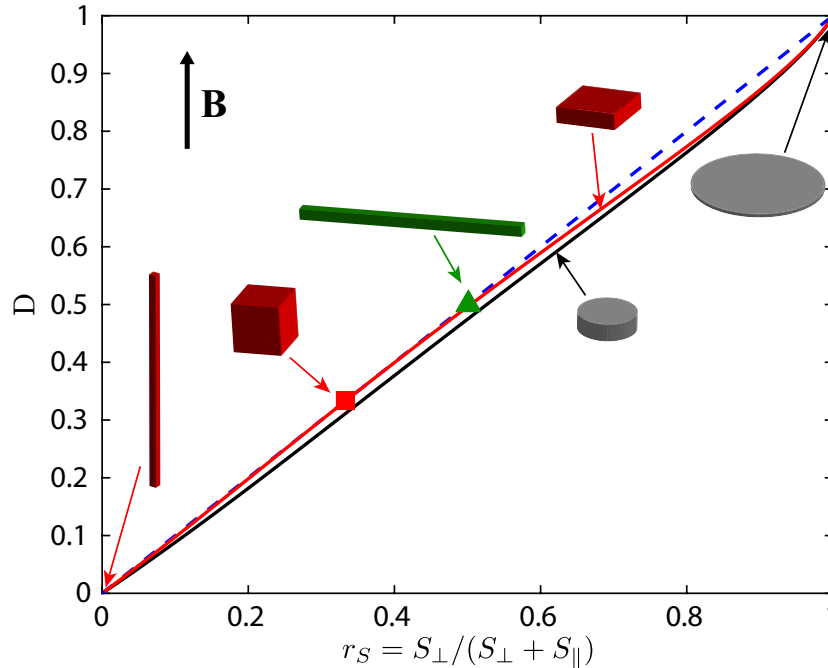


FIGURE 8.3 – Facteurs de démagnétisation théoriques  $D$  en fonction du rapport des surfaces  $r_s$ . La ligne noire est calculée d’après [81] pour un cylindre d’axe parallèle à  $B$ . La ligne rouge est calculée d’après [80] pour un parallélépipède rectangle. La ligne en pointillés représente le cas  $D = r_S$  (pente 1).

D’après la section 6.3.1, l’apparition des lobes entraîne une petite variation  $\Delta S_{\parallel}$  de la surface périphérique de la goutte. Un développement limité permet de montrer que la variation d’énergie magnétique liée à la présence de lobes azimuthaux s’écrit :  $\Delta E_m = \gamma_m \Delta S_{\parallel}$ , avec  $\gamma_m = -\chi^2 h B^2 / [4\mu_0 (1 + \chi + h/R)^2] < 0$ . A la manière de la section 6.3.1, l’écriture de la conservation de l’énergie dans le temps en présence de  $B$ ,  $d(E_k + E_c + E_m)/dt = 0$ , nous permet alors de montrer que les fréquences propres des lobes s’écrivent :

$$\omega_n^2 = \frac{\gamma + \gamma_m(B^2)}{\rho R^3} n(n^2 - 1) \quad (8.3)$$

L’Eq. (8.3) est à comparer avec l’Eq. (6.4) obtenue sans champ  $B$ . Le terme magnétique joue donc ici le rôle d’une tension de surface négative proportionnelle à  $B^2$  qui permet de contrôler la tension de surface effective de la goutte. La ligne noire tracée sur la Fig. 8.2 représente les décalages en fréquence calculés à partir de l’Eq. (8.3). Les décalages en fréquence prédits par ce modèle simple sont en très bon accord avec ceux observés expérimentalement, concernant à la fois la loi d’évolution en  $B^2 n(n^2 - 1)$  et le préfacteur.

Nous avons donc étudié ici les modes azimuthaux à la périphérie d’une goutte aplatie de ferrofluide déposée sur un substrat superhydrophobe soumis à une vibration verticale. Nous avons montré que nous pouvons contrôler les fréquences propres de ces modes avec un champ magnétique. En effet, l’apparition des lobes augmente l’aimantation de la goutte et fait diminuer l’énergie magnétique. Nous avons montré que la contribution magnétique est alors équivalente à celle d’une tension de surface négative. Un tel contrôle des fréquences propres via une tension de surface effective modulable (jusqu’à 20 % pour nos valeurs de  $B$ ) permet d’envisager des applications pratiques nécessitant d’atteindre ou d’éviter certaines bandes de fréquences.

## 8.2 Article publié dans *Physical Review Fluids* [79]



## Tuning the resonant frequencies of a drop by a magnetic field

Timothée Jamin, Yacine Djama, Jean-Claude Bacri, and Eric Falcon\*

*Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, MSC, CNRS (UMR 7057), 75013 Paris, France*

(Received 12 January 2016; revised manuscript received 8 February 2016; published 2 June 2016)

We report an experimental study of a magnetic liquid drop deposited on a superhydrophobic substrate and subjected to vertical vibrations in the presence of a static magnetic field. It is well known that a flattened drop of usual liquid displays oscillating lobes at its periphery when vibrated. By adding ferromagnetic nanoparticles to a water drop and varying the strength of the magnetic field, we are experimentally able to efficiently tune the resonant frequencies of the drop. By using conservation energy arguments, we show that the magnetic field contribution is equivalent to adding an effective negative surface tension to the drop. Our model is found to be in good agreement with the experiments with no fitting parameter.

DOI: [10.1103/PhysRevFluids.1.021901](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.1.021901)

When a drop of liquid is dynamically driven by an external force, its free surface generally displays an oscillating pattern at the drop resonant frequency. At a fundamental level, the dynamical study of such an oscillating drop occurs in various domains at different scales. Indeed, liquid drop behavior is used to model stellar mass collisions or neutron-star oscillations in astrophysics [1] and nuclei in nuclear fission [2,3] or in cellular biology [4]. It is also involved in metrology for measuring viscosity of liquids [5] or surface tension of molten materials [6,7]. At a more practical level, it includes printing (ink drop generation), mixing of drop clouds, and droplet manipulations in microfluidic, optofluidic, and pharmaceutical industry [8]. Since the pioneer works of Rayleigh [9], the resonant frequencies of a drop have been studied experimentally by means of different forcing mechanisms: a water drop on a vibrating plate [10–13] or on a vibrating bath [14], in microgravity [15], by acoustic or air-flow levitation [16,17], by levitating it on its own vapor (Leidenfrost drops) [18–20], or by Lorentz force for a metal liquid drop [21,22]. A new challenge would be to accurately control and tune the free oscillations of a drop in a nonintrusive way. Notably, it would be of primary interest to be able to shift the resonant frequencies of the drop to avoid, for instance, some annoying frequency bands in practical situations.

In this Rapid Communication we study the dynamics of a flattened drop of magnetic fluid deposited on a superhydrophobic substrate vertically vibrated in the presence of a weak magnetic field of tunable amplitude. The fluid used is a ferrofluid consisting of a stable suspension of nanometric magnetic particles diluted in a carrier liquid (water). Above a critical acceleration of vibrations, the drop undergoes a parametric instability leading to an azimuthal pattern around the drop that oscillates at half the forcing frequency. A star-shaped drop is then observed made of several oscillating lobes. We observe that the resonant frequencies of the drop depend on the strength of the field. We show quantitatively and theoretically that we are able to shift these frequencies by tuning the effective surface tension of the drop through the field. Indeed, the contribution of the magnetic field is equivalent to the one of a negative surface tension. Including nanometric magnetic particles within a drop appears thus as a first step in being able to control and tune the free oscillations of a drop, such a magnetic fluid being known to shift the onsets of usual hydrodynamics instabilities (such as Kelvin-Helmholtz, Rayleigh-Taylor, or Rayleigh-Plateau ones) [23,24]. Finally, note that ferrofluid drop manipulation with a magnet is also an important task in microfluidics or laboratory on-chip technology [25–27] and in dynamic self-assembly phenomena [28].

---

\*eric.falcon@univ-paris-diderot.fr

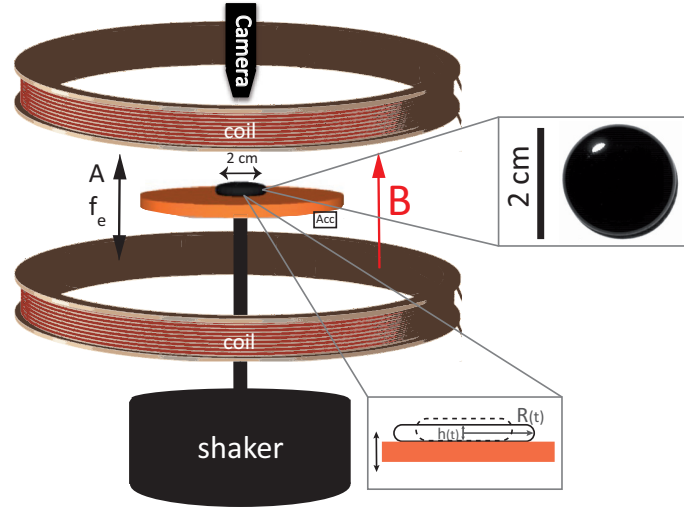


FIG. 1. Experimental setup. The bottom inset shows a schematic of the puddle at two phases of the vibration. The top inset shows the top view of the ferrofluid puddle at rest.

The experimental setup is shown in Fig. 1. A volume of ferrofluid ( $V = 1$  mL) is put on a plate. Due to gravity, the drop is flattened and looks like a puddle (radius  $R = 9.7$  mm and thickness  $h = 3.4$  mm; see the insets of Fig. 1). The plate was coated with a spray [29] to obtain a contact angle between the drop and the substrate measured of roughly  $165^\circ$ . Such a superhydrophobic substrate is crucial to minimize the pinning force of the drop at the contact line and thus to obtain much better reproducible experiments [30,31]. The plate is then subjected to vertical sinusoidal vibrations by means of an electromagnetic shaker. The frequency and amplitude of vibrations are in the ranges  $0 \leq f_e \leq 52$  Hz and  $0 \leq A \leq 3$  mm, respectively. An accelerometer is fixed below the plate to measure the normalized acceleration of vibrations  $\Gamma = A\omega_e^2/g$  with  $\omega_e = 2\pi f_e$  and  $g = 9.81$  m s $^{-2}$  the acceleration of gravity. One has  $0 \leq \Gamma \leq 4$ . The ferrofluid puddle on the plate is placed between two horizontal coils (38 cm in mean diameter), generating a vertical static magnetic field  $B$  in the range  $0 \leq B \leq 100$  G, 99% homogeneous in the horizontal plane [32]. The drop oscillations are recorded by means of a high-speed camera (PhantomV10) located above the drop, with a 1000 frames/s sampling and a  $1600 \times 1200$  pixel resolution.

The ferrofluid used is an ionic aqueous suspension synthesized with 12.4% by volume of maghemite particles ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ,  $7 \pm 0.3$  nm in diameter) [33]. The nanoparticle diameter and magnetic field values are small enough to avoid sedimentation or agglomeration due to vibrations, gravity, and magnetic fields [23]. The ferrofluid properties are density  $\rho = 1550$  kg m $^{-3}$ , surface tension  $\gamma = 43 \pm 3$  mN m $^{-1}$ , magnetic susceptibility  $\chi(B) \approx \chi(B = 0) = 1.0$  [34], magnetic saturation,  $M_{\text{sat}} = 36 \times 10^3$  A m $^{-1}$ , and dynamic viscosity  $1.4 \times 10^{-3}$  N s m $^{-2}$ . Its capillary length is then  $l_c = \sqrt{\gamma/\rho g} = 1.7$  mm.

To accurately measure azimuthal drop oscillations, we use large flattened drops ( $R \gg l_c$ ; see the bottom inset of Fig. 1). The Bond number, quantifying the ratio between gravity and capillary forces acting on the drop, is  $\text{Bo} \equiv (R/l_c)^2 \simeq 33$ . The ratio between magnetic and capillary forces is quantified by the magnetic Bond number  $\text{Bo}_m \equiv B^2 R / \mu_0 \gamma$ , with  $R$  the puddle radius and  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H m $^{-1}$  the magnetic permeability of the vacuum. For our range of  $B$ , one has  $\text{Bo}_m \leq 2$ . Moreover, the magnetic effect is much smaller than that of gravity ( $\text{Bo}_m/\text{Bo} \leq 0.06$ ), meaning that the strength of  $B$  is weak enough to not deform the flattened region of the puddle at rest.

We first carry out experiments with no magnetic field ( $B = 0$ ). Figure 2 shows the parametric instability of a ferrofluid puddle subjected to vertical sinusoidal vibrations. Above a critical acceleration of vibration  $\Gamma_c$ , an azimuthal pattern is observed in the horizontal plane at the drop periphery: Lobes oscillate radially at half the forcing frequency  $f_e/2$ . When  $f_e$  is increased, the

## TUNING THE RESONANT FREQUENCIES OF A DROP BY ...

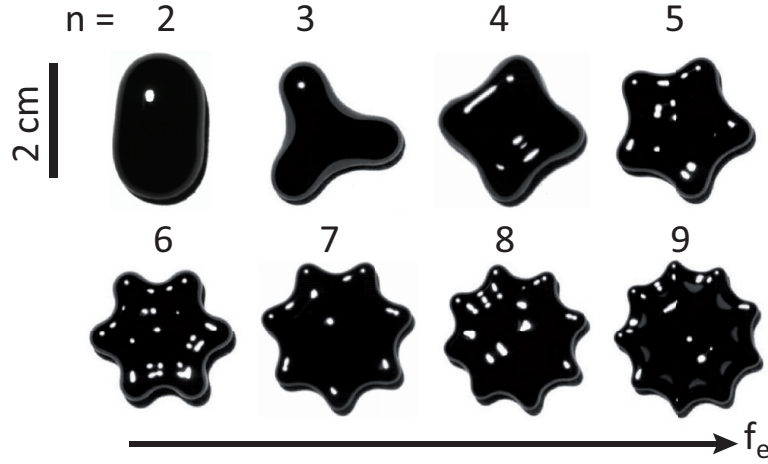


FIG. 2. Top view of the azimuthal pattern displayed around the drop as a function of  $f_e$ . Above a critical acceleration of vibration, an azimuthal pattern is observed normal to the vibration direction. When the forcing frequency  $f_e$  is increased ( $0 \leq f_e \leq 52$  Hz), the number  $n$  of lobes, oscillating radially at  $f_e/2$ , increases from  $n = 2$  to 9 (from left to right and top to bottom). See a movie in the Supplemental Material [35]. The magnetic field and the ferrofluid volume are  $B = 0$  and  $V \approx 1$  mL, respectively.

number  $n$  of oscillating lobes (mode number) increases from  $n = 2$  to 9 as shown in Fig. 2 and the movie in the Supplemental Material [35].

The resonant frequencies  $f_n$  of such an inviscid drop are independent of the nature of the forcing and arise from an interplay between inertia and surface tension effects. In the limit  $2R \gg h$ , the flattened drop shape (see the inset of Fig. 1) is approximated by a cylindrical column of fluid. The radial amplitude of the lobes  $a_n(t)$  is then governed by a harmonic oscillator equation of eigenfrequency  $f_n$  [9,36],

$$\frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 a_n(t) = 0, \quad \omega_n^2 = \frac{\gamma}{\rho R^3} n(n^2 - 1), \quad (1)$$

with  $\omega_n = 2\pi f_n$ .

A vertical sinusoidal vibration of the substrate is now applied to force the drop parametrically by modulating gravity  $g \rightarrow g(t) = g[1 + \Gamma \cos(\omega_e t)]$  with  $\Gamma = A\omega_e^2/g$ . In addition, the thickness  $h$  of the puddle is usually given [10,13] by the quasistatic balance between gravity and capillary energies per unit volume ( $2\gamma/h \simeq \rho gh/2$ ), i.e.,  $h \simeq 2l_c = 2\sqrt{\gamma/\rho g}$ . The hypothesis of a constant volume of the puddle  $V = \pi R^2 h$  then gives its radius  $R = \sqrt{V/\pi h}$ . Thus, a temporal modulation of gravity  $g(t)$  induces those of the puddle thickness  $h(t) \sim g(t)^{-1/2}$ , radius  $R(t) \sim h(t)^{-1/2} \sim g(t)^{1/4}$ , and eigenfrequencies  $\omega_n^2(t) \sim R(t)^{-3} \sim g(t)^{-3/4}$  using Eq. (1). For weak acceleration of vibrations  $\Gamma \ll 1$ , the parametric oscillator equation governing the amplitude of the lobes  $a_n(t)$  then reads [10]

$$\frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 \left[ 1 - \frac{3}{4} \Gamma \cos(\omega_e t) \right] a_n(t) = 0. \quad (2)$$

Equation (2) is the Mathieu equation whose solutions are marginality curves (or instability tongues) separating stable zones (no deformation of the drop) and unstable zones where azimuthal standing waves at the drop periphery oscillate at half the forcing frequency  $f_e/2$ , near the resonant frequencies  $f_n$  [37]. This corresponds to the parametric instability shown in Fig. 2.

These tongues of instability are displayed in Fig. 3 in an acceleration-frequency phase space ( $\Gamma_c/\Gamma_c^{\min}$  vs  $f_e$ ) for  $B = 0$  (open symbols). Data are obtained experimentally for various  $f_e$  by increasing  $\Gamma$  until we observe lobes at critical acceleration  $\Gamma_c$ ;  $\Gamma_c^{\min}$  is the minimum critical acceleration of each tongue. Equation (2) predicts that the minimum of each marginality curve

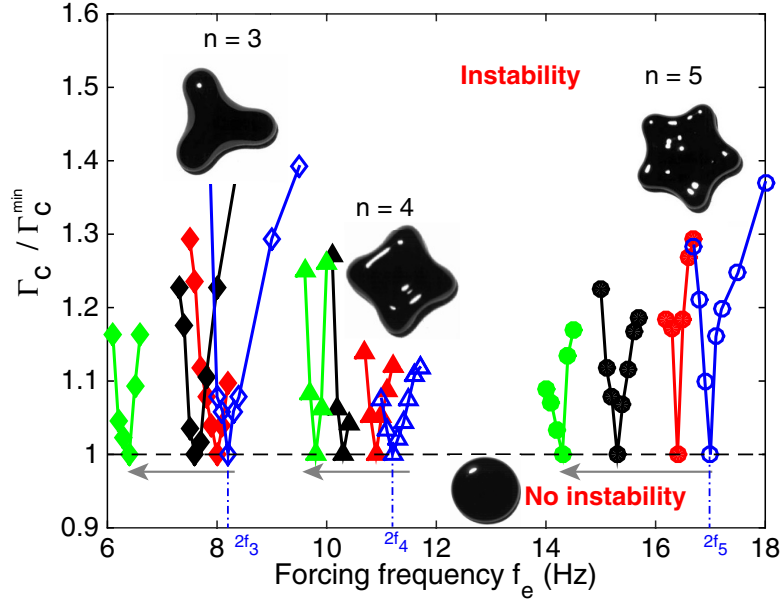


FIG. 3. Phase diagram of normalized rescaled critical acceleration  $\Gamma_c / \Gamma_c^{\min}$  vs  $f_e$ . Curves are marginality curves separating stable and unstable zones for different mode numbers  $n = 3$  ( $\diamond$ ),  $4$  ( $\triangle$ ), and  $5$  ( $\circ$ ). No instability occurs for  $\Gamma \leq \Gamma_c$ , whereas an azimuthal pattern around the puddle occurs within tongues. Open symbols corresponds to  $B = 0$ , closed symbols to  $B \neq 0$ :  $B = 44$  [red (dark gray)],  $77$  (black), and  $99$  G [green (light gray)]. When  $B$  is increased (see arrows), the tongue are shifted towards a lower frequency, for each mode  $n$ .

occurs at twice the eigenmode  $f_e = 2f_n$ . Notice that experimental values for  $f_n$  are smaller than values given by Eq. (1). This difference ( $<18\%$ ) may be explained by the fact that the quasistatic approximation yielding Eq. (2) is valid only for a low-frequency forcing. At higher frequency, the existence of axisymmetric modes shifts the minima of the marginality curves [38,39]. Indeed, we checked that this difference becomes negligible when we remove these axisymmetric modes by performing a control experiment with a superhydrophobic steady plate in contact with the drop top [40]. One can now wonder how an applied vertical magnetic field  $B$  affects the drop dynamics.

When  $B$  is increased for a fixed  $n$ , we observe that the instability tongue is shifted towards a lower frequency (see arrows in Fig. 3). The minimum of this curve and thus the eigenfrequency  $f_n(B)$  are found to decrease with  $B$ . For  $n = 5$ , a relative shift of  $f_n$  of  $16\%$  is observed between extreme values of  $B$  used. One defines the absolute shift of the eigenfrequency as  $\Delta\Omega_n(B) \equiv \omega_n^2(B = 0) - \omega_n^2(B)$ , taking thus positive values. We plot in the inset of Fig. 4 the frequency shift  $\Delta\Omega_n(B)$  as a function of  $B$  for different  $n$ . We find that  $\Delta\Omega_n(B) \sim B^2$  for our range of  $B$  regardless of  $n$ . All data in the inset of Fig. 4 are found to collapse on a single curve when plotting  $\Delta\Omega_n(B)$  as a function of  $B^2 n^3$  (not shown). In order to compare with the model described below,  $\Delta\Omega_n(B)$  is then displayed in Fig. 4 as a function of  $B^2 n(n^2 - 1)$ , noting that  $n(n^2 - 1) \approx n^3$  for  $n \geq 3$ .

This frequency shift is not due to a geometrical effect mediated by  $B$  such as a drop lengthening along the field direction [24,41,42]. Indeed, using Eq. (1), a decrease of the puddle radius  $R$  with  $B$  (up to  $6\%$  here) would lead to an increase of the resonant frequency, a situation opposite to our observations (see Fig. 3). Moreover, the results of Fig. 4 are found again when adding a steady plate above the drop. Finally, note that no clear dependence of the critical acceleration  $\Gamma_c^{\min}$  on  $B$  is observed.

An elegant way to understand the physical origin of the drop eigenfrequency shift with  $B$  is to balance energies involved in this system. In a first step, we assume  $B = 0$  and follow Rayleigh model [9]. The flattened drop shape is approximated by a cylinder of fluid [see Fig. 5(a)]. We denote by  $S_{\perp}$  its surface area normal to gravity and magnetic field (i.e., top plus bottom areas) and by  $S_{\parallel}$  the peripheral surface area. At rest, they are denoted by  $S_{\perp,0}$  and  $S_{\parallel,0}$ , respectively. We consider

## TUNING THE RESONANT FREQUENCIES OF A DROP BY ...

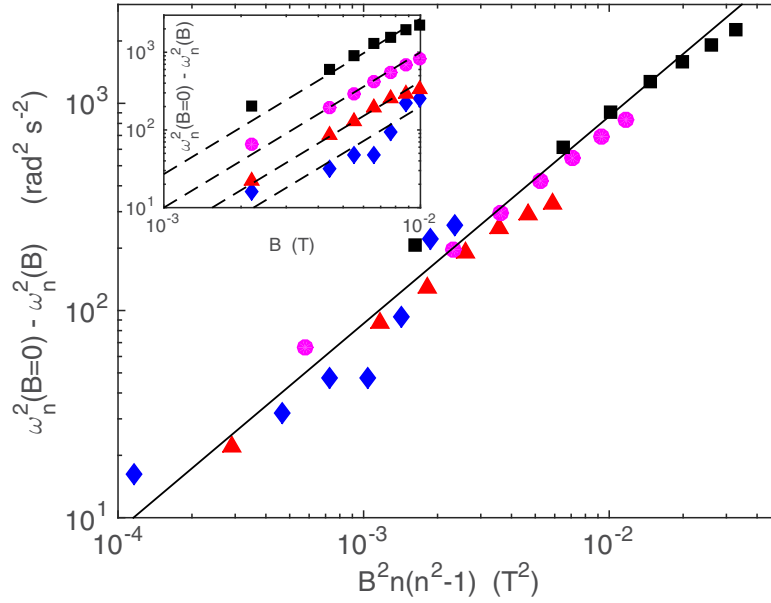


FIG. 4. Eigenfrequency shift  $\omega_n^2(B=0) - \omega_n^2(B)$  as a function of  $B^2 n(n^2 - 1)$  for different modes  $n = 3$  ( $\blacklozenge$ ), 4 ( $\blacktriangle$ ), 5 ( $\bullet$ ), and 7 ( $\blacksquare$ ). The solid line is the prediction from the model of Eq. (10) with no fitting parameter. The inset shows an unrescaled frequency shift vs  $B$ . Dashed lines have a slope 2.

small radial deformations of the peripheral surface of amplitude  $a_n(t) \ll R$  around an instantaneous radius  $\bar{R}(t)$ . In polar coordinates, this reads  $r(\theta, t) = \bar{R}(t) + a_n(t) \cos(n\theta)$  [see Fig. 5(b)]. Here  $h$  is assumed constant with time and thus also  $S_\perp$  due to volume conservation. It is known, since Rayleigh [9], that the radial deformation  $a_n$  induces an increase in  $S_\parallel$  [see Figs. 5(a) and 5(b)] as

$$\Delta S_\parallel(t) \equiv S_\parallel(t) - S_{\parallel,0} = \frac{\pi h a_n^2(t)(n^2 - 1)}{2R}. \quad (3)$$

Thus, capillary energy increases by

$$\Delta E_c(t) = \gamma \Delta S_\parallel(t). \quad (4)$$

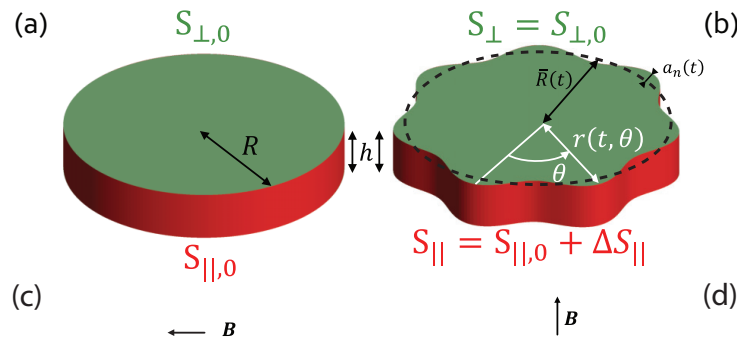


FIG. 5. Schematic view of the puddle. (a) At rest, the puddle is considered as a cylinder of liquid. (b) When lobes appear, the peripheral surface  $S_\parallel$  increases as well as the capillary energy. Magnetization is illustrated within a ferrofluid film (c) parallel or (d) normal to  $\mathbf{B}$ .

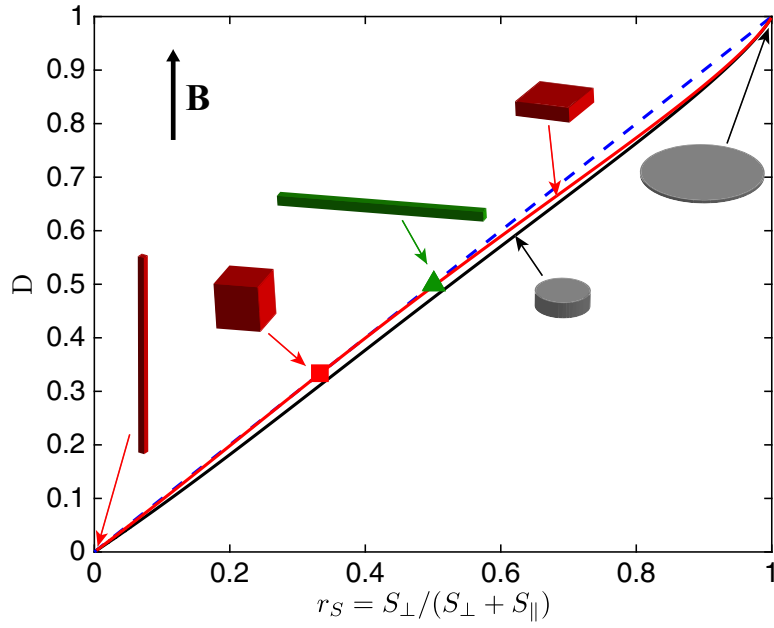


FIG. 6. Theoretical demagnetizing factors  $D$  vs surface ratio  $r_S$ . The black line is computed from the model in [43] for a cylinder of axis aligned with  $\mathbf{B}$ ; the red line (light gray) is computed from [44] for a square rod aligned with  $\mathbf{B}$ ;  $\blacksquare$  is for a cube ( $D = r_S = 1/3$  [44]);  $\blacktriangle$  is for an infinitely elongated square rod normal to  $\mathbf{B}$  ( $D = r_S = 1/2$  [44]). The dashed line represents  $D = r_S$  (slope 1).

In addition, the kinetic energy of the liquid reads

$$E_k(t) = \left( \frac{da_n}{dt} \right)^2 \frac{\pi \rho h R^2}{2n}. \quad (5)$$

The conservation of energy  $d(E_k + E_c)/dt = 0$  then leads to Eq. (1) [9].

Let us now introduce the magnetic energy  $E_m$  in the Rayleigh model. For a linearly permeable ferrofluid of volume  $V$  [34], one has  $E_m = -\mathbf{B} \cdot \int_V \mathbf{M} dV / 2$ , with  $\mathbf{B}$  the external magnetic field and  $\mathbf{M}$  the local ferrofluid magnetization [23]. The determination of  $\mathbf{M}$  needs to take into account the ferrofluid boundary conditions. For instance, for a plane parallel to  $\mathbf{B}$ , one has  $E_m = -\chi V B^2 / 2\mu_0$  [see Fig. 5(c)] and for a plane normal to  $\mathbf{B}$ ,  $E_m = -\chi V B^2 / 2\mu_0(1 + \chi)$  [see Fig. 5(d)]. Thus, the magnetic energy of a ferrofluid layer is smaller when  $\mathbf{B}$  is parallel rather than normal to its surface.

For an arbitrary ferrofluid shape,  $\mathbf{M}$  is nonuniform and an effective demagnetizing factor  $D$  is usually defined, with  $0 \leq D \leq 1$  (depending on the shape), such that [23]

$$E_m = -\frac{\chi V B^2}{2\mu_0(1 + \chi D)}. \quad (6)$$

For volumes bounded by surfaces either parallel or normal to  $\mathbf{B}$ , we can define the ratio between the surface area normal to  $\mathbf{B}$  and the total surface area as  $r_S \equiv S_{\perp} / (S_{\perp} + S_{\parallel})$ . Using known theoretical values of  $D$  for different geometries [43,44], we show in Fig. 6 that  $D \approx r_S$  over the whole range of aspect ratios. This means that  $E_m$  decreases when the aspect ratio favors surfaces parallel to  $\mathbf{B}$ , i.e.,  $D \rightarrow 0$  when  $r_S \rightarrow 0$ .

We can then replace the demagnetizing factor  $D$  by  $r_S$  in Eq. (6). The variation of  $S_{\parallel}$  due to the presence of peripheral lobes induces a variation of  $E_m$  through  $r_S$ . Noticing that  $S_{\perp,0} = 2\pi R^2$  and  $S_{\parallel,0} = 2\pi R h$  at rest, a first-order Taylor expansion in  $\Delta S_{\parallel}$  for small deformations ( $a_n \ll R$ ) leads to

$$\Delta E_m(t) = \gamma_m \Delta S_{\parallel}(t) \quad (7)$$



TUNING THE RESONANT FREQUENCIES OF A DROP BY ...

with

$$\gamma_m = -\frac{\chi^2 h B^2}{4\mu_0(1 + \chi + h/R)^2}, \quad (8)$$

a quantity always negative. Then, using  $\Delta S_{\parallel}$  from Eq. (3) and energies from Eqs (4), (5), and (7), the conservation of energy  $d(E_k + E_c + E_m)/dt = 0$  finally leads to the resonant frequencies of the ferrofluid drop

$$\omega_n^2(B) = \frac{\gamma + \gamma_m(B^2)}{\rho R^3} n(n^2 - 1). \quad (9)$$

Using Eq. (1) then leads to

$$\omega_n^2(B=0) - \omega_n^2(B) = -\frac{\gamma_m(B^2)}{\rho R^3} n(n^2 - 1). \quad (10)$$

The  $B^2 n(n^2 - 1)$  scaling is in good agreement with the one found experimentally (see Fig. 4) as well as for the theoretical prefactor with no fitting parameter.

Notice that Eq. (9) includes the usual capillary contribution  $\gamma$  and a magnetic one  $\gamma_m$  that depends on  $B$ . The magnetic term thus plays the role of a negative surface tension ( $\gamma_m < 0$ ) that thus reduces the drop resonant frequencies. The magnetic field can be then used to tune the effective surface tension  $\gamma_{\text{eff}} \equiv \gamma + \gamma_m$  and thus  $\omega_n$ . For our ranges of  $B$ , using ferrofluid properties and geometry, one has  $\gamma_m \in [-8.5, 0]$  mN m<sup>-1</sup>, which is up to 20% of  $\gamma$ . The analogy with surface tension arises from  $\Delta E_m = \gamma_m(B^2)\Delta S_{\parallel}$ . This means that an increase of the drop surface area parallel to  $\mathbf{B}$  favors its magnetization and thus decreases  $E_m$  since  $\gamma_m < 0$ . Consequently,  $B$  has a stabilizing effect on the lobes. Finally, note that a model of the dynamics of a ferrofluid drop confined between two plates [45,46] mentioned such a possible negative surface tension effect, but requires  $\chi \ll 1$  and thus cannot apply here where  $\chi = 1$ .

To conclude, we have studied the dynamics of parametric oscillations of a centimetric ferrofluid drop on a superhydrophobic plate subjected to vertical sinusoidal vibrations and a constant magnetic field. By adding ferromagnetic nanoparticles to a water drop, we are able to shift significantly its eigenfrequencies by tuning the magnetic field strength. Using energy conservation, we extend the Rayleigh model and show that the resonant frequency shift is well captured by our model with no fitting parameter. We also show that the magnetic field acts as a negative surface tension and is a way to tune the effective surface tension of the drop. Finally, the weakness of the field strength and the small size of ferromagnetic particles are favorable to miniaturization to plan to control the oscillations of centimeter-to-microscale drop in a new nonintrusive way for potential applications.

We thank D. Talbot for the ferrofluid synthesis, M. Berhanu, P. Brunet, M. Costalonga, and C. Laroche for fruitful discussions, and A. Lanthéaume, Y. Le Goas, and M.-A. Guedeau-Boudeville for technical help. T.J. was supported by the DGA-CNRS Ph.D. program. This work was partially financed by ANR Turbulon Grant No. 12-BS04-0005.

- 
- [1] R. H. Durisen, R. A. Gingold, J. E. Tohline, and A. P. Boss, Dynamic fission instabilities in rapidly rotating  $n = 3/2$  polytropes—A comparison of results from finite-difference and smoothed particle hydrodynamics codes, *Astrophys. J.* **305**, 281 (1986).
  - [2] A. A. Amsden, G. F. Bertsch, F. H. Harlow, and J. R. Nix, Relativistic Hydrodynamic Theory of Heavy-Ion Collisions, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 905 (1975).
  - [3] J. A. Zingman, T. L. McAbee, J. R. Wilson, and C. T. Alonso, Collective sow and pion production in a hydrodynamic model, *Phys. Rev. C* **38**, 760 (1988).

- [4] C. P. Brangwynne, T. J. Mitchison, and A. A. Hyman, Active liquid-like behavior of nucleoli determines their size and shape in *Xenopus laevis* oocytes, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **108**, 4334 (2011).
- [5] M. Papoular and C. Parayre, Gas-Film Levitated Liquids: Shape Fluctuations of Viscous Drops, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2120 (1997).
- [6] M. E. Fraser, W.-K. Lu, A. E. Hamielec, and R. Murarka, Surface tension measurements on pure liquid iron and nickel by an oscillating drop technique, *Metall. Trans.* **2**, 817 (1971).
- [7] M. Przyborowski, T. Hibiya, M. Eguchi, and I. Egry, Surface tension measurement of molten silicon by the oscillating drop method using electromagnetic levitation, *J. Cryst. Growth* **151**, 60 (1995).
- [8] J. M. Oh, D. Legendre, and F. Mugele, Shaken not stirred—On internal flow patterns in oscillating sessile drops, *Europhys. Lett.* **98**, 34003 (2012).
- [9] Lord Rayleigh, On the capillary phenomena of jets, *Proc. R. Soc. London* **29**, 71 (1879).
- [10] N. Yoshiyasu, K. Matsuda, and R. Takaki, Self-induced vibration of a water drop placed on an oscillating plate, *J. Phys. Soc. Jpn.* **65**, 2068 (1996).
- [11] M. Okada and M. Okada, Observation of the shape of a water drop on an oscillating Teflon plate, *Exp. Fluids* **41**, 789 (2006).
- [12] X. Noblin, A. Buguin, and F. Brochard-Wyart, Vibrations of sessile drops, *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **166**, 7 (2009).
- [13] P. Brunet and J. H. Snoeijer, Star-drops formed by periodic excitation and on an air cushion—A short review, *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **192**, 207 (2011).
- [14] S. Dorbolo, D. Terwagne, N. Vandewalle, and T. Gilet, Resonant and rolling droplet, *New J. Phys.* **10**, 113021 (2008).
- [15] R. E. Apfel, Y. Tian, J. Jankovsky, T. Shi, X. Chen, R. G. Holt, E. Trinh, A. Croonquist, K. C. Thornton, A. Sacco, C. Coleman, F. W. Leslie, and D. H. Matthiesen, Free Oscillations and Surfactant Studies of Superdeformed Drops in Microgravity, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1912 (1997).
- [16] C. L. Shen, W. J. Xie, and B. Wei, Parametrically excited sectorial oscillation of liquid drops floating in ultrasound, *Phys. Rev. E* **81**, 046305 (2010).
- [17] W. Bouwhuis, K. G. Winkels, I. R. Peters, P. Brunet, D. van der Meer, and J. H. Snoeijer, Oscillating and star-shaped drops levitated by an airflow, *Phys. Rev. E* **88**, 023017 (2013).
- [18] N. J. Holter and W. R. Glasscock, Vibrations of evaporating liquid drops, *J. Acoust. Soc. Am.* **24**, 682 (1952).
- [19] A. Snezhko, E. Ben Jacob, and I. S. Aranson, Pulsating gliding transition in the dynamics of levitating liquid nitrogen droplets, *New J. Phys.* **10**, 043034 (2008).
- [20] K. Piroird, B. D. Texier, C. Clanet, and D. Quéré, Reshaping and capturing Leidenfrost drops with a magnet, *Phys. Fluids* **25**, 032108 (2013).
- [21] Y. Fautrelle, J. Etay, and S. Daugan, Free-surface horizontal waves generated by low-frequency alternating magnetic fields, *J. Fluid Mech.* **527**, 285 (2005).
- [22] V. Kocourek, C. Karcher, M. Conrath, and D. Schulze, Stability of liquid metal drops affected by a high-frequency magnetic field, *Phys. Rev. E* **74**, 026303 (2006).
- [23] R. E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics* (Dover, New York, 1997).
- [24] E. Blums, A. Cebers, and M. M. Maiorov, *Magnetic Fluids* (de Gruyter, Berlin, 1997).
- [25] E. Bormashenko, R. Pogreb, Y. Bormashenko, A. Musin, and T. Stein, New investigations on ferrofluidics: Ferrofluidic marbles and magnetic-field-driven drops on superhydrophobic surfaces, *Langmuir* **24**, 12119 (2008).
- [26] V. Sterr, R. Krau, K. I. Morozov, I. Rehberg, A. Engel, and R. Richter, Rolling ferrofluid drop on the surface of a liquid, *New J. Phys.* **10**, 063029 (2008).
- [27] N.-T. Nguyen, G. Zhu, Y.-C. Chua, V.-N. Phan, and S.-H. Tan, Magnetowetting and sliding motion of a sessile ferrofluid droplet in the presence of a permanent magnet, *Langmuir* **26**, 12553 (2010).
- [28] J. V. I. Timonen, M. Latikka, L. Leibler, R. H. A. Ras, and O. Ikkala, Switchable static and dynamic self-assembly of magnetic droplets on superhydrophobic surfaces, *Science* **341**, 253 (2013).
- [29] Ultra Ever Dry® spray; see <http://ultraeverdry-tap.com/index.html>
- [30] F. Celestini and R. Kofman, Vibration of submillimeter-size supported droplets, *Phys. Rev. E* **73**, 041602 (2006).



## TUNING THE RESONANT FREQUENCIES OF A DROP BY ...

- [31] C.-T. Chang, J. B. Bostwick, P. H. Steen, and S. Daniel, Substrate constraint modifies the Rayleigh spectrum of vibrating sessile drops, *Phys. Rev. E* **88**, 023015 (2013).
- [32] The coils are in quasi-Helmholtz configuration and cooled with water circulation; see J. Browaeys, J.-C. Bacri, C. Flament, S. Neveu, and R. Perzynski, Surface waves in ferrofluids under vertical magnetic field, *Eur. Phys. J. B* **9**, 335 (1999).
- [33] The ferrofluid synthesis has been performed by the Laboratory LI2C, University Pierre et Marie Curie—Paris 6 according to Massart’s method: R. Massart, Preparation of aqueous magnetic liquids in alkaline and acidic media, *IEEE Trans. Magn.* **17**, 1247 (1981).
- [34] For our range of values of  $B$ , the magnetic susceptibility of the ferrofluid  $\chi(B)$  varies less than 3%, thus one fixes  $\chi(B) = \chi(B = 0)$ .
- [35] See Supplemental Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevFluids.1.021901> for an illustrative movie of oscillations of a ferrofluid puddle ( $R \simeq 1$  cm in radius) on a superhydrophobic plate (top view). When the vibrating plate frequency increases, the eigenmode number  $n$  increases, showing azimuthal waves constituting of  $n$  lobes oscillating radially. The vibration acceleration  $0 \leq \Gamma \leq 4$  and magnetic field  $B = 0$ .
- [36] H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th ed. (Dover, New York, 1932).
- [37] J. Mathews and R. L. Walker, *Mathematical Methods of Physics*, 2nd ed. (Addison-Wesley, New York, 1969), pp. 198–204.
- [38] X. Noblin, A. Buguin, and F. Brochard-Wyart, Triplon Modes of Puddles, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 166102 (2005).
- [39] X. Noblin, A. Buguin, and F. Brochard-Wyart, Vibrated sessile drops: Transition between pinned and mobile contact line oscillations, *Eur. Phys. J. E* **14**, 395 (2004).
- [40] T. Jamin, Ph.D. thesis, Université Paris–Diderot, 2016.
- [41] V. I. Arkhipenko, Yu. D. Barkov, and V. G. Bashtovoi, Shape of a drop of magnetized fluid in a homogeneous magnetic field, *Magnetohydrodynamics* **14**, 373 (1978).
- [42] J.-C. Bacri and D. Salin, Instability of ferrofluid magnetic drops under magnetic field, *J. Phys. Lett. (France)* **43**, L649 (1982).
- [43] A. S. Arrott, B. Heinrich, T. L. Templeton, and A. Aharoni, Micromagnetics of curling configurations in magnetically soft cylinders, *J. Appl. Phys.* **50**, 2387 (1979).
- [44] A. Aharoni, Demagnetizing factors for rectangular ferromagnetic prisms, *J. Appl. Phys.* **83**, 3432 (1998).
- [45] S. A. Langer, R. E. Goldstein, and D. P. Jackson, Dynamics of labyrinthine pattern formation in magnetic fluids, *Phys. Rev. A* **46**, 4894 (1992).
- [46] D. P. Jackson, R. E. Goldstein, and A. O. Cebers, Hydrodynamics of fingering instabilities in dipolar fluids, *Phys. Rev. E* **50**, 298 (1994).



# Chapitre 9

## Modes axisymétriques d'une goutte magnétique vibrée verticalement

L'instabilité paramétrique provoquant l'apparition des modes azimutaux est liée à la modulation du rayon induite par la vibration du substrat (voir chapitre 8). Il s'agit d'une résonance non linéaire et les oscillations de la périphérie de la goutte apparaissent au-delà d'un certain seuil d'excitation. Dans ce chapitre, nous étudions les fluctuations du rayon de la goutte avant l'apparition de ces modes azimutaux. Ces fluctuations présentent des résonances à certaines fréquences, et nous nous intéressons à l'effet du champ magnétique sur ces modes axisymétriques. A la différence des modes azimutaux du chapitre précédent, cette résonance s'explique par la présence d'ondes de surface linéaires circulaires sur la surface supérieure de la goutte (voir sections 6.4 et 9.2.2), excitées par la vibration du substrat et provoquant des fluctuations du rayon. Cette résonance est donc linéaire, sans seuil et de régime transitoire court.

### 9.1 Protocole expérimental

Le dispositif expérimental est celui décrit dans le chapitre 7. Les fluctuations du rayon  $\Delta R$  ont été mesurées en filmant le bord périphérique de la goutte avec une caméra PixeLink située à son aplomb (voir Fig. 9.1). La résolution est de 99 pixels/mm. La position du bord de la goutte a été déterminée par seuillage sur chaque image.

Les fréquences de résonance ont été étudiées en excitant le vibreur de deux manières :

- (i) par une tension sinusoïdale dont la fréquence  $f_e$  est modulée linéairement par une rampe entre 2 et 50 Hz sur une durée de 200 s ( $f_e = at + b$  avec  $a = 0.24 \text{ s}^{-2}$  et  $b = 2 \text{ Hz}$ ), la résonance des ondes de surface ayant un régime transitoire court.
- (ii) par un bruit blanc filtré dans la bande de fréquence [2, 50] Hz pendant une durée de 200 s, la résonance étant linéaire sans seuil.

L'amplitude typique de vibration verticale du substrat est  $A_v \lesssim 1 \text{ mm}$  et l'accélération correspondante est  $\Gamma = A_v \omega_e^2 \lesssim 1 g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ . Nous n'avons pas observé d'effet de  $\Gamma$  sur les fréquences de résonance observées, ce qui confirme le caractère linéaire de la résonance. Les résultats obtenus avec les deux méthodes étant similaires, nous avons principalement réalisé des mesures avec le bruit blanc. Sauf mention contraire, les résultats concernent cette excitation.

Les mesures en bruit blanc ont été réalisées pour 5 volumes différents de goutte de ferrofluide ( $V = 1, 1.5, 2, 3$  et  $4 \text{ mL}$ ), 5 modes ( $m = 1$  à  $5$ ) et 9 champs magnétiques non nuls ( $B = 0, 22,$

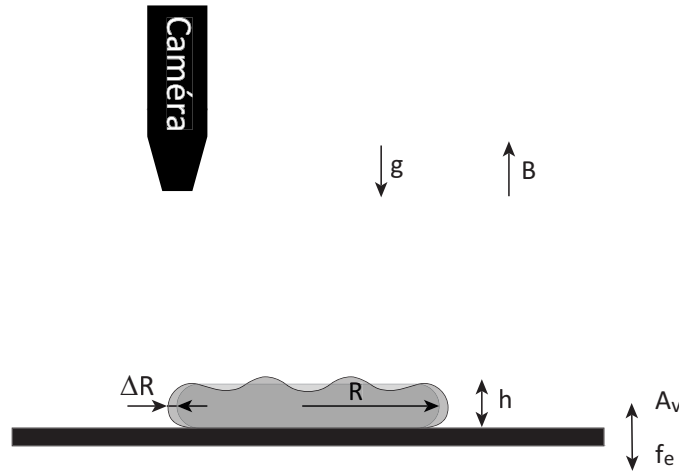


FIGURE 9.1 – Schéma du dispositif expérimental pour l'étude des modes axisymétriques.

33, 40, 44, 48, 53, 57 et 62 G). Toutes les combinaisons ont été réalisées, aboutissant à 225 mesures. Pour les différents volumes, la goutte avait une hauteur typique  $h \approx 3.5$  mm et des rayons respectifs  $R = 9.7, 11.8, 13.5, 16.4$  et  $18.9$  mm.

## 9.2 Fréquences propres sans champ magnétique

### 9.2.1 Résultats expérimentaux

Le rayon de la goutte peut être écrit sous la forme  $\bar{R}(t) = R + \Delta R(t)$  où  $R$  est le rayon à l'équilibre et  $\Delta R(t) \ll R$  sa variation autour de cette position d'équilibre dans le plan horizontal. La Fig. 9.2 montre les fluctuations du rayon  $\Delta R$  observées lors de l'excitation par une rampe en fréquence. La fréquence augmente donc linéairement avec le temps entre les fréquences 2 et 26 Hz. On voit que  $\Delta R$  atteint des maxima pour certaines fréquences.

La détermination des fréquences de résonance nécessite de calculer le spectre de puissance temporel de  $\Delta R(t)$ , à partir de sa transformée de Fourier 1D :

$$S_{\Delta R}(f) = \frac{1}{T} \left| \Delta \hat{R}(f) \right|^2 \quad \text{avec} \quad \Delta \hat{R}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Delta R(t) e^{i2\pi ft} dt \quad (9.1)$$

où  $T$  est la durée de la mesure. Ainsi,  $S_{\Delta R}$  donne le contenu fréquentiel du signal temporel  $\Delta R(t)$  et permet de repérer les fréquences pour lesquelles il y a résonance. On représente cette grandeur sur la Fig. 9.3 pour une excitation par un bruit blanc. La ligne rouge correspond au spectre de  $\Delta R$  tandis que la ligne noire représente le spectre de l'amplitude de vibration verticale du vibreur  $A_v$  pour comparaison. La position des pics observés correspondent aux fréquences de résonance de la goutte. Dans la suite, les pics sont identifiés par ordre croissant avec le numéro du mode axisymétrique  $m$ .

Pour chaque pic, la position du maximum  $f_m$  a été déterminée par un ajustement avec un polynôme du second degré. On représente sur la Fig. 9.4 le carré de la pulsation  $\omega_m = 2\pi f_m$  des différents modes  $m$  en fonction du volume  $V$  de la goutte. On observe que pour chaque mode, les fréquences propres diminuent lorsque le volume augmente. Dans la section suivante, nous tentons d'interpréter à la fois les fréquences de résonance observées pour les différents modes  $m$  mais aussi leur dépendance avec le volume de la goutte  $V$ .

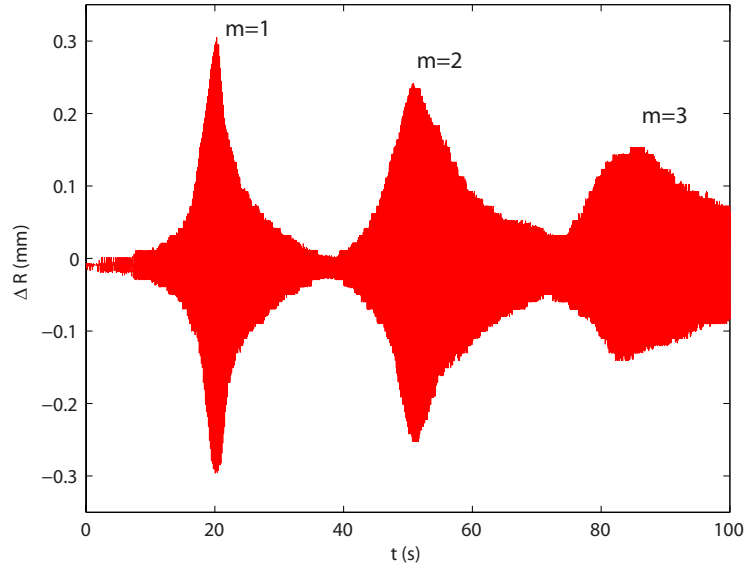


FIGURE 9.2 – Fluctuations du rayon  $\Delta R$  au cours du temps d'une goutte de ferrofluide de volume  $V = 1.5 \text{ mL}$  soumise à une rampe en fréquence entre 2 et 26 Hz ( $f = at + b$  avec  $a = 0.24 \text{ s}^{-2}$  et  $b = 2 \text{ Hz}$ ).  $B = 0$ .

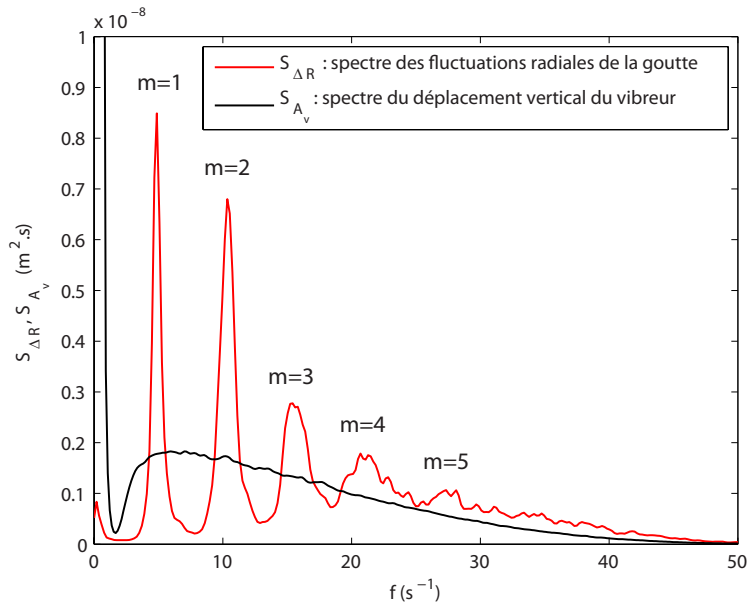


FIGURE 9.3 – Spectres de puissance temporels en fonction de la fréquence lorsque le vibreur est excité par un bruit blanc filtré entre 2 et 50 Hz. En noir : spectre du déplacement vertical du vibreur. En rouge : spectre des fluctuations du rayon  $\Delta R$  d'une goutte de volume  $V = 3 \text{ mL}$ .  $B = 0$ .  $m$  correspond au numéro du mode axisymétrique.

## 9.2.2 Interprétation

### 9.2.2.1 Ondes cylindriques gravito-capillaires

Comme on l'a vu dans la section 6.4, les modes axisymétriques peuvent être interprétés par la présence d'ondes stationnaires cylindriques à la surface de la goutte, excitées par la vibration du substrat. On représente sur la Fig. 9.5 le cas correspondant à notre expérience.

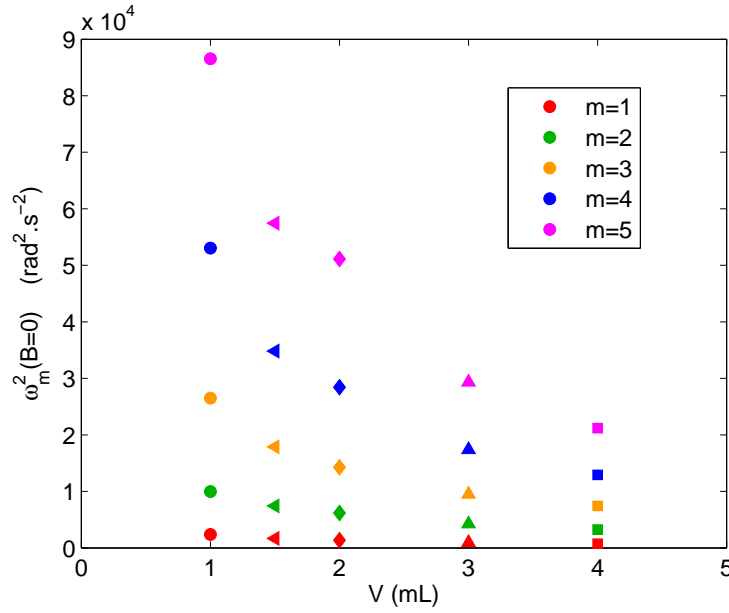


FIGURE 9.4 – Pulsation propre au carré  $\omega_m^2$  des modes  $m = 1$  à 5 en fonction du volume  $V$  de la goutte.  $B = 0$ .

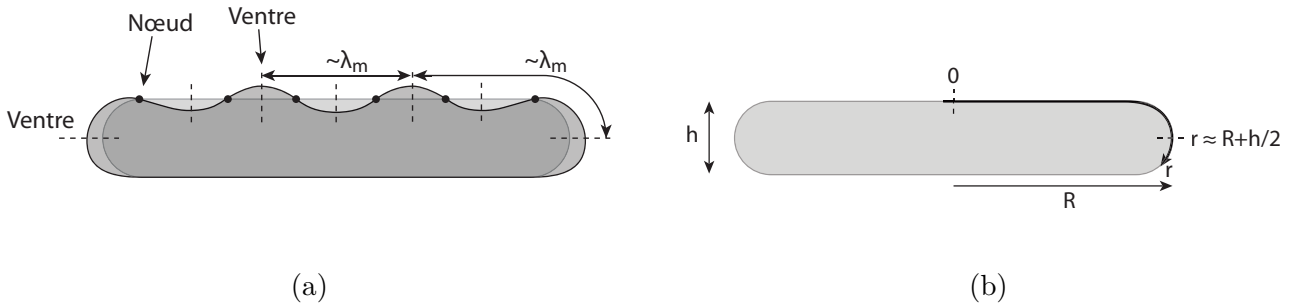


FIGURE 9.5 – (a) Vue latérale schématique du mode axisymétrique  $m = 3$  (coupe verticale passant par le centre). (b) Schéma de la goutte au repos sur laquelle on représente l'abscisse radiale curviligne  $r$  (flèche noire épaisse).

On rappelle que la relation de dispersion pour des ondes de surface gravito-capillaires de pulsation  $\omega = 2\pi f$  (avec  $f$  la fréquence) et de nombre d'onde  $k = 2\pi/\lambda$  (avec  $\lambda$  la longueur d'onde) dans un milieu de profondeur finie  $h$  s'écrit [62] :

$$\omega^2 = \left( gk + \frac{\gamma k^3}{\rho} \right) \tanh kh \quad (9.2)$$

On considère une abscisse curviligne  $r$ , schématisée sur la Fig. 9.5.b. L'origine  $r = 0$  est au-dessus de la goutte, centrée horizontalement, la direction de  $r$  est radiale et elle suit la courbure de l'interface liquide/air. Par analogie avec les ondes harmoniques cylindriques en régime linéaire (voir section 6.4.2), on considère que la déformation de la surface libre le long de cette abscisse peut s'écrire sous la forme (voir Eq. (6.7)) :

$$\eta(r, t) = \eta_0 J_0(kr) \cos \omega t \quad (9.3)$$

où  $\eta_0$  est l'amplitude de la déformation de la surface libre en  $r = 0$  et  $J_0$  est la fonction de Bessel

de première espèce et d'ordre zéro.

Si les ondes à la surface de la goutte respectent l'Eq. (9.2), les résonances observées pour les pulsations propres  $\omega_m$  des modes axisymétriques  $m$  devraient correspondre à des ondes stationnaires. Les nombres d'onde  $k_m$  sont alors fixés par la géométrie du système et déterminés par des conditions aux limites. Dans notre expérience, la condition aux limites considérée est que la périphérie de la goutte constitue des ventres pour les ondes stationnaires (voir Fig. 9.5.a). L'abscisse curviligne correspondant à ces ventres est donc  $r \approx R + h/2$  (voir Fig. 9.5.b). Cette condition s'écrit :

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial r} \right|_{r=R+h/2} = 0 \iff J_1 \left[ k_m \left( R + \frac{h}{2} \right) \right] = 0 \quad (9.4)$$

Les nombres d'ondes des modes propres  $m$  sont donc définis par les racines de la fonction de Bessel d'ordre 1,  $J_1$  :

$$k_m \left( R + \frac{h}{2} \right) = 3.83, 7.02, 10.17, 13.32, 16.47... \quad (9.5)$$

Il faut noter que  $k_m$  augmente avec le numéro du mode  $m$  et diminue avec le volume  $V$  de la goutte. Pour les différents modes  $m$  et les différents volumes de goutte  $V$  étudiés, on représente sur la Fig. 9.6 la pulsation propre au carré  $\omega_m^2$  mesurée expérimentalement en fonction des nombres d'ondes  $k_m$  calculés à partir de l'Eq. (9.5). La ligne noire représente la pulsation propre prédite théoriquement par la relation de dispersion (voir Eq. (9.2)). A noter que la connaissance de  $V$  et la mesure de  $R$  fixe la valeur de  $h = V/(\pi R^2) \approx 3.5$  mm.

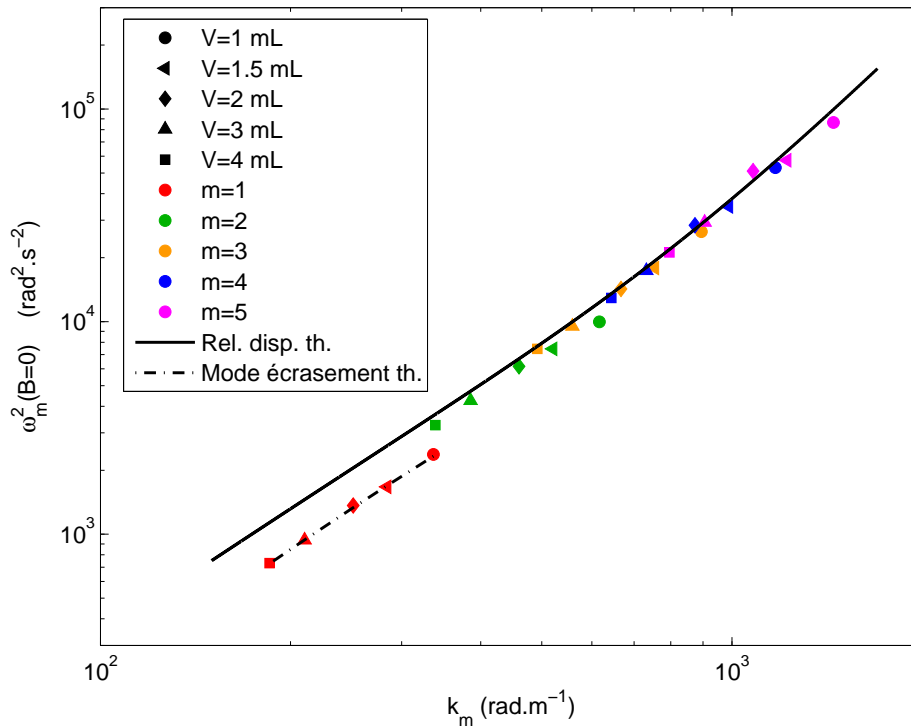


FIGURE 9.6 – Pulsation propre au carré  $\omega_m^2$  en fonction du nombre d'onde  $k_m$  associé à chaque mode (voir Eq. (9.5)).  $B = 0$ . Les volumes correspondent à  $h \approx 3.5$  mm et  $9.7 \text{ mm} \leq R \leq 18.9 \text{ mm}$ . La ligne noire représente la relation de dispersion des ondes (voir Eq. (9.2)) ; les pointillés représentent la pulsation prédite pour une résonance liée à l'écrasement de la goutte (voir section 9.2.2.2 et Eq. (9.9))

On observe un très bon accord entre les résultats théoriques et expérimentaux, sauf pour le mode  $m = 1$  et dans une moindre mesure le mode  $m = 2$ . Pour ces deux derniers modes, la différence vient du fait que  $k_1$  et  $k_2$  sont surestimés. En effet, on peut considérer que dans ces deux cas, la courbure proche du bord de la goutte ( $r \approx R$ ) impose la présence d'un nœud. La Fig. 9.7.a représente le cas du mode  $m = 1$ . On voit que la “demi-longueur d'onde” située entre les deux nœuds ( $\approx 2R$ ) est plus grande que celle prédite par l'Eq. (9.5) ( $\approx R$ ). Le nombre d'onde théorique  $k_1$  est donc surestimé, ce qui explique le décalage observé sur la Fig. 9.6.

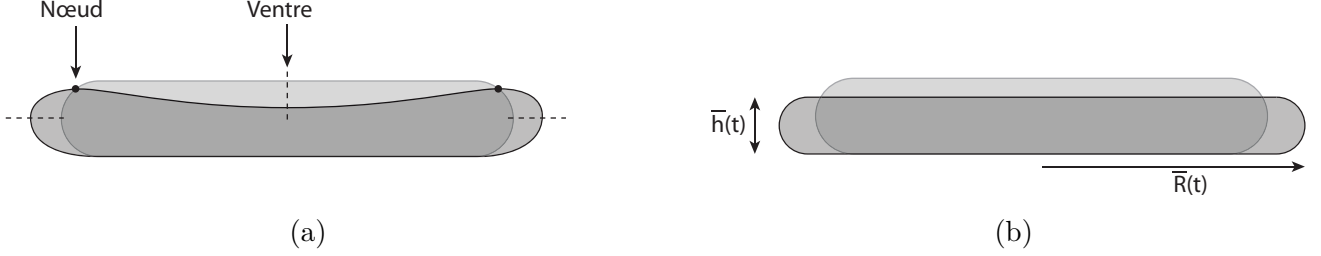


FIGURE 9.7 – (a) Vue latérale schématique du mode axisymétrique  $m = 1$ . (b) Schéma illustrant le mode d'écrasement, modèle dans lequel la goutte conserve une forme cylindrique (voir section 9.2.2.2)

### 9.2.2.2 Mode d'écrasement ( $m = 1$ )

Pour le mode  $m = 1$ , la modélisation via des ondes cylindriques n'est donc pas adaptée et on peut considérer qu'une meilleure approximation est le mode d'écrasement de la goutte, schématisé sur la Fig. 9.7.b. Dans ce modèle, la goutte aplatie oscille librement autour de son équilibre (voir annexe C) en conservant une forme cylindrique. Le calcul est détaillé dans l'annexe D. Il est à noter que  $h$  n'est pas nécessairement négligeable devant  $R$ .

On suppose un substrat superhydrophobe sur lequel est déposée une goutte aplatie incompressible de hauteur  $h$  et de rayon  $R$  à l'équilibre. Nous déterminons la fréquence d'oscillation de la goutte en écrivant la conservation de l'énergie du système. Pour une petite variation du rayon de la goutte autour du rayon d'équilibre  $\Delta R = \bar{R} - R \ll R$ , on montre que les variations d'énergies capillaire et gravitationnelle s'écrivent :

$$\Delta(E_c + E_g) = \left( 2\pi\gamma + \frac{2\gamma V}{R^3} + \frac{3\rho g V^2}{2\pi R^4} \right) (\Delta R)^2 \quad (9.6)$$

L'énergie cinétique de la goutte associée à ces oscillations s'écrit par ailleurs :

$$E_k(t) = \frac{\rho}{2} \left( \frac{d\Delta R}{dt} \right)^2 \left( \frac{V}{2} + \frac{4\pi \bar{h}(t)^3}{3} \right) \quad (9.7)$$

L'écriture de la conservation de l'énergie,  $d(E_k + E_c + E_g)/dt = 0$ , mène à l'équation décrivant les fluctuations du rayon :

$$\frac{d^2 \Delta R}{dt^2} + \omega_{1,\text{écr}}^2 \Delta R(t) = 0, \quad (9.8)$$

$$\text{avec } \omega_{1,\text{écr}}^2 = \left( \frac{V}{2} + \frac{4\pi h^3}{3} \right)^{-1} \left( \frac{4\pi\gamma}{\rho} + \frac{4\pi\gamma h}{\rho R} + 3\pi g h^2 \right) \quad (9.9)$$



$\omega_{1,\text{écr}} = 2\pi f_{1,\text{écr}}$  est la pulsation propre du mode  $m = 1$  (d'où indice 1) par le modèle d'écrasement de la goutte cylindrique. Sur la Fig. 9.6, on représente en pointillés la pulsation propre du mode d'écrasement  $\omega_{1,\text{écr}}$ , prédite par l'Eq. (9.9) en fonction de  $k_1$  calculé par l'Eq. (9.5). On observe un très bon accord avec les pulsations observées expérimentalement. La modélisation du mode  $m = 1$  par un mode d'écrasement d'une goutte cylindrique semble donc une bonne approximation.

En l'absence de champ magnétique, la combinaison d'un mode d'écrasement pour le mode  $m = 1$  et d'ondes de surface circulaires pour les modes supérieurs permet donc de prédire de façon précise les différentes fréquences de résonance du rayon de la goutte avant l'apparition des modes azimutaux. L'accord est très bon pour les différents volumes de goutte utilisés.

## 9.3 Fréquences propres avec champ magnétique

Comme nous l'avons vu dans la section 6.5.4, la relation de dispersion des ondes gravito-capillaires à la surface d'un ferrofluide est modifiée en présence d'un champ magnétique. On s'attend donc à un effet du champ magnétique sur les fréquences propres des modes axisymétriques de la section 9.2 décrits par de telles ondes.

### 9.3.1 Résultats expérimentaux

La Fig. 9.8 représente les fluctuations du rayon  $\Delta R$  lorsque la goutte est excitée par une rampe en fréquence, dans les mêmes conditions que la Fig. 9.2, mais en présence d'un champ magnétique  $B$ . On rappelle que la fréquence d'excitation augmente avec le temps. De même, la Fig. 9.9 fait apparaître le spectre de puissance temporel de  $\Delta R$  dans le cas d'une excitation par un bruit blanc dans les mêmes conditions que la Fig. 9.3, excepté la présence d'un champ magnétique.

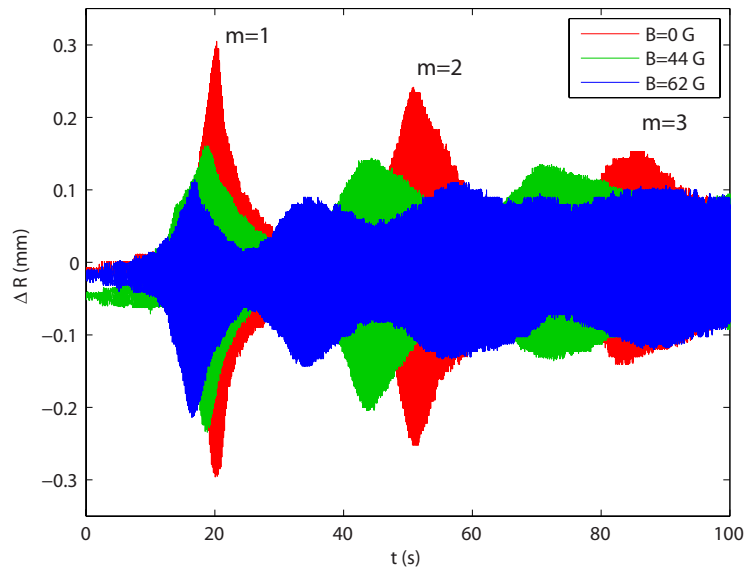


FIGURE 9.8 – Fluctuations du rayon  $\Delta R$  en fonction du temps d'une goutte de ferrofluide de volume  $V = 1.5 \text{ mL}$  excitée verticalement par une rampe en fréquence entre 2 et 26 Hz ( $f = at + b$  avec  $a = 0.24 \text{ s}^{-2}$  et  $b = 2 \text{ Hz}$ ) pour trois champs magnétiques croissants  $B = 0 \text{ G}$  (rouge),  $B = 44 \text{ G}$  (vert) et  $B = 62 \text{ G}$  (bleu).

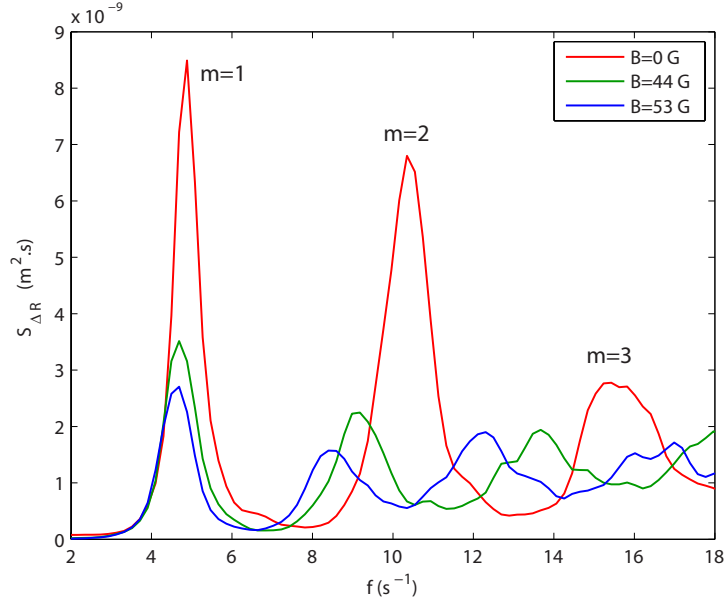


FIGURE 9.9 – Spectre de puissance temporel des fluctuations du rayon  $\Delta R$  d'une goutte de volume  $V = 3$  mL en fonction de la fréquence pour trois champs magnétiques croissants  $B = 0$  G (rouge),  $B = 44$  G (vert) et  $B = 62$  G (bleu). Le vibreur est excité par un bruit blanc filtré entre 2 et 50 Hz.

Ces deux figures montrent que les fréquences propres des modes axisymétriques de la goutte diminuent avec le champ magnétique. On note par ailleurs que l'amplitude des pics de résonance décroît avec le champ magnétique. Ceci peut s'expliquer par l'augmentation de la viscosité effective du ferrofluide avec le champ magnétique. En effet, les nanoparticules magnétiques composant le ferrofluide  $\text{n}^\circ 2$  sont en matériau ferromagnétique dur (voir section 7.3.1). Cela signifie qu'elles ont une aimantation rémanente qui reste fixe dans le référentiel de la particule. Les particules elles-mêmes (et non plus leur seule aimantation comme dans le cas d'un ferromagnétique doux) tendent alors à s'aligner avec le champ magnétique. La perte progressive de deux degrés de liberté conduit à un accroissement des frottements à l'intérieur du fluide et donc à une augmentation de la viscosité effective.

Pour étudier le décalage des fréquences propres avec le champ magnétique, on trace sur la Fig. 9.10 la différence entre les carrés des pulsations propres sans et avec champ magnétique,  $\omega_m^2(B=0) - \omega_m^2(B)$ , en fonction de  $B$ , pour différents modes  $m$ . Comme les fréquences propres diminuent lorsque  $B$  augmente, cette différence est positive. Pour chacun des modes, le décalage avec  $B$  suit des lois de puissances proportionnelles à  $B^2$ , représentées par les lignes noires. On en déduit que  $\omega_m^2(B=0) - \omega_m^2(B) \propto B^2$ . Par ailleurs, on observe que le décalage en fréquence augmente avec  $m$ .

## 9.3.2 Interprétation

### 9.3.2.1 Relation de dispersion ( $m > 1$ )

Comme dans la section 9.2.2, nous allons interpréter les fréquences propres observées à partir des ondes à la surface de la goutte. Comme on l'a vu dans la section 6.5.4, la relation de dispersion des ondes à la surface d'un ferrofluide est modifiée en présence d'un champ magnétique. Lorsque  $B$  est normal à la surface, la relation de dispersion pour des ondes gravito-capillaires à la surface d'un ferrofluide de perméabilité linéaire, d'étendue infinie mais de profondeur finie s'écrit [69] :

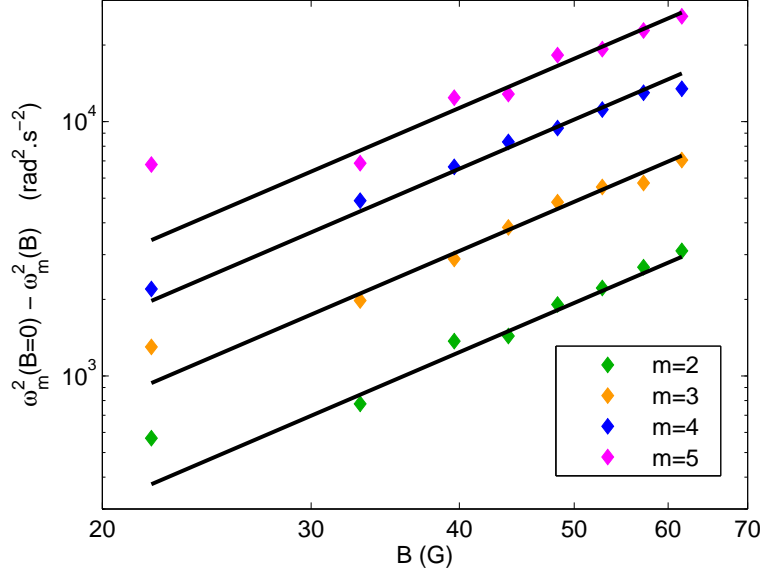


FIGURE 9.10 – Décalage des fréquences propres des modes 2 à 5 en fonction du champ magnétique  $B$  pour une goutte de volume  $V = 2$  mL. Les lignes noires représentent des lois de puissance en  $B^2$ .

$$\omega^2 = \left[ gk + \frac{\gamma k^3}{\rho} - \frac{\chi^2 B^2 k^2}{\rho \mu_0 (1 + \chi)(2 + \chi)} \left( \frac{1 - \left( \frac{\chi}{2 + \chi} \right) e^{-2kh}}{1 - \left( \frac{\chi}{2 + \chi} \right)^2 e^{-2kh}} \right) \right] \tanh kh \quad (9.10)$$

La diminution des fréquences propres avec  $B$  s'explique donc par le fait que le terme magnétique est négatif (le terme entre parenthèses est positif). On retrouve par ailleurs dans l'Eq. (9.10) la loi de puissance en  $B^2$  observée expérimentalement et l'augmentation du décalage avec  $k$  et donc avec le mode  $m$ .

### 9.3.2.2 Mode d'écrasement ( $m = 1$ )

Le décalage en fréquence du mode 1 peut à nouveau être interprété par le mode d'écrasement étudié sans champ magnétique dans la section 9.2.2.2. Il suffit pour cela d'inclure l'énergie magnétique dans le bilan de conservation de l'énergie :  $d(E_k + E_c + E_g + E_m)/dt = 0$ . De la même manière, en utilisant l'expression de l'énergie magnétique de l'Eq. (C.3), on peut montrer que pour une petite variation du rayon de la goutte  $\Delta R$ , la variation d'énergie magnétique s'écrit :

$$\Delta E_m = \frac{3\chi^2 B^2 V^2}{2\pi \mu_0 R^5 (1 + \chi + V/(\pi R^3))^2} \left( \frac{3V}{\pi R^3 (1 + \chi + V/(\pi R^3))} - 2 \right) (\Delta R)^2 \quad (9.11)$$

Le principe du calcul est le même que dans la section 9.2.2.2. La fréquence propre du mode d'écrasement de l'Eq. (9.9) s'écrit en présence d'un champ magnétique :

$$\omega_{1,écr}^2 = \left( \frac{V}{2} + \frac{4\pi h^3}{3} \right)^{-1} \left( \frac{4\pi\gamma}{\rho} + \frac{4\pi\gamma h}{\rho R} + 3\pi g h^2 - \frac{3\pi\chi^2 B^2 h^2 [2(1 + \chi) - h/R]}{\rho \mu_0 R (1 + \chi + h/R)^3} \right) \quad (9.12)$$

Pour les modes  $m > 1$ , les fréquences propres théoriques sont obtenues par la relation de dispersion théorique d'Eq. (9.10), avec  $k = k_m$  le nombre d'ondes du mode propre  $m$  donné par l'Eq. (9.5).

Ainsi, pour l'ensemble des modes  $m$ , le décalage théorique en fréquence avec  $B$  s'écrit :

$$\omega_{m,th}^2(B=0) - \omega_{m,th}^2(B) = \begin{cases} \frac{3\pi\chi^2 B^2 h^2 \left[2(1+\chi) - \frac{h}{R}\right]}{\rho\mu_0 R \left(1+\chi + \frac{h}{R}\right)^3 \left(\frac{V}{2} + \frac{4\pi h^3}{3}\right)} & \text{pour } m = 1 \\ \frac{\chi^2 B^2 k_m^2}{\rho\mu_0(1+\chi)(2+\chi)} \left( \frac{1 - \left(\frac{\chi}{2+\chi}\right) e^{-2k_m h}}{1 - \left(\frac{\chi}{2+\chi}\right)^2 e^{-2k_m h}} \right) \tanh k_m h & \text{pour } m > 1 \end{cases} \quad (9.13)$$

Sur la Fig. 9.11, on trace le décalage en fréquence observé expérimentalement  $\omega_m^2(B=0) - \omega_m^2(B)$  en fonction de celui prédit théoriquement par l'Eq. (9.13).

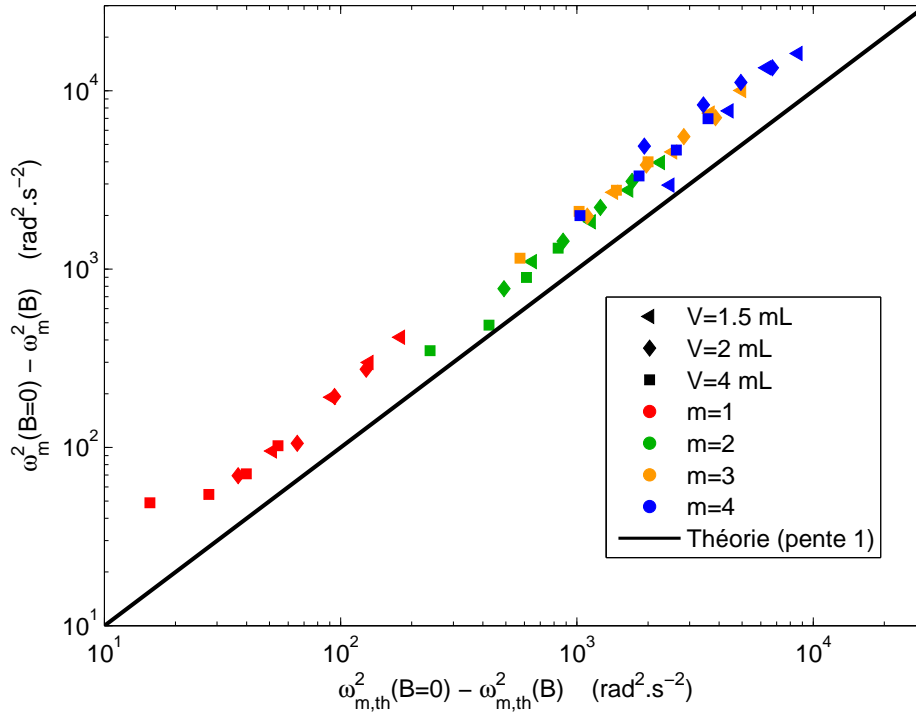


FIGURE 9.11 – Décalage en fréquence expérimental des modes propres  $m$  en fonction du décalage prédit théoriquement (voir Eq. (9.13)) pour différents  $m$ ,  $V$  et  $B$ . La ligne noire représente le cas d'un accord entre théorie et expérience (pente 1). La combinaison des différents modes, volumes et champs étudiés correspond à 200 points de mesures pour les champs magnétiques non nuls. Pour une meilleure lisibilité, seule une partie des volumes (correspondant à  $h \approx 3.5$  mm et  $11.8 \text{ mm} \leq R \leq 18.9$  mm), des modes et des champs magnétiques ( $B = 33, 44, 53, 62$  G) réalisés expérimentalement sont représentés<sup>1</sup>.

On observe que les points représentant l'ensemble des modes, des volumes et des champs magnétiques se rassemblent autour d'une même droite. La loi d'évolution du décalage des fréquences propres en fonction de ces paramètres est donc bien prédit par le mode d'écrasement et la relation de dispersion des ondes de surface en présence d'un champ magnétique. En revanche, l'amplitude réelle du décalage des fréquences au carré est supérieure au décalage prédit théoriquement d'un facteur proche de 2.

1. Il est à noter que le mode  $m = 1$  du plus petit volume ( $V = 1$  mL) présente un comportement particulier qui n'a pas été représenté pour faciliter la discussion.

### 9.3.2.3 Explication du préfacteur observé

La relation de dispersion en présence d'un champ magnétique, décrite par l'Eq. (9.10), suppose que le ferrofluide est d'étendue infinie. Dans cette hypothèse, le champ magnétique est normal à l'ensemble de la surface et l'aimantation du ferrofluide au repos y est donc  $M = \chi B / [\mu_0(1 + \chi)]$  (voir section 6.5.3). Dans notre cas, le ferrofluide étant d'étendue finie, l'aimantation n'est pas uniforme et est supérieure à cette valeur. En effet, rappelons que l'aimantation dans le cas d'un plan parallèle à  $B$  est de la forme  $M = \chi B / \mu_0$  (voir section 6.5.3), soit 4.2 fois supérieure à celle considérée dans la relation de dispersion (pour  $\chi = 3.2$ ). L'effet du champ magnétique sur les ondes de surface sera donc supérieur à celui prédit par la relation de dispersion d'Eq. (9.10), en particulier au niveau des bords de la goutte.

Dans l'annexe C, étudiant la déformation par le champ magnétique d'une goutte aplatie au repos, nous montrons l'influence de cette aimantation plus forte à la périphérie de la goutte. La prise en compte de ce phénomène permet d'expliquer l'apparition d'un bourrelet à la périphérie de la goutte en présence de champ magnétique. On observe alors une variation du rayon supérieure à celle prédite par la théorie. C'est d'ailleurs ce bourrelet qui permet d'expliquer la différence entre les décalages en fréquence prédits et observés pour le mode d'écrasement ( $m = 1$ ). En effet les fluctuations du rayon observées sont probablement celles de ce bourrelet, dont l'aimantation est supérieure à celle moyennée sur l'ensemble de la goutte car situé en périphérie. L'effet du champ magnétique sera donc là encore plus grand que celui prédit par la théorie décrite dans la section 9.3.2.2. Cette nouvelle géométrie est par ailleurs susceptible de modifier la fréquence propre indépendamment de l'aimantation.

Enfin, la goutte au repos est déformée par le champ magnétique extérieur et  $R$  varie ainsi sensiblement avec  $B$  (voir annexe C). On peut imaginer que cela joue un rôle puisque, par exemple, les nombres d'ondes  $k_m$  impliqués dans la relation de dispersion dépendent de  $R$ . Ce possible effet, étudié dans l'annexe C, ne semble pas améliorer les prédictions théoriques.

## 9.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les fluctuations du rayon d'une goutte aplatie déposée sur un substrat superhydrophobe, soumis à une vibration verticale de faible amplitude, en-dessous du seuil d'apparition des modes azimutaux. Nous avons observé des résonances linéaires sans seuil du rayon que nous avons expliquées par la présence d'ondes circulaires à la surface de la goutte qui se propage jusqu'à la périphérie. Les modes propres axisymétriques correspondent alors aux ondes stationnaires fixées par les conditions aux limites et donc la géométrie de la goutte. Nous avons montré en l'absence de champ magnétique que les fréquences propres de ces modes sont prédites théoriquement de façon précise à partir de la relation dispersion des ondes gravito-capillaires. La fréquence de résonance la plus basse est quant à elle prédite par le calcul de la fréquence propre du mode d'écrasement de la goutte.

Comme pour les modes azimutaux du chapitre précédent, nous observons une diminution des fréquences propres des modes axisymétriques en présence d'un champ magnétique. L'ajout de termes magnétiques dans les calculs permet de prédire la loi d'évolution des fréquences propres avec le champ magnétique des différents modes pour différents volumes. De la même manière que celles des modes azimutaux, les fréquences propres des modes axisymétriques d'une goutte de ferrofluide peuvent donc être contrôlées par un champ magnétique.

Le décalage des fréquences propres des modes axisymétriques avec le champ magnétique est par

ailleurs similaire à celui des modes azimutaux décrits au chapitre précédent. Dans les deux cas, le décalage des fréquences propres au carré est proportionnel au carré du champ magnétique :  $f_{m,n}^2(B=0) - f_{m,n}^2(B) \propto B^2$ . De plus, les fluctuations du rayon induites par les modes axisymétriques sont le paramètre d'excitation des modes azimutaux. Une expérience contrôle apparaît donc nécessaire pour vérifier que ce couplage entre modes axisymétriques et modes azimutaux n'est pas l'origine du décalage observé avec le champ magnétique des fréquences propres des modes azimutaux.

# Chapitre 10

## Modes azimutaux : expérience contrôle

### 10.1 Problématique

Nous avons vu dans la section 6.3.2 que l'instabilité paramétrique provoquant l'apparition des modes azimutaux à la périphérie de la goutte est pilotée par les fluctuations du rayon dont l'amplitude est le paramètre d'excitation. Dans le chapitre 8, nous avons supposé que ce paramètre d'excitation était équivalent au paramètre de contrôle, l'accélération du vibreur. Nous avons donc considéré que l'amplitude des oscillations du rayon de la goutte était proportionnelle à l'accélération du vibreur. Toutefois, le chapitre 9 montre que des modes axisymétriques induisent des résonances des fluctuations du rayon à certaines fréquences. De plus, les fréquences propres des modes azimutaux et des modes axisymétriques évoluent de la même manière avec le champ magnétique. Dans les deux cas, le décalage des fréquences propres au carré est ainsi proportionnel au carré du champ magnétique :  $f_n^2(B=0) - f_n^2(B) \propto B^2$ .

On peut dès lors imaginer que le décalage avec le champ magnétique des fréquences propres des modes axisymétriques pourrait expliquer celui des modes azimutaux. Ce chapitre propose une expérience contrôle pour vérifier que ce dernier n'est pas piloté par le couplage entre modes axisymétriques et modes azimutaux. Pour cela, nous avons posé une plaque, fixe dans le référentiel du laboratoire, sur la surface supérieure de la goutte afin d'éliminer les modes axisymétriques.

### 10.2 Protocole expérimental

#### 10.2.1 Modification du dispositif

Le dispositif expérimental, décrit au chapitre 7, a ainsi été modifié afin d'éliminer les modes axisymétriques provoqués par des ondes à la surface de la goutte. Nous avons disposé une plaque en verre en contact avec la surface supérieure de la goutte. La plaque est fixe dans le référentiel du laboratoire et parallèle au substrat vibré (voir Fig. 10.1). Elle a été traitée de façon superhydrophobe avec l'Ultra Ever Dry (voir section 7.2). L'utilisation de verre permet de visualiser la goutte par le dessus au cours de l'expérience.

Bien que cette deuxième plaque crée une force de frottement supplémentaire avec la goutte, les avantages de la présence d'une plaque au-dessus de la goutte sont multiples :

- la plaque supprime les ondes de surface au-dessus de la goutte. Les modes axisymétriques n'existent donc plus. L'amplitude  $\Delta R$  d'oscillation du rayon avant l'apparition des modes azi-

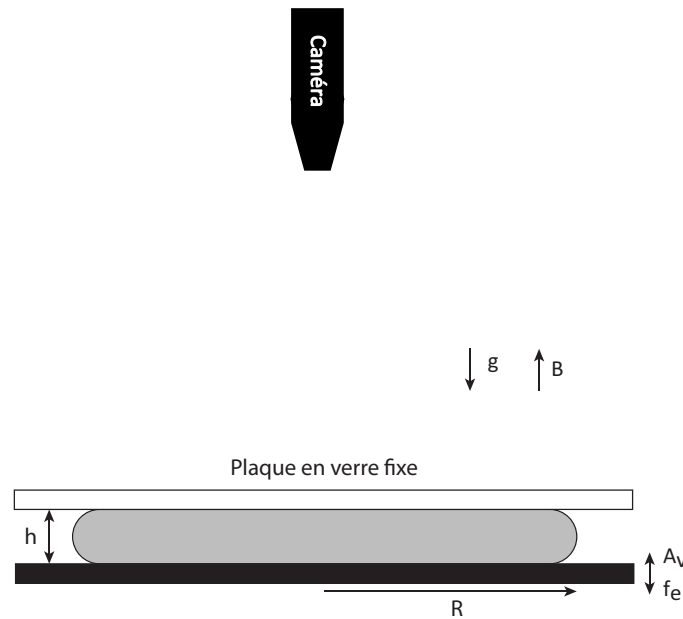


FIGURE 10.1 – Schéma du dispositif expérimental de l’expérience contrôlée. À la différence du chapitre 8, une plaque en verre, fixe dans le référentiel du laboratoire, est placée au-dessus de la goutte.

mutaux est donc directement contrôlée par l’amplitude du mouvement du vibreur. Nous avons vérifié expérimentalement l’absence de résonances axisymétriques en présence de la plaque ;

- des déformations de la surface supérieure de la goutte, différentes des ondes circulaires, sont visibles lors de l’apparition des lobes (voir Fig. 6.1). L’élimination de ces déformations avec la plaque permet de vérifier que celles-ci n’ont pas d’effet dans le décalage en fréquence observé dans le chapitre 8 ;
- les fluctuations du rayon de la goutte  $\Delta R$ , qui sont le paramètre d’excitation de l’instabilité (voir section 6.3.2), deviennent un paramètre de contrôle car  $\Delta R$  est directement contrôlé par la vibration du substrat. On peut par ailleurs atteindre des déformations importantes du rayon pour des accélérations du substrat inférieures à celles du chapitre 8 ;
- il est possible de faire varier la hauteur initiale  $h$  de la goutte et ainsi d’étudier son influence. Par ailleurs, pour les valeurs de  $B$  considérées, la goutte ne se déforme pas avec le champ magnétique. Ainsi,  $h$  et  $R$  ne varient pas avec  $B$ .

### 10.2.2 Protocole

La détermination des fréquences propres des modes azimutaux à partir des minima des langues de Mathieu n’a pas été possible avec ce dispositif. En effet, les mesures des amplitudes seuils du vibreur, au-delà desquelles les modes azimutaux sont observés, présentent de fortes variations. Ce bruit dans les mesures, présent malgré l’utilisation de rampes lentes en amplitude, ne permet pas la détection de minima avec certitude. Comme alternative, nous avons tenté de détecter le seuil de disparition des lobes avec une rampe décroissante en amplitude. Les “langues” de Mathieu obtenues de cette manière sont beaucoup moins bruitées mais ne présentent pas de minima précis : l’amplitude seuil de disparition est constante sur une grande partie du domaine de fréquence d’excitation où existe un mode azimutal  $n$  donné.

Le protocole expérimental finalement retenu consiste alors à détecter les frontières des modes en termes de fréquences : pour chaque mode azimutal constitué de  $n$  lobes, on détermine les fréquences d’excitation minimale  $f_{e,n,min}$  et maximale  $f_{e,n,max}$  où existe ce mode pour une amplitude du vibreur



maximale donnée (voir section 10.3). On considère alors que la fréquence centrale de ce domaine,  $f_{e,n} = (f_{e,n,max} + f_{e,n,min})/2$ , est le double de la fréquence propre du mode azimutal, *i.e.*  $f_{e,n} = 2f_n$  (voir explications dans la section 10.3).

Nous avons remarqué lors d'expériences préliminaires qu'à proximité des frontières entre modes, l'amplitude du vibreur pouvait influencer sur le nombre de lobes observés. Pour chaque mode azimutal, l'amplitude de l'excitation a donc été conservée pour tous les champs magnétiques étudiés. De même, la vitesse de croissance de l'amplitude du vibreur pouvait avoir un effet sur le nombre de lobes. Nous avons donc utilisé une rampe en amplitude de durée 80 s pour chaque fréquence d'excitation  $f_e$ .

L'étude a été réalisée sur 5 modes ( $n = 5$  à  $9$ ), 4 rayons ( $R = 10.5, 14.5, 15$  et  $18$  mm) et 2 hauteurs de goutte ( $h = 2.1$  et  $2.9$  mm). Pour chaque jeu de paramètres ( $n, R, h$ ), les fréquences propres ont été mesurées pour 5 champs magnétiques différents ( $B = 0, 33, 44, 55$  et  $66$  G). La résolution en fréquence est de  $0.1$  Hz. L'amplitude typique de l'accélération du vibreur est  $\Gamma \sim 0.2 g = 2 \text{ m.s}^{-2}$ , ce qui correspond à des déplacements verticaux de l'ordre de  $0.2$  mm selon la fréquence d'excitation.

## 10.3 Observations

La Fig. 10.2 représente le diagramme de phase des lobes en présence d'une plaque en fonction du champ magnétique  $B$  appliqué et de la fréquence d'excitation  $f_e$ . Chaque surface colorée représente la zone d'observation où existe une goutte avec un certain nombre de lobes  $n$  à sa périphérie. On observe que les domaines se déplacent vers les basses fréquences lorsque  $B$  augmente.

Nous souhaitons déterminer les fréquences propres  $f_n$  des modes azimutaux à partir de ces domaines d'existence. Dans la section 6.3.2, nous avons représenté les zones d'instabilité d'un mode azimutal dans un diagramme de phase présentant l'amplitude d'oscillation du rayon de la goutte,  $\varepsilon$ , en fonction de la fréquence d'excitation (voir Fig. 6.4). Ces zones d'instabilité ont la forme de langues. L'amplitude seuil d'apparition des lobes  $\varepsilon_c$  est minimale pour le mode fondamental lorsque la fréquence d'excitation verticale est le double de la fréquence propre du mode  $f_n$  (à gauche sur la Fig. 6.4). Pour de faibles oscillations du rayon ( $\varepsilon \ll 1$ ), la langue d'instabilité est symétrique autour de cette fréquence. Nous considérons donc ici que la fréquence centrale du domaine d'existence d'un mode azimutal,  $f_{e,n} = (f_{e,n,max} + f_{e,n,min})/2$ , tracée en pointillé sur la Fig. 10.2, correspond aussi à ce minimum. La fréquence propre du mode azimutal  $n$  mesurée est alors  $f_n = f_{e,n}/2$ . On observe donc immédiatement que  $f_n$  décroît avec le champ magnétique, ce qui confirme qualitativement les résultats du chapitre 8.

## 10.4 Modes propres sans champ magnétique

Comme dans le chapitre 8, en l'absence de champ magnétique, l'expression théorique de la pulsation propre du mode  $n$ ,  $\omega_n = 2\pi f_n$ , est (voir Eq. (6.4)) :

$$\omega_n^2 = \frac{\gamma}{\rho R^3} n(n^2 - 1) \quad (10.1)$$

Pour les différents modes, rayons et hauteurs étudiés, on trace sur la Fig. 10.3 la pulsation propre mesurée expérimentalement en fonction de  $n(n^2 - 1)/R^3$ . La prédiction théorique tracée en noir présente un très bon accord avec les données expérimentales pour l'ensemble des jeux de paramètres étudiés.

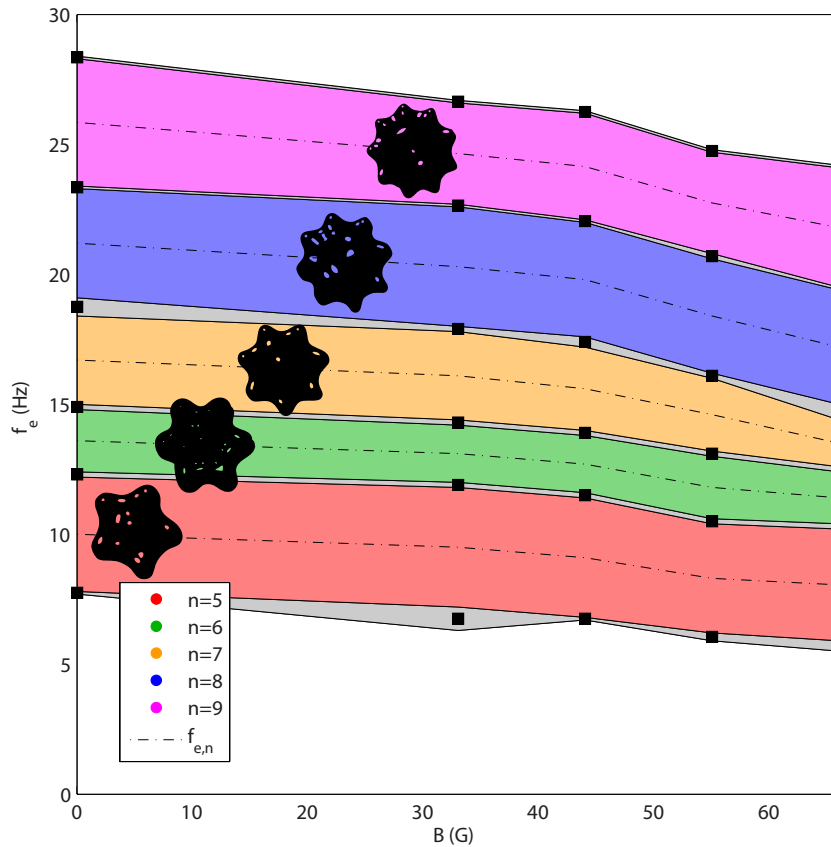


FIGURE 10.2 – Diagramme de phase pour une goutte de rayon  $R = 14.5$  mm et de hauteur  $h = 2.9$  mm, représentant les domaines de fréquence d'excitation  $f_e$  pour lesquels on observe un nombre  $n$  de lobes en fonction du champ magnétique  $B$ . Les fréquences centrales des modes  $f_{e,n}$  sont en pointillés. Les carrés noirs représentent les champs pour lesquels les frontières entre modes ont été déterminées.

## 10.5 Modes propres avec champ magnétique

Comme on l'a vu sur la Fig. 10.2, les fréquences propres de la goutte diminuent en présence de champ magnétique. On représente sur la Fig. 10.4 le décalage des pulsations propres au carré,  $\omega_m^2(B = 0) - \omega_m^2(B)$ , en fonction du champ magnétique. Le décalage observé est proportionnel à  $B^2$ .

Ceci est conforme au décalage en fréquence prédit par la théorie que nous avons développée au chapitre 8 (voir Eq. (8.3)) :

$$\omega_n^2(B) - \omega_n^2(B = 0) = \gamma_m \frac{n(n^2 - 1)}{\rho R^3} \quad (10.2)$$

$$\text{avec } \gamma_m = -\frac{\chi^2 h B^2}{4\mu_0 (1 + \chi + h/R)^2} < 0$$

$\gamma_m$  est équivalent à une tension de surface négative modulable avec le champ magnétique. L'Eq. (10.2) montre que le décalage dépend aussi du nombre de lobes  $n$ , du rayon  $R$  et de la hauteur  $h$  de la goutte. La Fig. 10.5 représente le décalage en fréquence observé en fonction de celui prédit théoriquement par

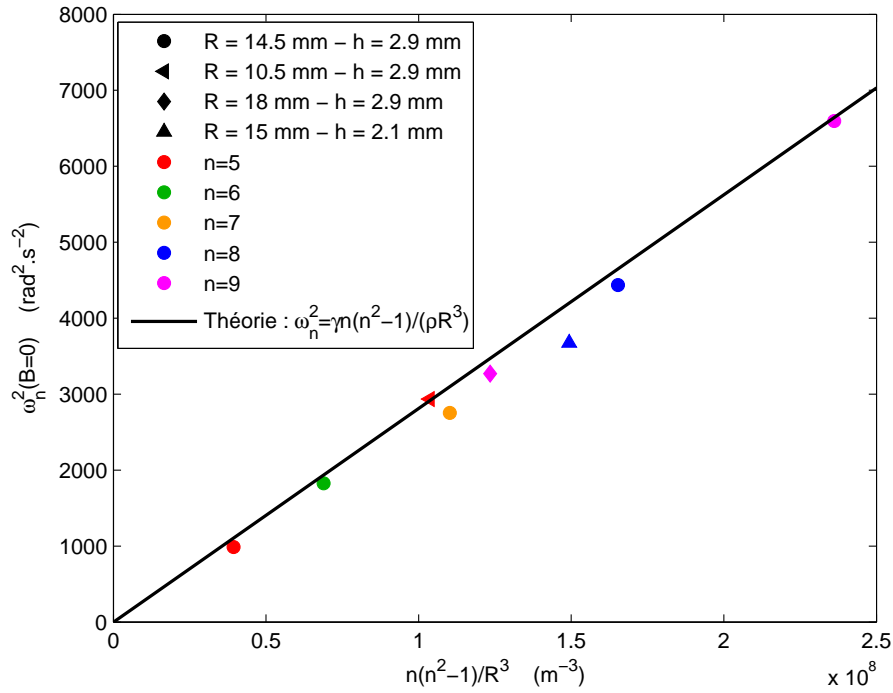


FIGURE 10.3 – Pulsation propre au carré  $\omega_n^2$  pour les modes  $n$  en fonction de  $n(n^2 - 1)/R^3$ .  $B = 0$ . La ligne noire représente la prédiction théorique d'Eq. (10.1).

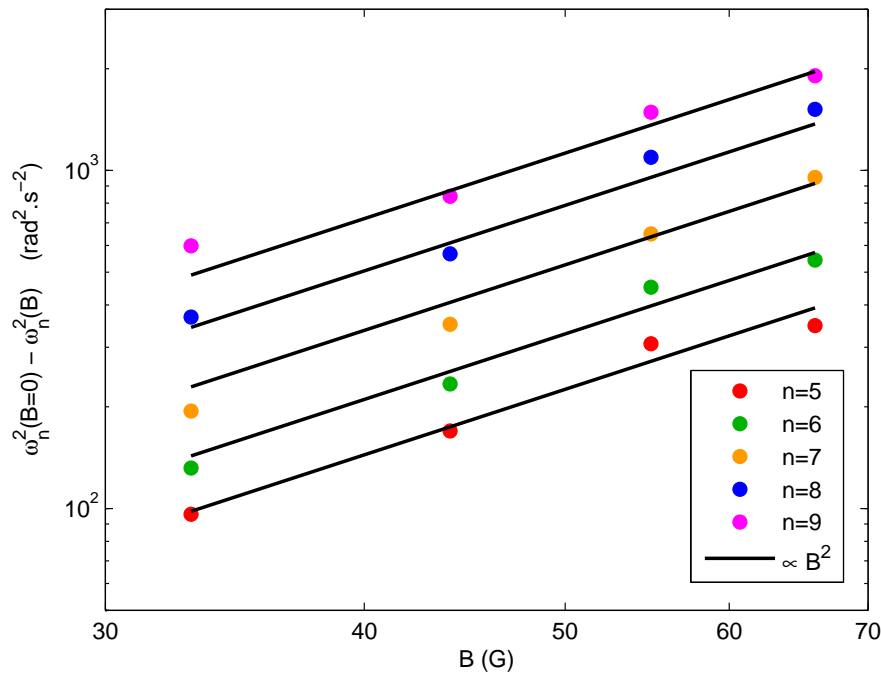


FIGURE 10.4 – Décalage en fréquence des modes propres en fonction de  $B$  pour différents nombre de lobes  $n$  ( $R = 14.5$  mm,  $h = 2.9$  mm). Les lignes noires représentent des lois de puissance en  $B^2$ .

l'Eq. (10.2). On voit que l'ensemble des mesures qui font varier les quatre paramètres se rassemblent sur une même droite. De plus, la prédiction théorique, représentée par la ligne noire de pente 1 sans paramètre ajustable, présente un excellent accord avec le décalage en fréquence observé. Les

mesures expérimentales sont donc compatibles avec les dépendances en  $B$ ,  $n$ ,  $R$  et  $h$  des fréquences de résonances prédites par notre théorie. On note par ailleurs qu'il n'y a pas de différence notable par rapport aux résultats sans plaque (voir chapitre 8). L'influence des ondes sur la surface supérieure de la goutte est donc faible.

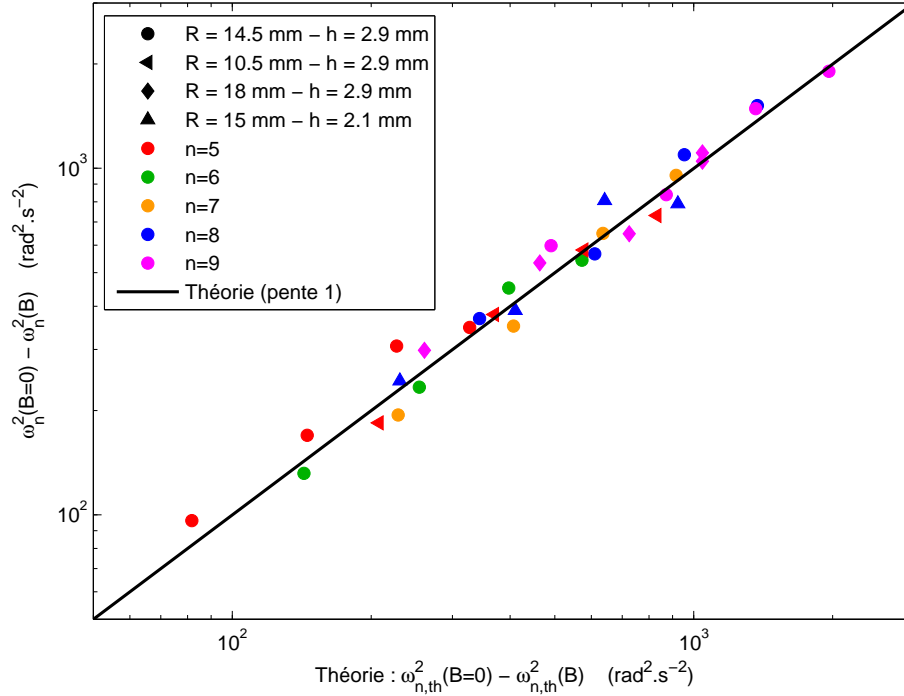


FIGURE 10.5 – Décalage en fréquence des modes propres en fonction du décalage prédit théoriquement d'Eq. (10.2) pour différentes valeurs de  $B$ ,  $n$ ,  $R$  et  $h$ . La ligne noire représente le cas d'un accord entre théorie et expérience (pente 1 sans paramètre ajustable).

## 10.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les modes azimutaux à la périphérie d'une goutte de ferrofluide vibrée contrainte par une plaque fixée au contact de sa surface supérieure. Ainsi, contrairement au chapitre 8, les ondes gravito-capillaires sur la surface supérieure de la goutte et donc les modes axisymétriques (voir chapitre 9) ont ici été éliminés. Cette expérience constitue donc une expérience contrôle visant à éviter tout couplage entre modes azimutaux et modes axisymétriques. La hauteur et le rayon à l'équilibre de la goutte, ainsi que leurs fluctuations lors de l'excitation, sont par ailleurs parfaitement contrôlés. En l'absence de champ magnétique, les fréquences propres observées des modes azimutaux sont très bien prédites par la théorie de Rayleigh [36]. En présence de champ, nous trouvons un excellent accord entre le décalage des fréquences propres de la goutte observé expérimentalement et celui que nous prédisons théoriquement par le modèle développé au chapitre 8. Ceci valide donc le mécanisme physique proposé, montrant que le champ magnétique permet de moduler la tension de surface effective de la goutte dans ce problème et ainsi de contrôler ses fréquences propres.

# Chapitre 11

## Conclusion

Dans cette partie, nous avons étudié les déformations d'une goutte de ferrofluide déposée sur un substrat superhydrophobe soumis à une vibration verticale en l'absence ou en présence d'un champ magnétique. La goutte au repos était aplatie par la gravité et donc de forme quasi-cylindrique en raison des grands volumes utilisés ( $1 \leq V \leq 4$  mL).

Pour des mouvements du substrat de faible amplitude, on observe des déformations au-dessus de la goutte, provoquant des fluctuations de son rayon (voir chapitre 9). D'abord en l'absence de champ magnétique, nous avons décrit ces déformations par des ondes circulaires gravito-capillaires en régime linéaire à la surface de la goutte se propageant jusqu'à sa périphérie (voir Fig. 6.2.b). Les fluctuations du rayon présentent alors des résonances sans seuil pour certaines fréquences d'excitation qui correspondent à des ondes stationnaires gravito-capillaires. Nous avons montré que les fréquences propres spatiales de ces modes axisymétriques sont fixées par les conditions aux limites et donc la géométrie de la goutte. Les fréquences propres temporelles peuvent alors être retrouvées par la relation de dispersion des ondes de surface gravito-capillaires.

Au-delà d'un certain seuil d'amplitude de vibration du substrat, des modes azimutaux apparaissent sous forme de lobes à la périphérie de la goutte (voir chapitres 8 et 10 et Fig. 6.2.a). Il s'agit là d'une instabilité paramétrique non linéaire à seuil. Les modes azimutaux peuvent être décrits par des ondes stationnaires capillaires. La présence de lobes augmente la surface périphérique de la goutte. Les forces de tension de surface tendent alors à ramener la goutte à sa forme cylindrique d'équilibre. Les oscillations résultent alors d'un échange entre énergie capillaire et énergie cinétique. L'écriture de la conservation de l'énergie permet de prédire les fréquences propres observées des modes azimutaux.

Nous avons alors étudié l'effet du champ magnétique sur ces modes propres axisymétriques et azimutaux. Dans les deux cas, la fréquence du mode propre,  $f_m$  ou  $f_n$ , décroît en présence d'un champ magnétique vertical  $B$  et le décalage de  $f_m^2$  ou  $f_n^2$  est proportionnel à  $B^2$ . Cette diminution s'explique par le fait que les déformations de la goutte liées à ces modes font diminuer l'énergie magnétique, proportionnelle à  $B^2$ . En effet, on sait que l'aimantation d'un ferrofluide diminue lorsque sa surface parallèle à  $B$  augmente. Ainsi, pour les modes azimutaux, les lobes à la périphérie de la goutte entraînent une augmentation de la surface périphérique, parallèle à  $B$ , ce qui réduit l'énergie magnétique de la goutte. De même, pour les modes axisymétriques, les ondes circulaires sur la face supérieure de la goutte augmentent la composante de la surface parallèle à  $B$ . Comme l'énergie magnétique diminue, la conservation de l'énergie impose que les fréquences des modes propres azimutaux diminuent.

Nous sommes parvenus à expliquer théoriquement et quantitativement les décalages des fréquences propres observés en présence de champ magnétique. Pour les modes axisymétriques, la relation de dispersion des ondes gravito-capillaires peut être modifiée par l'ajout d'un terme magnétique, utilisé

pour les ondes à la surface d'un ferrofluide en milieu infini. Ceci permet de prédire la loi d'évolution du décalage observé des fréquences propres. Pour les modes azimutaux, nous avons développé un modèle qui permet de décrire la contribution magnétique comme l'équivalent d'une tension de surface négative. La tension de surface effective de la goutte peut ainsi directement être ajustée par le champ magnétique. Le décalage observé expérimentalement des fréquences des modes propres azimutaux est très bien prédit par ce modèle sans paramètre ajustable, à la fois qualitativement et quantitativement pour différents nombre de lobes, volumes et champs magnétiques.

Les fréquences propres des modes axisymétriques et azimutaux d'une goutte de ferrofluide peuvent donc être modifiées continûment au moyen d'un champ magnétique extérieur. L'ajout de particules magnétiques dans une goutte d'eau permet donc d'envisager de pouvoir contrôler ses fréquences de résonance qui peuvent avoir un intérêt ou au contraire être gênantes dans certaines applications pratiques.

# Annexe A

## Calcul des fréquences propres des modes azimutaux à la périphérie d'une goutte aplatie

Le calcul des fréquences propres des modes azimutaux d'une goutte aplatie est similaire à celui d'une colonne de fluide cylindrique infini (jet), réalisé par Rayleigh [36] et Lamb [62]. La démonstration présentée ici est proche de celle de Rayleigh mais en diffère légèrement car celui-ci étudiait l'apparition conjointe de modes azimutaux et de modes longitudinaux le long du du jet. Ces derniers permettent notamment de décrire l'instabilité de Rayleigh-Plateau.

Ici, on assimile la goutte aplatie à un cylindre de hauteur  $h$  et de rayon  $R$  (voir Fig. A.1.a). On note  $S_{\perp}$  la surface perpendiculaire à la gravité, constituée du dessus et du dessous de la goutte, et  $S_{\parallel}$  la surface périphérique de la goutte. Au repos, elles sont notées respectivement  $S_{\perp,0} = 2\pi R^2$  et  $S_{\parallel,0} = 2\pi hR$ . Les lobes sont décrits par de petites déformations radiales de la périphérie de la goutte, d'amplitude  $a_n(t) \ll R$  autour d'un rayon instantané moyen  $\bar{R}(t)$ . En coordonnées polaires, le rayon s'écrit :  $r(\theta, t) = \bar{R}(t) + a_n(t) \cos(n\theta)$  avec  $n$  le nombre de lobes (voir Fig. A.1.b).

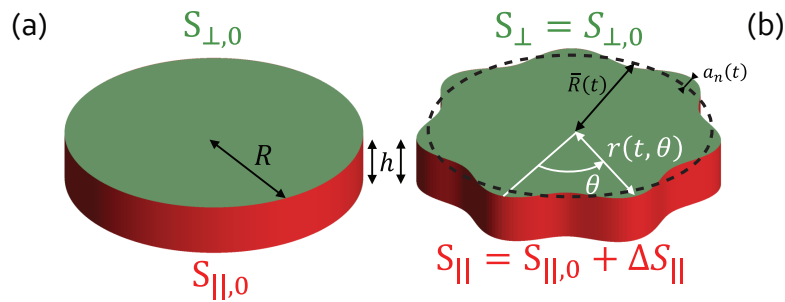


FIGURE A.1 – Vue schématique de la goutte aplatie. (a) Au repos, la goutte est assimilée à un cylindre. (b) En présence de lobes, la surface périphérique augmente.

On suppose que la hauteur de la goutte  $h$  reste constante<sup>1</sup>. La conservation du volume est donc équivalente à la conservation de la surface normale à la gravité  $S_{\perp,0} = S_{\perp} = \int r^2 d\theta$ , soit  $2\pi R^2 = 2\pi \bar{R}(t)^2 + \pi a_n(t)^2$ . Au premier ordre en  $a_n(t)/R$ , ceci se traduit par :

1. L'hypothèse selon laquelle  $h$  reste constant peut sembler contradictoire avec le forçage paramétrique utilisé dans cette partie, qui consiste à faire varier cette hauteur par modulation de la gravité effective. Rappelons que les fréquences propres sont calculées indépendamment du mode de forçage : il s'agit des fréquences auxquelles résonnerait une goutte de hauteur  $h$  si sa périphérie était perturbée. Le forçage paramétrique consiste précisément à faire varier la fréquence de résonance en faisant varier  $h$ , provoquant ainsi l'apparition de l'instabilité.

$$\bar{R}(t) = R \left( 1 - \frac{a_n(t)^2}{4R^2} \right) \quad (\text{A.1})$$

On réalise également un développement limité pour la surface périphérique en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} S_{\parallel} &= h \int r \sqrt{1 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2} d\theta \\ &= h \int r \left( 1 + \frac{1}{2r^2} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right) d\theta \\ &= h \int r \left( 1 + \frac{1}{2R^2} n^2 a_n^2 \sin^2 n\theta \right) d\theta \\ &= h \left( 2\pi \bar{R}(t) + \frac{1}{2R} \pi n^2 a_n^2 \right) \\ &= 2\pi h R + \frac{\pi h a_n^2 (n^2 - 1)}{2R} \quad \text{en utilisant l'Eq. (A.1)} \end{aligned}$$

La variation de la surface périphérique liée aux lobes est donc :

$$\Delta S_{\parallel}(t) \equiv S_{\parallel}(t) - S_{\parallel,0} = \frac{\pi h a_n^2(t) (n^2 - 1)}{2R} \quad (\text{A.2})$$

La variation d'énergie capillaire vaut donc :

$$\Delta E_c(t) = \gamma \Delta S_{\parallel}(t) = \frac{\gamma \pi h a_n^2(t) (n^2 - 1)}{2R} \quad (\text{A.3})$$

On remarque qu'il s'agit d'un accroissement de l'énergie ( $\Delta E_c > 0$ ) car la surface augmente en s'éloignant de la forme cylindrique. L'énergie gravitationnelle n'intervient pas puisque le mouvement est horizontal. L'autre énergie en jeu est l'énergie cinétique. Pour la calculer, nous devons déterminer le champ de vitesse à l'intérieur de la goutte. Dans l'hypothèse d'un écoulement irrotationnel, il existe un potentiel de vitesse  $\phi(r, \theta, t)$ , tel que  $\mathbf{v} = \nabla \phi$ , où  $\mathbf{v}$  est le vecteur vitesse. Comme le fluide est incompressible,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla^2 \phi = 0$  et  $\phi$  satisfait l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{A.4})$$

La géométrie de l'écoulement permet de chercher  $\phi$  sous la forme :  $\phi = b_n(r, t) \cos n\theta$ , avec  $b_n$  qui satisfait donc :

$$r^2 \frac{\partial^2 b_n}{\partial r^2} + r \frac{\partial b_n}{\partial r} - n^2 b_n = 0 \quad (\text{A.5})$$

L'Eq. (A.5) est une équation d'Euler et ses solutions sont de la forme  $b_n(r, t) = c_n(t) r^{-n} + d_n(t) r^n$ . Ici,  $c_n = 0$  car la vitesse est finie en 0. La condition limite de la vitesse radiale en  $r = R$  s'écrit au premier ordre :



$$v_r(r = R) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=R} = nR^{n-1}d_n(t) \cos n\theta = \left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{r=R} = \frac{d\bar{R}(t)}{dt} + \frac{da_n(t)}{dt} \cos n\theta \quad (\text{A.6})$$

Au premier ordre,  $d\bar{R}(t)/dt$  est nul et on obtient :

$$\phi(r, \theta, t) = \frac{1}{na_n^{n-1}} \frac{da_n}{dt} r^n \cos n\theta \quad (\text{A.7})$$

Par ailleurs, l'énergie cinétique s'écrit :

$$E_k = \frac{\rho}{2} \iiint_V (\nabla \phi)^2 r dr d\theta dz \quad (\text{A.8})$$

D'après le théorème de Green-Ostrogradski,  $\iiint_V \nabla A dV = \iint_S A d\mathbf{S}$ , avec  $A$  une fonction et  $S$  la surface délimitant le volume  $V$ . En choisissant  $A = \phi \nabla \phi$  et en notant que  $\nabla^2 \phi = 0$ , on a :

$$E_k = \frac{\rho}{2} \iint_S \phi \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=R} R d\theta dz = \frac{\pi \rho h R^2}{2n} \left( \frac{da_n}{dt} \right)^2 \quad (\text{A.9})$$

On considère que les frottements dans le fluide et avec la plaque sont négligeables. La conservation de l'énergie s'écrit alors  $d(E_k + E_c)/dt = 0$  et on obtient l'équation régissant l'amplitude des lobes.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_n}{dt^2} + \omega_n^2 a_n(t) &= 0, \\ \text{avec } \omega_n^2 &= \frac{\gamma}{\rho R^3} n(n^2 - 1) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

L'amplitude des lobes est donc de la forme  $a_n(t) = A_n \cos \omega_n t$  et  $f_n = \omega_n/(2\pi)$  est la fréquence propre du mode azimutal constitué de  $n$  lobes.



## Annexe B

# Déformation quasi-statique d'une goutte sphérique sous champ magnétique

En l'absence de gravité, il est possible de prédire la déformation d'une goutte de ferrofluide de rayon  $R$  sous l'effet d'un champ  $B$  modéré, puisque sa forme est proche d'un ellipsoïde allongé selon l'axe du champ [65]. En effet, on a vu dans la section 6.5.3 que dans ce cas, l'aimantation est uniforme dans le ferrofluide et on peut définir un facteur de démagnétisation  $D$  tel que :

$$E_m = -\frac{V\chi B^2}{2\mu_0(1+\chi D)}. \quad (\text{B.1})$$

On peut montrer que  $D$  s'exprime théoriquement en fonction de l'excentricité  $e = \sqrt{1-K^2}$  de l'ellipsoïde, où  $K = b/a$  est le rapport entre le demi-petit axe  $b$  et le demi-grand axe  $a$  [67] :

$$D = \frac{1-e^2}{2e^3} \left[ \ln \left( \frac{1+e}{1-e} \right) - 2e \right] \quad (\text{B.2})$$

L'énergie capillaire d'un ellipsoïde de surface  $S$  s'écrit [66] :

$$E_c = \gamma S = 2\pi a^2 K \gamma \left( K + \frac{\arcsin e}{e} \right) \quad (\text{B.3})$$

La conservation du volume  $V = 4\pi R^3/3 = 4\pi ab^2/3$  et l'écriture de la minimisation de l'énergie  $d(E_m + E_c)/de = 0$  font apparaître un nombre de Bond magnétique qui est le rapport entre les ordres de grandeur des énergies magnétique ( $E_m \sim B^2 R^3/\mu_0$ ) et capillaire ( $E_c \sim \gamma R^2$ ) :

$$Bo_m = \frac{RB^2}{\mu_0\gamma} \quad (\text{B.4})$$

L'équation de la déformation s'écrit alors [66, 82, 83] :

$$Bo_m = 2 \left( \frac{1}{\chi} + D \right)^2 \frac{\frac{3-2e^2}{e^2} - \frac{(3-4e^2)\arcsin e}{e^3(1-e^2)^{1/2}}}{(1-e^2)^{2/3} \left[ \frac{3-e^2}{e^5} \ln \left( \frac{1+e}{1-e} \right) - \frac{6}{e^4} \right]} \quad (\text{B.5})$$

La Fig.B.1 représente l'élongation théorique  $K^{-1} = a/b$  d'une goutte de ferrofluide déduite de l'Eq. (B.5) en fonction du nombre de Bond magnétique  $Bo_m$  (Eq. (B.4)).

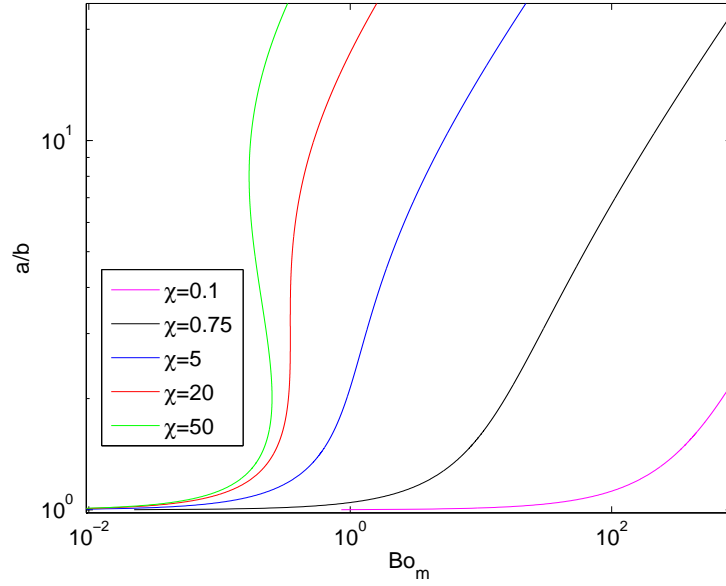


FIGURE B.1 – Élongation théorique  $a/b$  en fonction du nombre de Bond magnétique  $Bo_m$  en échelle logarithmique pour différentes susceptibilités magnétiques à champ nul  $\chi$ .

On observe que l'élongation s'amplifie avec  $Bo_m$ . Cela confirme l'effet du champ magnétique appliqué ( $Bo_m \propto B^2$ ) et signifie que la déformation augmente avec la taille de la goutte ( $Bo_m \propto R$ ). D'autre part, on observe que pour de grandes susceptibilités magnétiques ( $\chi \gtrsim 20$ ), une instabilité apparaît. Elle provoque un saut dans la déformation, qui a été étudié par Bacri *et al.* [66, 84]. La déformation sans instabilité a également donné lieu à des vérifications expérimentales [85].

## Annexe C

# Déformation quasi-statique d'une goutte aplatie sous champ magnétique

Les fréquences propres des modes axisymétriques et azimutaux dépendent du rayon  $R$  et de la hauteur  $h$  de la goutte. La déformation de la goutte sous l'effet du champ magnétique pourrait donc modifier ces fréquences propres. Nous étudions donc ici la façon dont se déforment les gouttes aplaties en présence d'un champ magnétique.

### Calcul du rayon d'équilibre

On considère une goutte aplatie incompressible modélisée par un cylindre de hauteur  $h$  et de rayon  $R$ . Un équilibre stable de la goutte correspond à un minimum d'énergie. On cherche donc le cylindre de rayon  $R$  et de hauteur  $h$  pour lequel l'énergie est minimale. On exprime les énergies capillaire, gravitationnelle et magnétique à volume  $V = \pi h R^2$  fixé en fonction du rayon variable  $R$  :

$$E_c(R) = \gamma(2\pi R^2 + 2\pi R h) = 2\gamma \left( \pi R^2 + \frac{V}{R} \right) \quad (\text{C.1})$$

$$E_g(R) = \rho V g \frac{h}{2} = \frac{\rho V^2 g}{2\pi R^2} \quad (\text{C.2})$$

$$E_m(R) \approx -\frac{\chi V B^2}{2\mu_0 \left( 1 + \frac{\chi}{1+h/R} \right)} = -\frac{\chi V B^2}{2\mu_0 \left( 1 + \frac{\chi}{1+V/(\pi R^3)} \right)} \quad (\text{C.3})$$

Dans l'Eq. (C.1), le substrat étant superhydrophobe, on considère que la tension de surface entre le liquide et le substrat est identique à celle entre le liquide et l'air. Dans l'Eq. (C.3), l'expression de l'énergie magnétique utilise l'approximation  $D \approx r_s$  (voir chapitre 8).

L'énergie capillaire est minimale lorsque le rapport d'aspect est de l'ordre de 1, qui minimise la surface de la goutte. Dans le cas d'une flaque,  $E_c$  augmente donc toujours avec  $R$ . L'énergie gravitationnelle diminue avec l'altitude du centre de gravité et donc avec  $R$ . Enfin, l'énergie magnétique diminue lorsque la surface latérale du cylindre augmente et que la surface perpendiculaire au champ diminue, c'est-à-dire quand  $R$  diminue. La condition d'équilibre correspond à un minimum d'énergie :

$$\frac{d(E_c + E_g + E_m)}{dR} = 0 \iff 4\pi\gamma R - \frac{2\gamma V}{R^2} - \frac{\rho g V^2}{\pi R^3} + \frac{3\chi^2 B^2 V^2}{2\pi\mu_0 R^4 (1 + \chi + V/(\pi R^3))^2} = 0 \quad (\text{C.4})$$

On note qu'à champ nul et pour  $h \ll R$ , les deuxième et quatrième termes de l'équation sont négligeables. On retrouve alors que la hauteur de la goutte est indépendante du rayon et vaut deux fois la longueur capillaire :  $h = 2\sqrt{\gamma/(\rho g)}$ . L'augmentation du volume conduit alors à une augmentation du rayon de la goutte sans variation de sa hauteur.

## Résultats expérimentaux

Puisque l'énergie magnétique augmente avec  $R$ , le rayon diminue en présence d'un champ magnétique. Sur la Fig. C.1, on représente ainsi la variation du rayon observée expérimentalement en présence d'un champ magnétique en fonction de celle prédite théoriquement par l'Eq. (C.4). On remarque que la variation absolue du rayon dépend peu du rayon initial de la goutte. La ligne noire représente la prédiction théorique. On observe ainsi que la variation réelle du rayon est 2.4 fois celle prédite par le modèle.

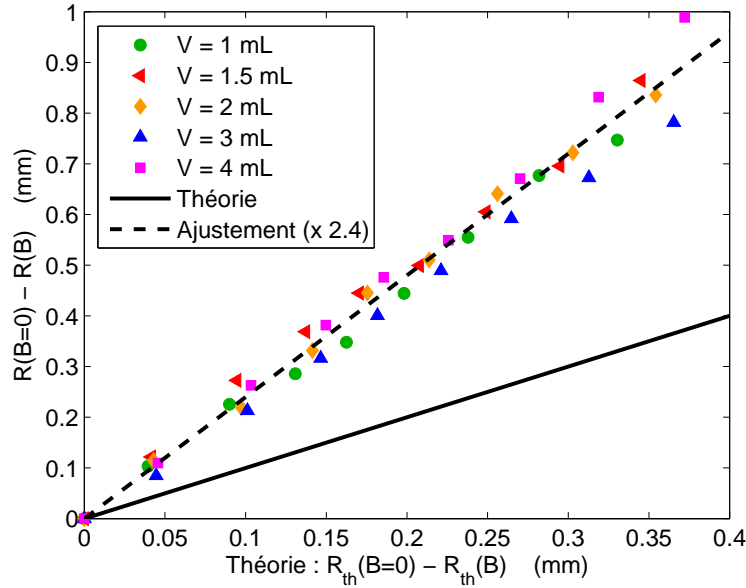


FIGURE C.1 – Variation observée expérimentalement du rayon d'une goutte de ferrofluide n°2 en présence du champ magnétique,  $R(B = 0) - R(B)$ , en fonction de la variation théorique pour différents volumes  $V$  et champs  $0 \leq B \leq 62$  G. La ligne noire est la prédiction théorique (pente 1) et la ligne en pointillés est l'ajustement linéaire (pente 2.4).

En effet, le modèle développé suppose que le ferrofluide conserve une forme purement cylindrique au cours de la déformation. Cependant, comme on l'a vu dans la section 6.5.3, l'aimantation du ferrofluide est plus forte lorsque le champ est tangent à l'interface, comme c'est le cas à la périphérie de la goutte. L'effet du champ est donc plus fort sur les bords de la goutte, ce qui provoque l'apparition d'un bourrelet périphérique. La variation de rayon observée expérimentalement en présence d'un champ magnétique est alors supérieure à celle prédite théoriquement par l'Eq. (C.4).

## Rôle de la déformation de la goutte avec $B$ sur les décalages des fréquences propres

On peut penser que la déformation de la goutte au repos par le champ magnétique joue un rôle dans les décalages des fréquences propres des modes azimutaux et axisymétriques des chapitres 8 et 9. En effet, les expressions des fréquences propres (voir Eqs (8.3) et (9.12)) et des vecteurs d'ondes (voir Eq. (9.5)) dépendent de  $R$ .

De façon surprenante, pour les modes azimutaux (chapitre 8), la prise en compte de la modification du rayon de la goutte en présence de champ magnétique mène à des prédictions théoriques très éloignées des fréquences propres observées expérimentalement. Cela concerne aussi bien l'amplitude des décalages que les lois d'échelle prédites par l'Eq. (8.3).

Pour les modes axisymétriques (chapitre 9), la prise en compte de la variation de  $R$  avec  $B$  permet de réduire l'écart entre les prédictions théoriques et les observations expérimentales dans le décalage des fréquences propres, mais la correction s'effectue de façon différente pour les différents modes  $m$ . Les points de mesures ne sont alors plus rassemblés sur une même droite comme sur la Fig. 9.11, invalidant la loi d'évolution prédite par la relation de dispersion d'Eq. (9.13).





## Annexe D

### Calcul de la fréquence propre du mode axisymétrique d'écrasement ( $m = 1$ )

Nous calculons ici la fréquence propre du mode d'écrasement d'une goutte de liquide. Ce mode correspond aux oscillations libres d'une goutte aplatie autour de son équilibre (voir annexe C) en conservant une forme cylindrique.



FIGURE D.1 – Schéma illustrant le mode d'écrasement, pour lequel la goutte oscille en conservant une forme cylindrique

Un calcul similaire a été réalisé par Noblin [63] dans le cas d'une goutte sessile (angle de contact arbitraire) en présence de frottement solide mais uniquement pour de grands diamètres ( $h \ll R$ ). Nous considérons ici qu'il n'y a pas de frottements et que l'angle de contact est proche de  $180^\circ$ . Cependant,  $h$  n'est ici pas nécessairement négligeable devant  $R$ . Cette hypothèse n'est en effet pas respectée pour les plus petits volumes étudiés ( $V \sim 1$  mL).

Supposons un substrat superhydrophobe sur lequel est déposée une goutte aplatie incompressible de hauteur  $h$  et de rayon  $R$  à l'équilibre. Nous étudions la fréquence d'oscillation libre liée à son écrasement. On considère que la goutte est dans un repère en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . L'axe  $Oz$  est vertical et dirigé vers le haut tel que  $z = 0$  correspond au contact entre la goutte et le substrat. La goutte a son centre en  $r = 0$ . Elle conserve la forme d'un cylindre de rayon  $\bar{R}(t)$  et de hauteur  $\bar{h}(t)$ . Son volume  $V = \pi \bar{h}(t) \bar{R}(t)^2$  est conservé, d'où :

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d\bar{h}}{dt} = -\frac{2\bar{h}(t)}{\bar{R}(t)} \frac{d\bar{R}}{dt} \quad (\text{D.1})$$

Nous allons écrire la conservation de l'énergie pour déterminer la fréquence propre. On rappelle les expressions des énergies capillaire  $E_c$  et gravitationnelle  $E_g$  (voir Eqs (C.1) et (C.2)) :

$$E_c(t) = \gamma(2\pi\bar{R}(t)^2 + 2\pi\bar{h}(t)\bar{R}(t)) = 2\gamma \left( \pi\bar{R}(t)^2 + \frac{V}{\bar{R}(t)} \right) \quad (\text{D.2})$$

$$E_g(t) = \frac{\rho V \bar{h}(t) g}{2} = \frac{\rho V^2 g}{2\pi\bar{R}(t)^2} \quad (\text{D.3})$$

L'énergie capillaire contient une contribution de la surface parallèle à la gravité  $g$  et une contribution de la surface perpendiculaire à  $g$ . Pour une petite variation du rayon de la goutte autour de l'équilibre  $\Delta R = \bar{R} - R \ll R$ , les variations d'énergies capillaire et gravitationnelle s'écrivent :

$$\Delta(E_c + E_g) = \left. \frac{d(E_c + E_g)}{d\bar{R}} \right|_{\bar{R}=R} \Delta R + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2(E_c + E_g)}{d\bar{R}^2} \right|_{\bar{R}=R} (\Delta R)^2 \quad (\text{D.4})$$

$$= \left( 2\pi\gamma + \frac{2\gamma V}{R^3} + \frac{3\rho g V^2}{2\pi R^4} \right) (\Delta R)^2 \quad (\text{D.5})$$

car le premier terme de la partie droite de l'Eq. (D.4) est nul à l'équilibre d'après l'Eq. (C.4).

On calcule maintenant l'énergie cinétique. Les modes étant axisymétriques, les vitesses ne dépendent pas de  $\theta$ . On suppose par ailleurs que le substrat superhydrophobe est tel que la goutte ne subit aucune contrainte horizontale et que la vitesse radiale  $v_r$  ne dépend pas de l'altitude  $z$ . On effectue un bilan de conservation de la masse pour un cylindre de hauteur  $h(t)$  et de rayon  $r$ . En utilisant l'Eq. (D.1) et la condition d'incompressibilité  $\text{div}\mathbf{v} = 0$ , on trouve alors :

$$v_r(r, t) = \frac{r}{\bar{R}(t)} \frac{d\bar{R}}{dt} \quad (\text{D.6})$$

$$v_z(z, t) = -\frac{2z}{\bar{R}(t)} \frac{d\bar{R}}{dt} \quad (\text{D.7})$$

L'énergie cinétique de la goutte s'écrit alors :

$$E_k(t) = \iiint \frac{\rho v^2}{2} dV = \frac{\rho}{2} \left( \frac{d\Delta R}{dt} \right)^2 \left( \frac{V}{2} + \frac{4\pi\bar{h}(t)^3}{3} \right) \quad (\text{D.8})$$

Le dernier terme de l'Eq. (D.8) n'est pas négligeable pour les plus petites gouttes ( $V \sim 1 \text{ mL}$ ). La conservation de l'énergie s'écrit  $d(E_k + E_c + E_g)/dt = 0$ . Les amplitudes de vibrations étant faibles, les termes différentiels non linéaires sont négligés. On obtient l'équation décrivant les fluctuations du rayon :

$$\frac{d^2\Delta R}{dt^2} + \omega_{1,\text{écr}}^2 \Delta R(t) = 0, \quad (\text{D.9})$$

$$\text{avec } \omega_{1,\text{écr}}^2 = \left( \frac{V}{2} + \frac{4\pi h^3}{3} \right)^{-1} \left( \frac{4\pi\gamma}{\rho} + \frac{4\pi\gamma h}{\rho R} + 3\pi g h^2 \right) \quad (\text{D.10})$$

$\omega_{1,\text{écr}} = 2\pi f_{1,\text{écr}}$  est la pulsation propre du mode d'écrasement d'une goutte cylindrique. Il est à noter que pour une goutte de grand diamètre ( $h \ll R$ ), on a  $h = 2\sqrt{\gamma/(\rho g)}$  (voir annexe C) et on retrouve la pulsation propre calculée par Noblin [63],  $\omega_{1,\text{écr}}^2 = 32\pi\gamma/(\rho V)$ .



## Troisième partie

# Exploration des interactions entre turbulence hydrodynamique et surface libre



# Chapitre 12

## Introduction

*Cette partie exploratoire est destinée à étudier les interactions entre la turbulence hydrodynamique et la surface libre. Les résultats sont en grande partie préliminaires et sont des pistes pour une étude plus approfondie des phénomènes observés. L'étude de chaque sujet est donc souvent qualitative et loin d'être exhaustive. Elle vise à circonscrire les problématiques d'intérêt soulevées par ces interactions et déterminer les outils nécessaires à leur analyse. De premiers enseignements émergent toutefois des mesures et des analyses réalisées.*

### 12.1 Contexte

Un écoulement fluide turbulent est désordonné, non prévisible et met en jeu un grand nombre d'échelles spatiales et temporelles. La turbulence hydrodynamique est classiquement représentée par la cascade de Richardson (voir Fig. 12.1) par laquelle de grands tourbillons, initialement injectés à une échelle de l'ordre de la taille de la perturbation, donnent naissance à de plus petits tourbillons par interactions. Ces derniers vont à leur tour se décomposer en des tourbillons plus petits et ainsi de suite. Les plus petites échelles correspondent aux tourbillons pour lesquels la viscosité dissipe l'énergie.

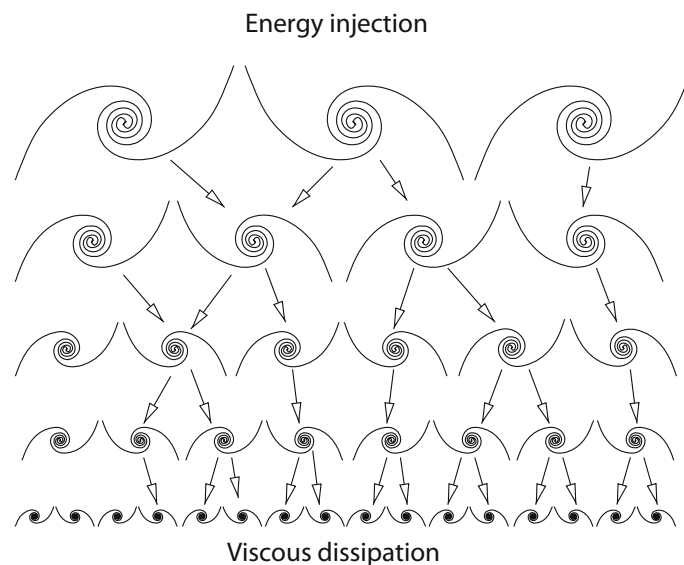


FIGURE 12.1 – Illustration de la cascade directe de Richardson. *Source de l'image : [86]*

Le mécanisme de transport turbulent est crucial pour les transferts d'énergie, de quantité de mouvement, de chaleur ou de concentration. La turbulence a ainsi un rôle important dans les échanges de chaleur et de matière dans l'atmosphère ou dans les océans, mais aussi entre ces deux réservoirs. Dans le contexte de la modélisation du climat, les échanges de chaleur et de quantité de matière entre l'océan et l'atmosphère sont déterminants pour comprendre et prévoir les variations de températures ou de concentrations en gaz à effet de serre. Le rôle de la surface de l'eau, interface entre les océans et l'atmosphère est alors de première importance.

En effet, nous allons voir que la surface libre modifie la turbulence hydrodynamique mais cette surface va aussi réciproquement se déformer sous l'action de cette même turbulence. Ces déformations de la surface libre et sa rugosité vont alors être également importantes dans les échanges entre océan et atmosphère ou pour la réflexion du rayonnement solaire. Nous proposons ici une expérience destinée à mettre en lumière les mécanismes à l'œuvre dans ces interactions. La turbulence est ici générée dans une cuve au moyen de jets sous une surface libre. Il n'y a pas d'écoulement moyen et la taille typique des tourbillons est de l'ordre de 5 cm.

### Effet de la présence d'une surface libre sur la turbulence hydrodynamique

Les études sur les interactions entre la turbulence hydrodynamique et la surface libre ont d'abord concerné la façon dont la présence d'une surface libre modifie la turbulence sous la surface. Comme le rappelle Savelsberg [87], cela a tout d'abord été étudié théoriquement pour le cas d'un mur se déplaçant avec le courant moyen d'une turbulence de grille dans un canal par Hunt et Graham [88] puis pour une surface libre non déformée [89–91]. Les phénomènes ont également été observés numériquement [92–99] et expérimentalement dans des canaux turbulents [87, 100–102] mais aussi sans écoulement moyen [103, 104]. Le résultat principal observé est un effet important de la surface libre sur une profondeur environ égale à l'échelle intégrale  $L$  de la turbulence, c'est-à-dire la taille des plus gros tourbillons. Au sein de cette couche, l'énergie cinétique turbulente verticale est redistribuée horizontalement en raison de la condition aux limites cinématique imposée par la surface qui impose une vitesse verticale nulle. Les fluctuations verticales de vitesse diminuent alors à l'approche de la surface tandis que celles de la vitesse horizontale augmentent. Nous discuterons plus en détail ces résultats autour de nos mesures expérimentales dans le cadre de la caractérisation de la turbulence hydrodynamique dans le chapitre 14.

### Effet de la turbulence hydrodynamique sur des ondes de surface

L'atténuation d'ondes de gravité monochromatiques à la surface d'un écoulement turbulent a été étudiée théoriquement par Phillips [105] ainsi que Fabrikant et Raevsky [106] dans le cas où la longueur d'onde  $\lambda$  des ondes est plus petite que l'échelle  $L$  de la turbulence. Dans le cas inverse où  $\lambda > L$ , Teixeira et Belcher [107] se sont intéressés à l'allongement des vortex par les ondes de surface et ont montré le même type de comportement. Des expériences s'intéressant à ces atténuations ont par ailleurs été réalisées par Green *et al.* [108], Badulin [109], Ölmez et Milgram [110] ainsi que Gutiérrez et Aumaître [111]. Le cas de l'interaction entre turbulence hydrodynamique et ondes paramétriques via l'instabilité de Faraday a également fait l'objet d'études par Falcón et Fauve [112] ou Ermakov *et al.* [113].

Dans ces expériences, les spectres temporels des déformations de la surface libre ont souvent été étudiés mais les études s'intéressant à l'évolution de la structure spatiale des ondes à la surface d'un écoulement turbulent sont plus rares. Très récemment, Gutiérrez et Aumaître [111] ont réalisé une mesure spatiale 1D dans la direction de propagation de l'onde pour un écoulement turbulent 2D.



Vivanco et Melo [114] ont quant à eux étudié, expérimentalement et dans les deux dimensions, la diffusion d'ondes planes par un vortex unique ou un dipôle de vortex, s'appuyant sur une étude théorique de Coste *et al.* [115, 116]. Des mesures de la surface libre en 2D dans le cas d'ondes à la surface d'un écoulement turbulent semblent donc intéressantes.

## Déformations de la surface libre induites par la turbulence

Au-delà de son action sur les ondes gravito-capillaires se propageant à sa surface, un écoulement turbulent hydrodynamique est susceptible de provoquer lui-même des déformations de la surface libre. Brocchini et Peregrine [117] ont établi une phénoménologie des situations qu'il est possible de rencontrer en fonction de l'échelle spatiale  $L$  de la turbulence (taille typique des plus grands tourbillons) et de l'amplitude de ses fluctuations de vitesse  $q$  (voir Fig. 12.2). Les expériences sur le sujet étant rares, l'étude repose avant tout sur des modèles simples et des arguments d'échelles.

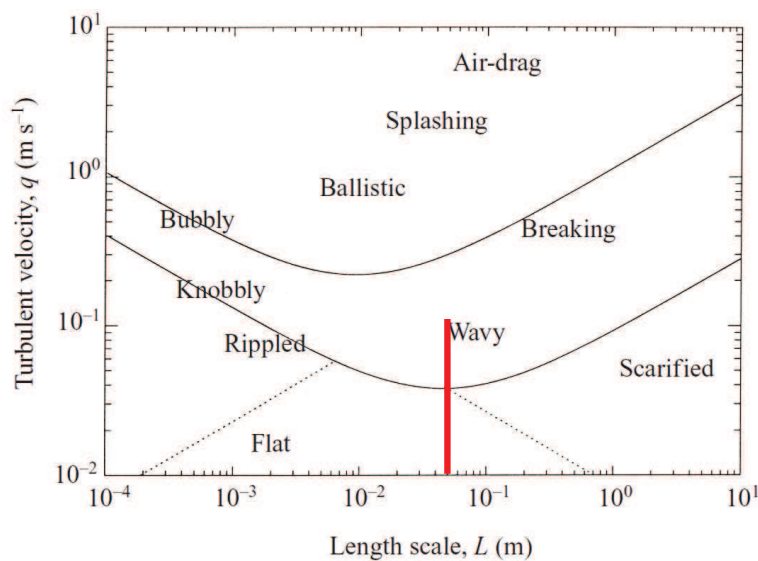


FIGURE 12.2 – Diagramme des phénomènes de déformation de la surface libre par Brocchini et Peregrine [117] selon l'échelle  $L$  et les fluctuations de vitesse  $q$  de la turbulence. La ligne rouge représente la zone explorée dans cette partie. *Source de l'image initiale : [117]*

Les déformations sont gouvernées d'une part par une compétition entre énergie cinétique turbulente (qui provoque les déformations) et énergie gravitationnelle (qui s'y oppose). La racine carrée du rapport entre ces deux grandeurs est le nombre de Froude turbulent  $Fr = q/\sqrt{2gL}$  où  $g$  est la gravité. La compétition entre énergie cinétique turbulente et tension de surface (qui s'oppose également aux déformations) est quant à elle donnée par le nombre de Weber  $We = q^2 L \rho / (2\gamma)$ . Dans notre expérience, la taille typique de la turbulence est  $L \approx 5 \text{ cm}$  et les fluctuations de vitesse atteignent  $q \approx 12 \text{ cm.s}^{-1}$ , ce qui correspond à  $Fr = 0.12$  et  $We = 5$ . C'est donc d'abord la gravité qui gouvernera les déformations induites par la turbulence. Une ligne rouge sur le diagramme de la Fig. 12.2 représente les valeurs explorées. Il faut noter que la turbulence implique de nombreuses échelles inférieures à la taille typique des plus gros tourbillons et que les phénomènes observés ne seront donc pas uniques. Nous montrons sur la Fig. 12.3 trois photos d'états de la surface libre que nous avons pu rencontrer avec notre expérience. Nous pouvons observer une scarification de la surface libre pour de faibles niveaux de turbulence et lorsqu'on augmente le débit des jets, des déformations à toutes les échelles apparaissent et notamment des rides. Pour de forts niveaux de turbulence, nous avons observé l'entraînement de bulles sous la surface. Mais dans l'ensemble, c'est un régime de "vagues" qui est d'abord attendu (voir Fig. 12.2), qui domine notre expérience et que nous allons

principalement étudier. Cependant, la nature de ces “vagues”, au sens de Brocchini et Peregrine, est encore peu comprise. Il peut s’agir de la génération d’ondes gravito-capillaires se propageant à la surface de l’écoulement turbulent mais aussi de l’empreinte des fluctuations de pression sous la surface.

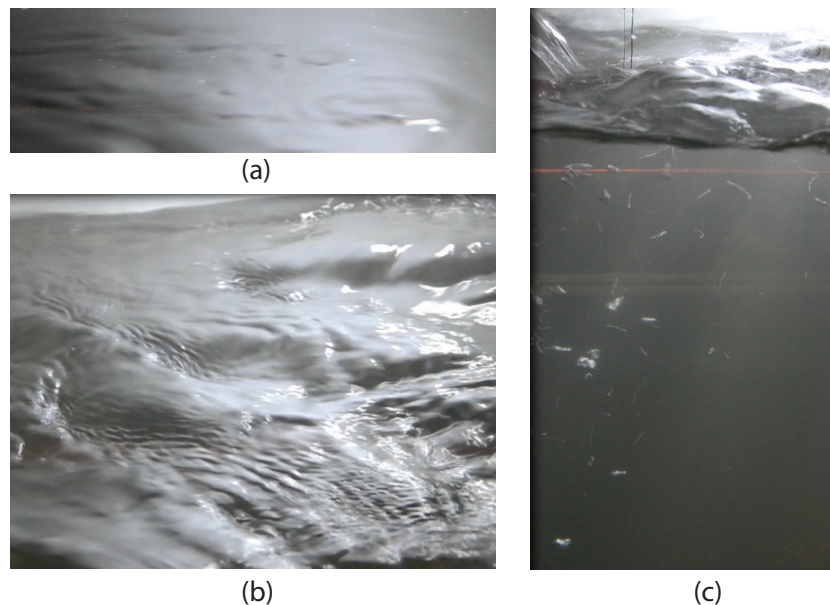


FIGURE 12.3 – Observations que nous avons réalisées pour différents niveaux de turbulence : (a) Scarification de la surface libre à faible turbulence ; (b) Déformations de la surface libre à toutes les échelles et présence de rides (taille  $\sim 1$  cm) pour une turbulence modérée ; (c) Entraînement de bulles sous la surface à forte turbulence.

Les déformations de la surface libre induites par la turbulence ont d’abord été étudiées dans le contexte de la génération d’ondes à la surface de l’océan par le vent et donc la turbulence dans l’air. Phillips [118, 119] a montré théoriquement que les fluctuations turbulentes de pression induisent des déformations de la surface libre et peuvent mener à la formation d’ondes par résonance. Cette résonance se produit lorsque la vitesse de convection de ces fluctuations de pression est égale à la vitesse de propagation des ondes. Ce mécanisme ne peut pas être directement appliqué à la turbulence hydrodynamique sous la surface libre car la vitesse d’advection des fluctuations de pression turbulentes est également la vitesse d’advection des ondes. Teixeira et Belcher [120], en reprenant le raisonnement de Phillips, ont toutefois mis en évidence théoriquement l’existence d’une résonance dans le cas de la turbulence hydrodynamique sous la surface, mais cette résonance est conditionnée par un taux de cisaillement suffisamment important près de la surface. Les auteurs notent que la turbulence dans l’eau est plus efficace que la turbulence dans l’air dans la génération d’ondes et pourrait être un mécanisme plus important que ce qu’on pensait jusqu’alors.

Ces dix dernières années, diverses études expérimentales des déformations de la surface libre induites par une turbulence hydrodynamique sous la surface ont vu le jour [87, 121–124]. Dans le cas d’un écoulement de faible profondeur sur un fond rugueux, Horoshenkov *et al.* [124] ont récemment observé que les vitesses de déplacement des structures à la surface de l’eau sont proches de la vitesse de l’écoulement et ne correspondent donc pas à des ondes de gravité, malgré la présence de cisaillement. Cet argument était aussi mis en avant par Smolentsev et Miraghaie [121], pour affirmer la faible présence d’ondes de surface à partir du suivi de structures à la surface d’un écoulement passant de faiblement turbulent à fortement turbulent sur un plan incliné. Par ailleurs, pour un écoulement turbulent 2D, Gutiérrez [123] met difficilement en évidence la présence d’ondes de surface à partir de spectres de puissance spatiotemporels 1D de la déformation de la surface libre. Les spectres

spatiotemporels sont utilisés pour faire le lien entre fréquence d'oscillation et longueur d'onde d'une déformation.

Chiapponi *et al.* [122] ont analysé les corrélations entre déformations de la surface libre et fluctuations de vitesse sous la surface d'un écoulement turbulent généré par une grille oscillante sans écoulement moyen. Ils montrent qu'en général, les fluctuations de la surface libre sont en avance par rapport à celles de la vitesse sous la surface, semblant indiquer la présence d'ondes de surface. Mais Savelsberg et van de Water [87], au moyen d'un canal rendu turbulent par une grille active, restent les seuls à notre connaissance à avoir réellement démontré une forte présence d'ondes de surface gravito-capillaires, dominant les structures turbulentes non propagatives. En effet, leurs spectres spatiotemporels 1D de déformation de la surface libre montrent principalement des structures qui suivent la relation de dispersion d'ondes de surface gravito-capillaire. Pourtant, les fluctuations turbulentes de vitesse sont faibles et il n'y a *a priori* pas de cisaillement important. La possibilité d'une génération d'ondes à la surface directement par la grille active est évacuée par certains critères d'isotropie. Cette expérience est d'intérêt pour nous puisque l'échelle caractéristique de la turbulence est comparable ( $L \approx 10$  cm).

Numériquement, une simulation proche de notre système d'une turbulence hydrodynamique sans écoulement moyen et en présence d'une surface libre a été réalisée récemment par Guo et Shen [99]. S'ils notent une faible présence d'ondes gravito-capillaires, les déformations de la surface libre sont avant tout dominé par des structures à basse fréquence. La nature des déformations à la surface des écoulements turbulents commence donc à peine à être déterminée et comprise. Elle est d'ailleurs très probablement fortement dépendante des conditions expérimentales.

## 12.2 Plan de la partie

Dans cette partie, nous allons décrire les expériences réalisées autour des problématiques décrites précédemment. Le chapitre 13 présente le dispositif expérimental utilisé. Une turbulence sans écoulement moyen est générée sous une surface libre au moyen de jets verticaux situés au fond d'une cuve. Les techniques de mesure sont également présentées dans ce même chapitre : vélocimétrie par images de particules (PIV) pour le champ de vitesses sous la surface et profilométrie par transformée de Fourier (FTP) pour la mesure spatiotemporelle 2D des déformations de la surface libre. Les caractéristiques de la turbulence engendrée, ainsi que la façon dont elle est modifiée à l'approche de la surface libre sont décrites dans le chapitre 14. Dans le chapitre 15, des ondes de surface planes monochromatiques sont générées à la surface de l'écoulement turbulent au moyen d'un batteur. Nous décrivons leur dispersion causée par la turbulence sous la surface. Enfin, les déformations de la surface libre induites par la turbulence hydrodynamique sont étudiées au chapitre 16. Nous mettons en évidence la présence d'ondes de surface gravito-capillaires dominées par des structures non propagatives.



# Chapitre 13

## Dispositif expérimental

### 13.1 Contexte

La turbulence hydrodynamique en présence d'une surface libre est souvent étudiée expérimentalement au moyen d'un canal avec un écoulement. Une turbulence relativement intense peut par exemple être obtenue avec une grille active, pourvue d'axes mobiles motorisés, en travers de l'écoulement [87]. Pour étudier des ondes à la surface de l'écoulement turbulent, nous souhaitons toutefois éviter l'advection par un écoulement moyen. Des turbulences sans écoulement moyen peuvent par exemple être générées au centre de disques contra-rotatifs [125, 126], mais pour l'interaction avec une surface libre, elles sont généralement obtenues au moyen d'une grille horizontale plongée dans une cuve et oscillant verticalement [103, 109, 122, 127]. Toutefois, les grilles oscillantes présentent une mauvaise reproductibilité expérimentale [128], ce qui est critique pour notre étude où nous souhaitons pouvoir comparer des mesures et exploiter des résultats indépendants. Les niveaux de turbulence atteints sont par ailleurs assez faibles.

Récemment, Variano et Cowen [104] ont mis au point un dispositif de génération de turbulence basé sur un réseau carré de  $8 \times 8$  jets au fond d'une cuve. Les 64 jets sont produits par des pompes immergées qui sont allumées et éteintes aléatoirement. L'écoulement turbulent présente d'excellentes résultats en termes d'homogénéité, d'isotropie et de reproductibilité. Il atteint par ailleurs un nombre de Reynolds turbulent 7 fois plus grand que ceux obtenus avec des grilles oscillantes. Toutefois, les 64 pompes qui produisent les jets ont un débit fixe. L'intensité de la turbulence, repérée par les fluctuations de vitesse ne peut donc être modifiée qu'en changeant le temps d'allumage ou le nombre de pompes allumées simultanément. Ceci modifie alors également d'autres caractéristiques de l'écoulement telles que la taille typique des tourbillons (communication privée). Afin de pouvoir atteindre différents niveaux de turbulence, nous proposons ici un dispositif expérimental constitué d'une pompe unique à débit variable, l'ouverture des jets étant contrôlé par des électrovannes. Le gros débit de la pompe permettra par ailleurs d'atteindre des niveaux de turbulence plus élevés.

### 13.2 Description du montage

Les interactions entre la turbulence hydrodynamique et les déformations de la surface libre sont ainsi étudiées dans une cuve carrée de 40 cm de côté et 75 cm de profondeur (voir Fig. 13.1.a). La turbulence est produite par 64 jets verticaux pointant vers le haut, disposés au fond de la cuve et ouverts de façon aléatoire et contrôlée. Les jets sont tous alimentés par une même pompe centrifuge. L'orifice de refoulement de la pompe, dirigé vers le haut, est connecté à une cuve de redistribution

cylindrique (diamètre : 40 cm, hauteur : 12 cm), munis de 64 raccords disposés sur deux rangées à sa périphérie, points de départ des tuyaux. Ces derniers sont équipés d'électrovannes qui permettent d'ouvrir ou de fermer chaque jet individuellement (voir section 13.4). L'autre extrémité des tuyaux est attachée sous la cuve, dont le fond est traversé par des raccords (Fig. 13.1.c). Ils sont disposés autour d'un trou de 80 mm de diamètre. Celui-ci est connecté à l'orifice d'aspiration de la pompe via un circuit constitué de tuyaux et de coudes en PVC, qui est muni d'un débitmètre. La pompe fait ainsi circuler l'eau en circuit fermé.

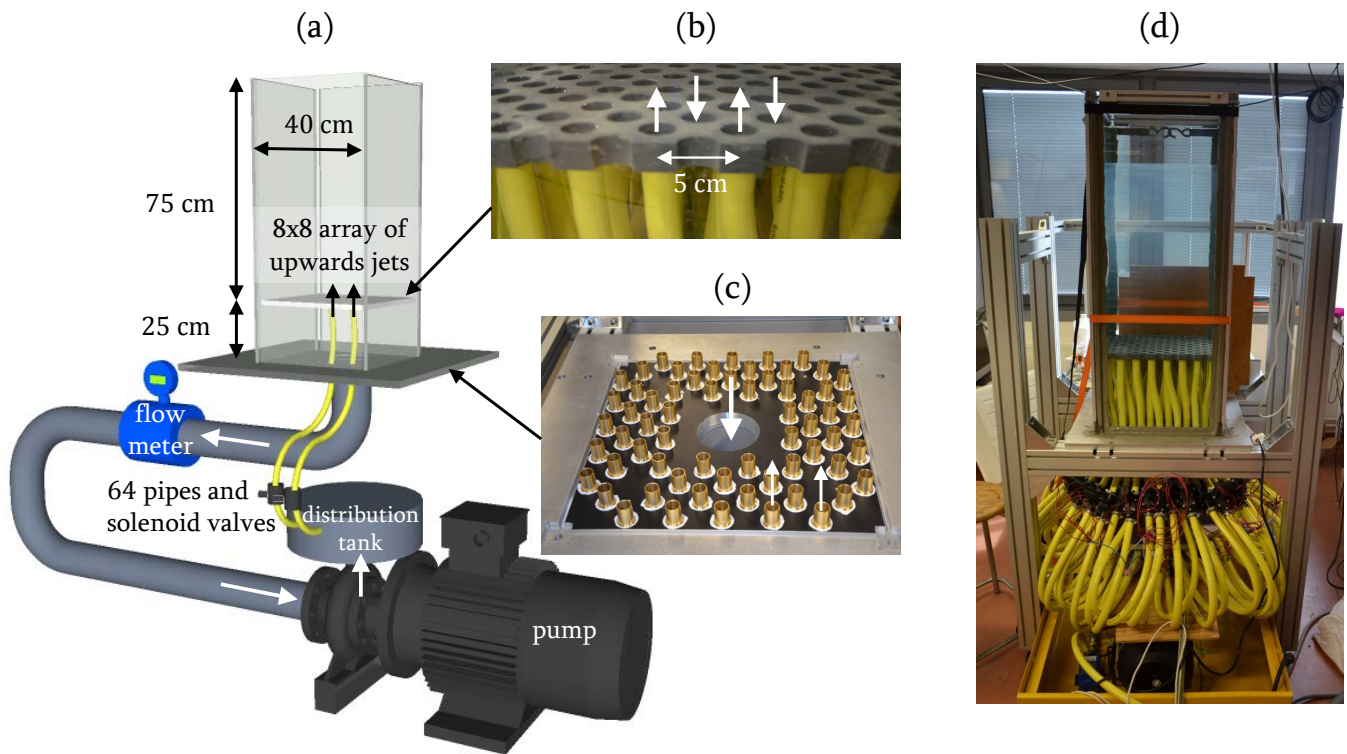


FIGURE 13.1 – (a) Schéma général du dispositif expérimental pour la génération de turbulence. (b) Vue rapprochée sur le réseau carré de 64 jets régulièrement espacés de 5 cm (flèches vers le haut) en quinconce avec des trous dédiés à l'aspiration (flèches vers le bas). (c) Vue du fond de la cuve avant l'installation. Les 64 jets sont disposés autour d'un trou central dédié à l'aspiration (flèche vers le bas). (d) Vue d'ensemble du dispositif expérimental.

Une plaque en PVC est fixée 25 cm au-dessus du fond et sert à la redistribution des jets. Des tuyaux relient les raccords situés au fond de la cuve à d'autres raccords fixés sous la plaque en PVC. Les jets, de diamètre intérieur 16.5 mm, sont alors répartis selon un réseau carré de  $8 \times 8$  à maille carrée et espacés de 5 cm (Fig. 13.1.b). Des trous pour l'aspiration (diamètre : 25 mm) sont par ailleurs percés au centre de tous les carrés formés par les trous d'injection (disposition en quinconce).

Avec ce dispositif, le niveau de turbulence engendrée peut être contrôlé par le débit de la pompe centrifuge. Ceci n'est pas le cas du RASJA de Variano [104], le débit des pompes immergées n'étant pas variable.

### 13.3 Contrôle du débit - Asservissement

La pompe utilisée est le modèle Grundfos NB 65-125/137 (AFA BAQE), alimentée en triphasé, d'une puissance de 7.5 kW. Elle peut produire une surpression de 2.4 bars et atteindre un débit de

$38 \text{ L.s}^{-1}$ . Ce dernier est contrôlé par asservissement au moyen d'un variateur de fréquence (Inoréa Powtran PI8100 11 kW), qui fixe la puissance de la pompe, et d'un débitmètre Mecon mag-flux A (diamètre intérieur 80 mm) qui mesure le débit. Le variateur de fréquence modifie la puissance de la pompe en réduisant la fréquence de fonctionnement  $f$  de la pompe (50 Hz à puissance maximale). La tension est également réduite proportionnellement à la fréquence (400 V à puissance maximale).

Le principe de l'asservissement est illustré sur la Fig. 13.2. La fréquence  $f$  imposée par le variateur à la pompe est déterminée par l'erreur  $\Delta Q$ , qui est la différence entre le débit voulu et le débit mesuré par le débitmètre, selon l'équation suivante [129, 130] :

$$f(t) = K_p \left( \Delta Q(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \Delta Q(\tau) d\tau + T_d \frac{d\Delta Q}{dt} \right) \quad (13.1)$$

où  $K_p$  est le gain de la partie proportionnelle,  $T_i$  le temps d'intégration et  $T_d$  le temps de dérivation. Le premier terme corrige  $f$  proportionnellement à l'erreur  $\Delta Q$ , le second terme ajuste  $f$  en fonction de l'erreur passée et élimine ainsi l'erreur statique, le troisième terme anticipe les variations de débit à partir des variations instantanées de l'erreur.

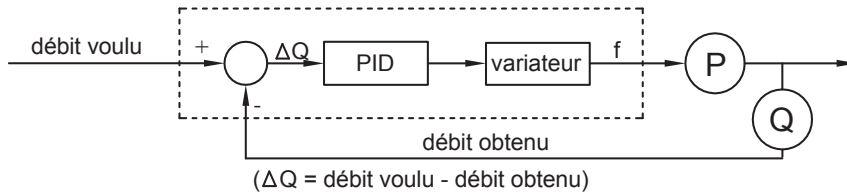


FIGURE 13.2 – Illustration du principe de fonctionnement de l'asservissement. Le correcteur (PID) modifie la fréquence  $f$  du variateur en fonction de la différence entre le débit voulu et le débit de la pompe (P) mesuré par le débitmètre (Q).

Les paramètres  $K_p$ ,  $T_i$  et  $T_d$  ont été choisis afin que l'erreur sur le débit reste inférieure à 10 % au cours des mesures.

## 13.4 Contrôle des jets

### 13.4.1 Electrovanes

Dans ce dispositif de forçage turbulent, seule une fraction des 64 jets est ouverte simultanément. L'indépendance des jets permet d'exercer un forçage spatiotemporel aléatoire au sein du fluide grâce à un algorithme qui détermine l'alternance d'ouverture entre les jets (voir section 13.4.2). On optimise ainsi l'intensité de la turbulence produite et on minimise la présence d'écoulements moyens locaux.

L'ouverture et la fermeture de chaque jet sont ici contrôlées par des électrovannes Irritrol 700B-.75 Ultra Flow. Elles ont été choisies du fait de leur faible coût et car elles disposent d'un mécanisme à grande ouverture limitant les pertes de charges<sup>1</sup> (*e.g.* 0.15 bar pour  $1 \text{ L.s}^{-1}$ ), maximisant ainsi

1. En hydraulique, une perte de charge correspond à une perte d'énergie par dissipation, par exemple lors de la traversée d'un obstacle. A section constante, cela se traduit par une diminution de la pression en aval de l'obstacle. La perte de charge est alors généralement exprimée sous forme d'une pression. Le calcul de l'ensemble des pertes de charge d'un circuit, liées aux obstacles, aux variations de section ou aux conduites, permet de dimensionner la pression de la pompe requise pour atteindre un débit donné.



le débit des jets à pression donnée (voir Fig. 13.3). Ces électrovannes à membrane, destinées à l'arrosage de jardins, sont dites à commande assistée car leur ouverture est assistée par la pression différentielle entre l'amont et l'aval de l'écoulement. Lorsque l'électrovanne est fermée, seule existe une connexion entre le fluide en amont de l'électrovanne et la cavité située au-dessus du piston (en noir sur la Fig. 13.3). Ceci établit un équilibre de pression de part et d'autre du piston. Un ressort maintient alors l'électrovanne fermée. Lorsque l'électrovanne est alimentée en 24 V alternatif, un solénoïde soulève un piston aimanté et établit une connexion entre l'écoulement aval et la cavité au-dessus du piston, faisant décroître la pression dans cette cavité. Si le différentiel de pression est suffisant, le piston se soulève et ouvre l'électrovanne.

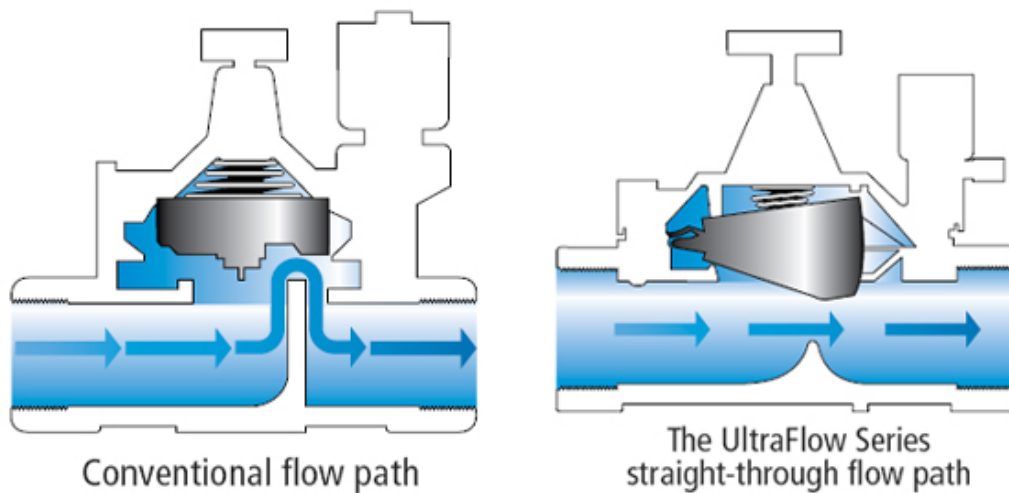


FIGURE 13.3 – Différence entre les électrovannes à membranes à commande assistée traditionnelle (à gauche) et les électrovannes Irritrol UltraFlow utilisées dans cette expérience. Le circuit d'écoulement dans les premières est composé d'un rétrécissement important et d'un coude à 180°, entraînant une forte perte de charge et limitant le débit. Source de l'image : *Irritrol*

Il est à noter qu'une pièce située à l'intérieur de l'électrovanne ralentit l'établissement des équilibres de pression en limitant le débit dans les connexions mentionnées précédemment. Ceci vise à ralentir les ouverture et fermeture de l'électrovanne afin d'éviter ce qu'on appelle des "coups de bélier" dans les installations d'arrosage. Nous avons ôté cette pièce afin d'atteindre des temps d'ouverture et de fermeture les plus courts possibles.

Malgré l'utilisation de 64 électrovannes identiques, des débits très différents les uns des autres sont observés à la sortie de chaque jet. La Fig. 13.4.a représente sous forme d'une grille le débit de chaque électrovanne après 3 s d'ouverture continue lorsque la fréquence du variateur est fixée à 14 Hz. Ainsi, pour un débit moyen par jet  $\langle Q_j \rangle = 0.13 \text{ L.s}^{-1}$ , on observe un écart-type de  $0.042 \text{ L.s}^{-1}$  sur l'ensemble des électrovannes. Ces débits très disparates sont corrélés avec les numéros de série inscrits sur les électrovannes et sont donc probablement dûs à des effets de série. La raideur des ressorts peut par exemple varier d'une série à l'autre et modifier l'ampleur de l'ouverture de l'électrovanne pour une même pression exercée par la pompe. Pour pallier ce problème et éviter la présence d'écoulements moyens, nous avons réparti les électrovannes de façon homogène comme le montre la Fig. 13.4.a. Les électrovannes présentant les débits les plus importants sont placées au centre du réseau et sur le contour du carré orienté à 45° et inscrit dans le carré délimitant le fond le bassin (voir Fig. 13.4.b). Les quatre sous-carrés formant la grille (en haut à gauche, en haut à droite, en bas à gauche, en bas à droite) affichent par ailleurs des débits moyens similaires ( $\pm 5\%$ ). Il est à noter que des problèmes d'ouvertures des électrovannes ont subsisté en raison de leur vieillissement. Certaines électrovannes ont vu leur débit varier au cours du temps et quelques-unes pouvaient parfois rester ouvertes malgré



l'absence d'alimentation. Enfin, on a pu remarquer que l'inhomogénéité des débits avait tendance à s'atténuer avec l'intensité de la turbulence.

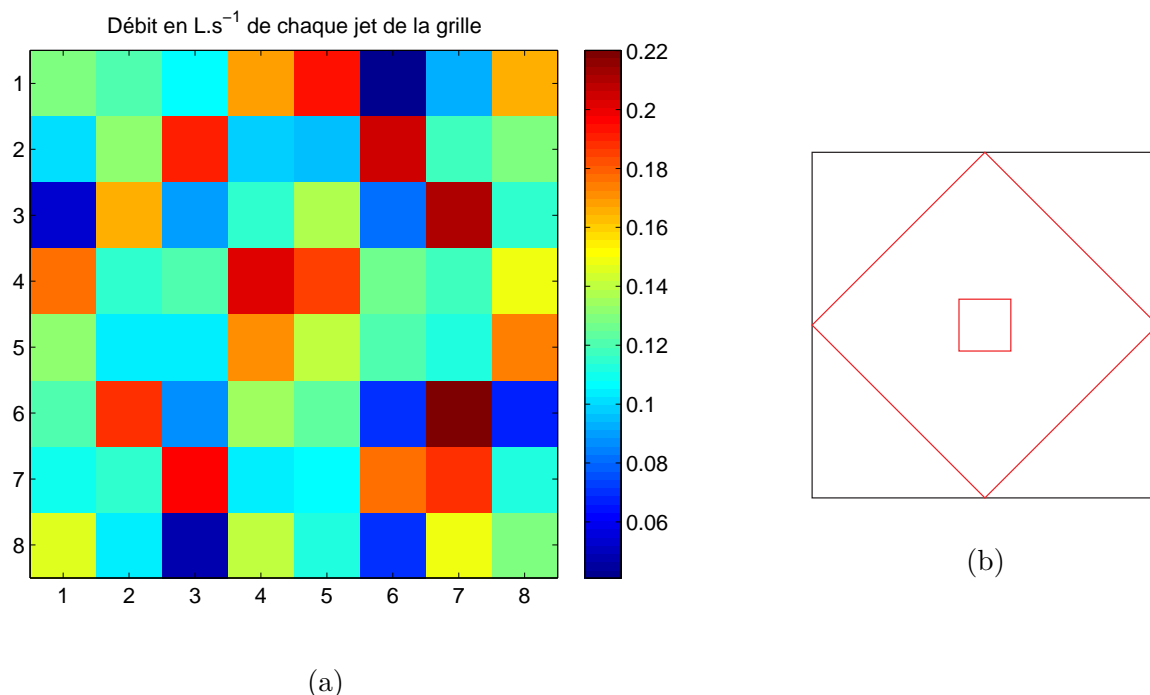


FIGURE 13.4 – (a) Chaque carré représente un jet du réseau de  $8 \times 8$  jets. La couleur indique le débit obtenu après 3 s lorsque l'électrovanne est la seule ouverte et que la fréquence du variateur est fixée à 14 Hz ; (b) Les lignes rouges représentent la position des jets les plus puissants.

Deux transformateurs toriques de tension alternative 24 V et de puissance 400 W alimentent en parallèle les électrovannes pour leur ouverture. Chaque électrovanne est installée en série avec un relais statique Measurement Computing SSR-4-OAC-05 qui joue le rôle d'un interrupteur fermé ou ouvert lorsqu'une tension de respectivement 0 ou 5 V lui est appliquée. Pour cela, les relais sont installés sur deux racks Measurement Computing SSR-RACK48/DST et sont commandés par deux micro-contrôleurs Arduino Mega 2560 (voir Fig. 13.5). Chaque micro-contrôleur dispose de 54 sorties numériques capables de délivrer 0 ou 5 V.

A partir de paramètres communiqués par port série via Matlab, un Arduino maître calcule les temps d'ouvertures des électrovannes et détermine les alternances entre jets selon l'algorithme décrit dans la section 13.4.2. Il commande par ailleurs 32 relais via ses sorties numériques. Les 32 autres relais sont pilotés par un Arduino esclave qui reçoit les instructions données par l'Arduino maître via port série (RX/TX).

### 13.4.2 Algorithme

Les temps d'ouverture des électrovannes et l'alternance entre les jets est déterminée par un algorithme qui permet de générer un forçage spatiotemporel aléatoire.

#### Sunbathing algorithm (Variano)

L'algorithme utilisé par Variano [104], dénommé "sunbathing algorithm", est celui pour lequel il obtient la meilleure combinaison d'un faible écoulement moyen, un haut nombre de Reynolds et une

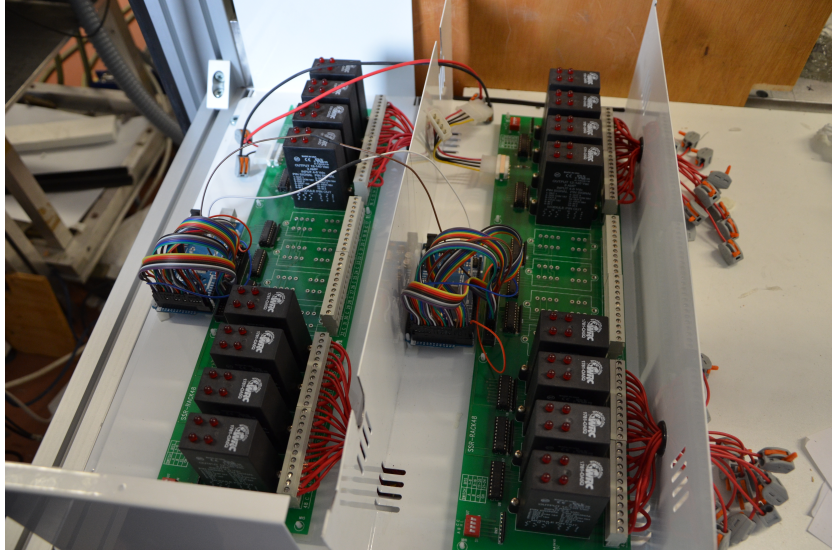


FIGURE 13.5 – Dispositif de contrôle des électrovannes. Deux racks (verts) accueillent 64 relais statiques (noirs, par blocs de 4), pilotés par deux micro-contrôleurs Arduino (bleus).

bonne homogénéité spatiale. Il est illustré sur la Fig. 13.6. A chaque fois qu’on allume un jet, on tire au hasard la durée d’ouverture  $d_{on}$  à partir d’une densité de probabilité de la loi normale,  $f_{on}$ , centrée sur le temps moyen  $\mu_{on} = 3$  s et d’écart-type  $\sigma_{on} = 1$  s. A la fin de cette durée, le jet reste éteint pendant une durée  $d_{off}$  tirée au hasard à partir d’une densité de probabilité  $f_{off}$ . Une fois la durée  $d_{off}$  écoulée, le jet est à nouveau allumé pendant une nouvelle durée  $d_{on}$  choisie au hasard et ainsi de suite. Les ouvertures et les fermetures des différents jets ont lieu en parallèle. La durée moyenne d’extinction d’un jet  $\mu_{off}$  est déterminée par  $\mu_{on}$  et la fraction moyenne  $\phi \equiv \overline{N}_{on}/64$  de jets ouverts simultanément, avec  $\overline{N}_{on}$  le nombre moyen de jets allumés simultanément. En effet, le ratio  $\mu_{on}/\mu_{off}$  est égal au rapport entre le nombre de jets ouverts et le nombre de jets fermés<sup>2</sup> :  $\mu_{on}/\mu_{off} = \phi/(1 - \phi)$ . Variano a déterminé que l’intensité de la turbulence était maximale pour l’ouverture de 8 jets simultanés en moyenne, soit  $\phi = 0.125$ . C’est donc le paramètre qu’il a choisi pour ses expériences.

### Algorithme à nombre de jets constant

Avec le “sunbathing algorithm”, les jets sont contrôlés indépendamment les uns des autres et le nombre de jets ouverts en même temps n’est donc pas constant dans le temps : il oscille autour du nombre de jets moyen  $\overline{N}_{on} = 64\phi$ . Ceci n’est pas problématique dans le dispositif expérimental de Variano, qui utilise des pompes immergées indépendantes. Le débit de chaque jet n’est pas affecté par le nombre de jets simultanés. En revanche, dans notre cas, une pompe unique alimente l’ensemble des jets. Un changement du nombre de jets ouverts simultanément modifie alors le débit de chaque jet. La Fig. 13.7 représente l’amplitude des fluctuations turbulentes de vitesse en fonction du débit individuel des jets pour différents nombre de jets. On observe que l’intensité de la turbulence dépend en grande partie du débit individuel des jets. Il est donc important de maintenir un nombre constant de jets ouverts simultanément afin de ne pas modifier l’intensité de la turbulence au cours d’une mesure.

Nous avons donc réalisé un algorithme différent dans lequel le nombre de jets simultanés reste fixe (voir Fig. 13.8). Initialement,  $N_{on}$  jets sont tirés au sort. Chacun est ouvert pour une durée tirée au sort à partir d’une densité de probabilité uniforme entre 0 et  $\mu_{on}$ . A chaque fois qu’un jet atteint

2. Cette formule corrige une erreur dans [104] indiquant que  $\mu_{on}/\mu_{off} = \phi$ .

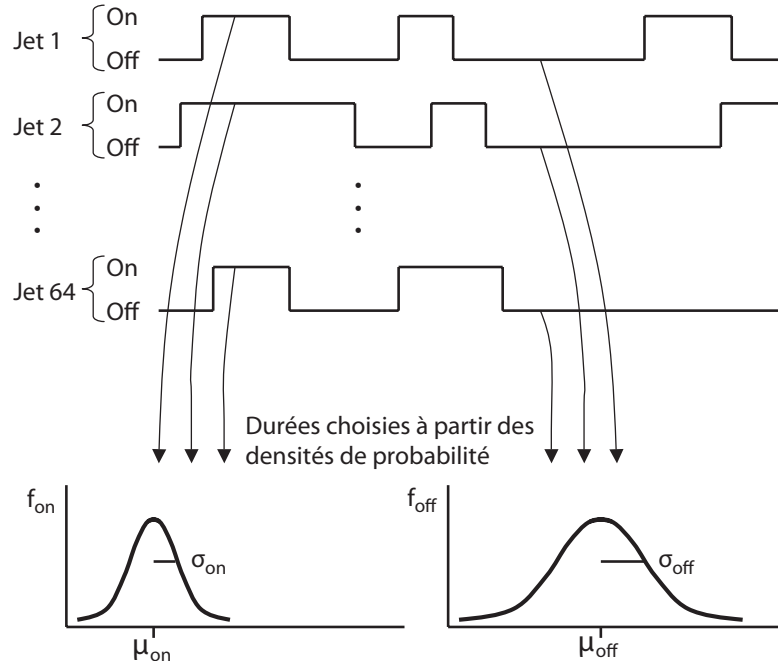


FIGURE 13.6 – Illustration de l’algorithme utilisé par Variano [104]. A chaque fois qu’un jet s’ouvre ou se ferme, on tire au sort la durée pendant laquelle il restera dans ce même état à partir des densités de probabilité respectives  $f_{on}$  et  $f_{off}$  (bas de la figure). Source de l’image : [104].

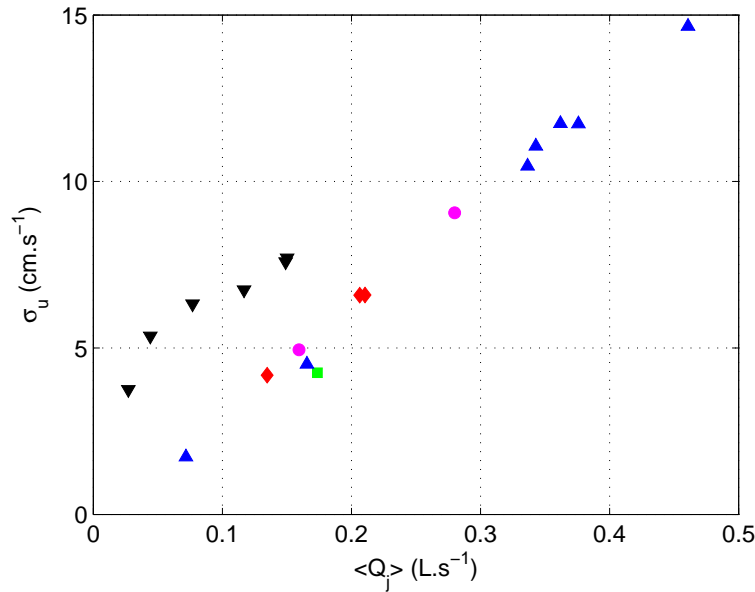


FIGURE 13.7 – Fluctuations de vitesses horizontales  $\sigma_u$  en fonction du débit moyen par jet ouvert  $\langle Q_j \rangle = Q_{total}/N_{on}$  pour différents nombres de jets simultanés  $N_{on}$  (4 cm sous la surface ; hauteur d’eau :  $h = 50$  cm) : ■ 4 jets ; ▲ 8 jets ; ● 16 jets ; ◆ 32 jets ; ▼ 64 jets.

la fin de la durée choisie, il est remplacé par un jet tiré au sort parmi ceux qui sont fermés et pour lequel on tire au sort une durée d’ouverture  $d_{on}$  à partir de la densité de probabilité  $f_{on}$ . Ainsi le nombre de jets allumés reste le même au cours de la mesure.

La plupart des mesures est réalisée pour un choix de  $N_{on} = 16$  électrovannes ouvertes en même temps (soit  $\phi = 0.25$ ) avec un temps d’ouverture moyen  $\mu_{on} = 3$  s ( $\sigma_{on} = 1$  s). Nous avons ainsi choisi un nombre de jets simultanés importants pour compenser la disparité des débits. Ainsi, par

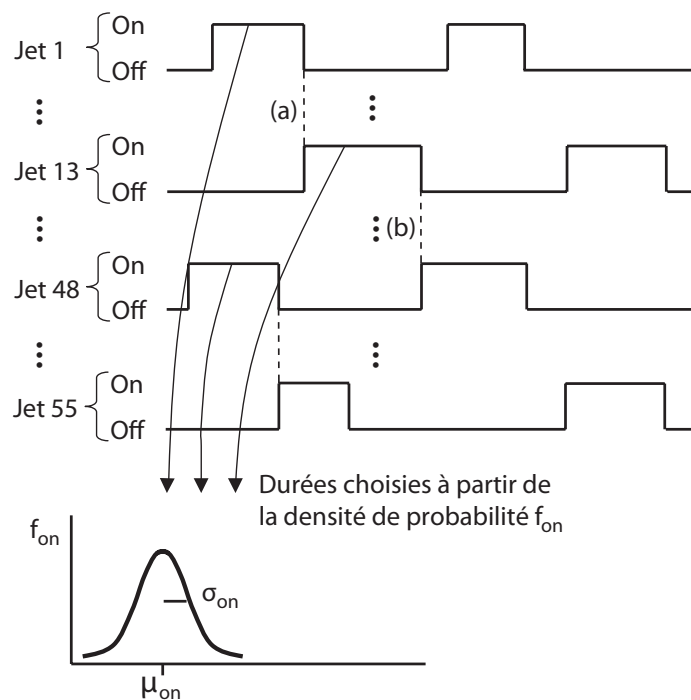


FIGURE 13.8 – Illustration de l’algorithme utilisé dans cette étude. (a) lorsque le jet 1 se ferme, un jet est choisi au hasard parmi les jets fermés (ici le jet 13) et reste ouvert pendant une durée tirée au hasard à partir de la densité de probabilité  $f_{on}$ ; (b) lorsque cette durée est écoulée, un nouveau jet précédemment fermé (48) est choisi au hasard et est ouvert.

effet statistique, la répartition entre jets puissants et faibles reste plus stable au cours d’une mesure. De plus, les jets sont alors spatialement plus proches les uns des autres, ce qui favorise leurs interactions. Toutefois, des fractions  $\phi$  plus élevées favorisent la production d’écoulements moyens (*e.g.* installation de recirculations) en limitant l’alternance entre des états très différents. Le temps moyen d’ouverture  $\mu_{on}$  a été choisi le plus court possible afin de limiter les variations à grande échelle temporelle. La limite inférieure est fixée par le temps nécessaire pour obtenir un débit suffisant lors de l’ouverture. Enfin, aucun effet significatif de  $\sigma_{on}$  n’a été détecté.

## 13.5 Techniques de mesures

### 13.5.1 Vélocimétrie par Images de Particules (PIV)

Le champ de vitesses sous la surface libre est déterminé par vélocimétrie par images de particules (PIV), une technique de mesure déjà utilisée dans la partie I sur la génération d’ondes de surface par un fond mobile et dont le principe a été décrit dans la section 2.3.1. Toutefois, nous utilisons ici le plugin PIVLab pour Matlab, dont le principe est similaire au programme développé pour la partie I, mais qui est plus simple d’utilisation. Les vitesses sont mesurées dans le plan vertical sous la surface libre sur une profondeur  $-9 < z < 0$  cm, le long d’une coordonnée horizontale  $-15 < x < +15$  cm, et centrée selon l’autre coordonnée horizontale  $y$ . Les vecteurs vitesses sont calculés sur des fenêtres de  $4 \times 4 \text{ cm}^2$  et sont espacés de 2 mm dans les deux directions.

### 13.5.2 Profilométrie par Transformée de Fourier (FTP)

Afin de réaliser des mesures spatiotemporelles des déformations de la surface libre en deux dimensions, nous avons recours à la profilométrie par transformée de Fourier [131, 132] (Fourier Transform Profilometry - FTP). Cette technique de mesures a été utilisée au laboratoire pour des mesures de turbulence d'ondes de surface [133, 134]. Le principe est de projeter une grille à la surface de l'eau au moyen d'un vidéoprojecteur (Epson TW3000) et de mesurer les déformations de la surface libre à partir des déformations de la grille visualisées par une caméra (Phantom V10) (voir Fig. 13.9).

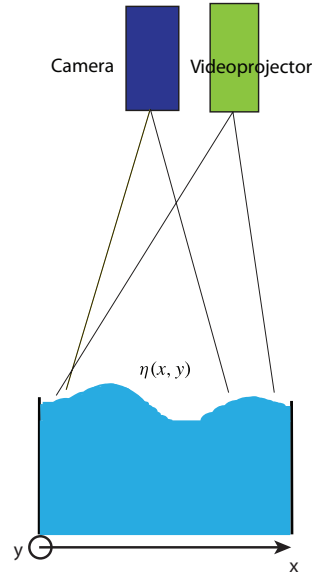


FIGURE 13.9 – Schéma du dispositif expérimental pour les mesures par FTP extrait de [134].

Pour cela, on forme dans l'eau ultra-pure une dispersion de particules de dioxyde de titane (Kronos TiO<sub>2</sub> Anatase 1001), qui ont la propriété de diffuser la lumière, attribuant ainsi une couleur blanche à l'eau. Les précédentes mesures au laboratoire utilisaient de la peinture blanche, qui avait l'inconvénient d'introduire des surfactants et donc de modifier les caractéristiques de la surface de l'eau. L'utilisation de TiO<sub>2</sub> permet de conserver les propriétés de l'eau [135].

Le vidéoprojecteur et la caméra sont disposés verticalement à l'aplomb de la surface libre, leurs centres optiques sont à une distance  $L = 74$  cm de la surface de l'eau et sont espacés de  $D = 19$  cm l'un de l'autre selon l'axe perpendiculaire aux franges (voir Fig. 13.9). Le vidéoprojecteur dispose d'un mécanisme de déplacement du bloc optique (*lens shift*) permettant de placer la figure projetée dans le champ de la caméra.

Le motif projeté à la surface de l'eau est constitué de franges rectilignes selon l'axe  $Oy$  dont l'intensité varie sinusoïdalement selon l'axe  $Ox$  qui leur est perpendiculaire (voir Fig. 13.10). Lorsque la surface libre se déforme, les franges sur les images de la caméra se déforment également et un algorithme détermine par démodulation le déphasage  $\Delta\phi(x, y, t)$  en chaque point par rapport à l'image de référence des franges projetées sur la surface au repos. En notant  $k_p = 2\pi/p$  (avec  $p$  l'interfrange) le nombre d'onde du motif projeté, un raisonnement géométrique permet de montrer que la déformation de la surface libre correspondante est [131] :

$$\eta(x, y, t) = \frac{L\Delta\phi(x, y, t)}{\Delta\phi(x, y, t) - k_p D} \quad (13.2)$$

De plus, nous tenons compte du fait que, par effet géométrique, ce qui est mesuré aux coordonnées

$(x, y)$  dans le plan de l'image déformée correspond aux coordonnées  $(x + \delta x, y + \delta y)$  dans le plan de l'image de référence avec [132] :

$$\delta y = \frac{y}{L} \eta(x, y, t) \quad (13.3)$$

$$\delta x = \frac{D - x}{L} \eta(x, y, t) \quad (13.4)$$

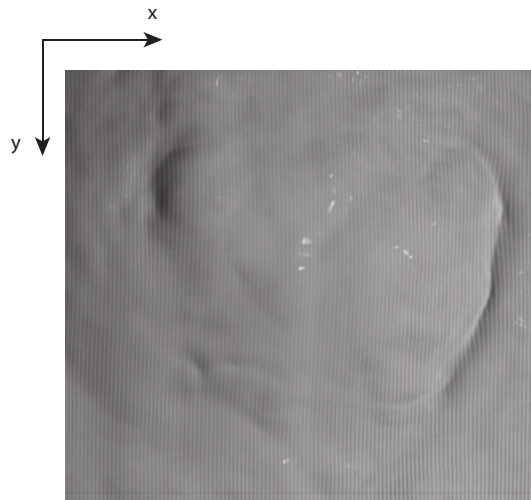


FIGURE 13.10 – Exemple d'image obtenue pour une mesure de profilométrie par transformée de Fourier lors de la déformation de la surface libre par la turbulence hydrodynamique.

La concentration en  $\text{TiO}_2$  a été choisie à un niveau modéré, entre 6 et  $12 \text{ g.L}^{-1}$ , pour obtenir un bon contraste des franges tout en évitant que des dépôts de particules importants perturbent le mécanisme d'ouverture des électrovannes. La sédimentation des particules est évitée par le mélange en continu du liquide par la turbulence.

Lors des mesures, la lampe du vidéoprojecteur se reflète à la surface de l'eau, faisant ainsi apparaître une ou plusieurs tâches très lumineuses sur les images filmées par la caméra. Les franges ne sont alors localement plus visibles, ce qui empêche de déterminer la déformation de la surface libre. Pour y remédier, des polariseurs rectilignes croisés sont fixés à la sortie du vidéoprojecteur et à l'entrée de la caméra afin d'éliminer en grande partie ces reflets. La lumière se reflétant à la surface est polarisée rectilignement selon l'axe du polariseur à la sortie du vidéoprojecteur, alors que la lumière diffusée par le  $\text{TiO}_2$  n'est pas polarisée. La première est donc éliminée par le polariseur à l'entrée de la caméra, dont l'axe est croisé avec le polariseur du vidéoprojecteur. Les reflets qui subsistent malgré ces précautions sont éliminés grâce à un algorithme, initialement développé par Nicolas Mordant, qui reconstruit les franges par interpolation.

Le temps de mesure maximal est déterminé par la capacité de stockage de la caméra en fonction de la résolution des images et de la fréquence d'acquisition. La principale limite que nous avons rencontrée avec cette méthode de mesure est liée aux fortes pentes et aux fortes courbures qui peuvent affecter la surface libre. Des zones d'ombre prononcée ou des creux peuvent alors faire disparaître des franges, provoquant ainsi des erreurs lors de la reconstruction. Il s'agit de la cause principale du bruit observé sur les mesures, en particulier au chapitre 16. Enfin, il faut préciser que le  $\text{TiO}_2$  rend le liquide opaque et empêche de mesurer simultanément la déformation de la surface libre par FTP et le champ de vitesses par PIV.

Les mesures par FTP, qui donnent accès à une mesure spatiotemporelle du champ de déformation de

la surface libre, permettent de calculer des spectres de puissance spatiotemporels de la déformation de la surface libre :

$$S_\eta(k_x, k_y, \omega) = \frac{1}{TL_xL_y} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{\eta}(k_x, k_y, t) e^{i\omega t} dt \right|^2 \quad (13.5)$$

où  $T$  est la durée de la mesure,  $L_x \times L_y$  la taille de l'image et  $\hat{\eta}(k_x, k_y, t)$  est la transformée de Fourier spatiale en deux dimensions calculée pour chaque image :

$$\hat{\eta}(k_x, k_y, t) = \frac{1}{2\pi} \int \eta(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (13.6)$$

### 13.5.3 Vélométrie laser Doppler (LDV)

Le dispositif de vélocimétrie laser Doppler (Laser Doppler Velocimetry - LDV) fournit la vitesse de l'écoulement en un point selon une composante. Par rapport à la PIV, il tire avantage de sa facilité d'utilisation ainsi que de sa légèreté, par la faible taille des données et l'absence de traitement d'images. L'appareil utilisé est le modèle Dantec Dynamics FlowExporer 1D. Une grande partie des mesures a été réalisée avec un appareil généreusement prêté par le laboratoire Sphynx du CEA Saclay avant l'achat d'un modèle identique par le laboratoire MSC.

Le principe de la mesure est illustré sur la Fig. 13.11 et est décrit de façon plus exhaustive dans la référence [136]. Un faisceau laser de longueur d'onde  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$  est scindé en deux faisceaux qui convergent au point de mesure, formant un angle  $\varphi = 13.4^\circ$ . L'un des deux faisceaux voit sa fréquence décalée de  $f_d \simeq 40 \text{ Mhz}$  en traversant une cellule de Bragg. Au point de mesure, les deux faisceaux cohérents interfèrent et produisent des franges allongées selon l'axe  $Ox$ , qui défilent à la fréquence  $f_d$  en raison du décalage en fréquence. Le liquide estensemencé de fines particules dont la densité est proche de celle de l'eau (ici en polyamide de densité 1.03 et de diamètre  $20 \mu\text{m}$ ) telle qu'on considère qu'elles suivent l'écoulement. Lorsqu'elles traversent la zone composée de franges d'interférence (de volume  $900 \times 90 \times 90 \mu\text{m}^3$ , la première dimension étant alignée avec l'axe du laser), les particules émettent un scintillement de fréquence  $f_s$ , qui dépend de leur vitesse de déplacement. Pour des franges fixes,  $f_s = |v_y|/i$ , où  $i$  est l'interfrange et  $|v_y|$  est la norme de la composante de vitesse du fluide normale aux franges. Le défilement des interfranges à la fréquence  $f_d$  permet alors d'accéder au signe de  $v_y$  car la vitesse des particules ne fait alors que décaler la fréquence de scintillement  $f_s$ . Si les franges défilent dans le sens des  $y$  croissants et que  $f_d > v_y/i$ , on a en effet  $f_s = f_d - v_y/i$ . La LDV donne donc accès à une composante de la vitesse en un point.

Il est à noter que le taux d'acquisition de cette mesure n'est pas régulier car soumis au passage des particules, chacune d'entre elles produisant un point de mesure. Lorsqu'on s'intéresse aux statistiques de vitesse de l'écoulement, un biais est la surreprésentation des hautes vitesses. En effet, lorsque l'écoulement local a une vitesse importante, un plus grand nombre de particules traverse le volume de mesure, ce qui génère un plus grand nombre de points de mesure en un temps donné. Pour palier ce biais, nous avons reconstruit un signal de fréquence d'échantillonnage fixe par interpolation linéaire des points de mesure. De cette manière, les épisodes de faibles et de fortes vitesses contiennent la même densité temporelle de points de mesure.

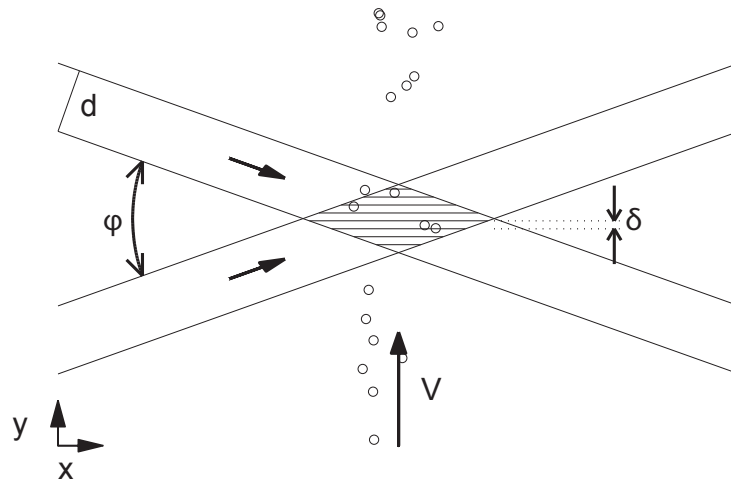


FIGURE 13.11 – Principe de fonctionnement de la LDV. Des franges défilantes (au centre) sont formées en volume par l'interférence de deux faisceaux laser de fréquences différentes. Des particules (cercles) réfléchissent la lumière lorsqu'elles traversent le champ d'interférence et renseignent sur leurs vitesses par la fréquence de leurs scintillements. Source de l'image : [136]



# Chapitre 14

## Turbulence hydrodynamique : effet de la surface libre et caractérisation

Ce chapitre poursuit deux objectifs. D'une part, nous caractérisons la turbulence hydrodynamique, pour pouvoir ensuite étudier son rôle dans la déformation de la surface libre et son interaction avec les ondes de surface (voir chapitres suivants). Pour cela, différentes grandeurs typiques sont mesurées pour différentes intensités de forçage. D'autre part, la surface libre elle-même n'est pas neutre dans la dynamique des écoulements et modifie la structure de la turbulence à son voisinage. Ces mesures nous permettent de mettre en évidence ce phénomène et de l'observer quantitativement.

Sauf mention contraire, les statistiques sont calculées à partir de mesures du champ de vitesse au sein du fluide toutes les secondes pendant 30 minutes pour une hauteur d'eau  $h = 66$  cm en présence de 16 jets simultanés. Chaque mesure est réalisée par PIV à partir de l'acquisition de deux images successives espacées de <sup>1</sup> 2 ms. Les figures présentant les résultats d'une seule mesure correspondent à un débit moyen par jet  $\langle Q_j \rangle = 0.37 \text{ L.s}^{-1}$ , soit des fluctuations de vitesses de l'ordre de  $8 \text{ cm.s}^{-1}$  et un nombre de Reynolds turbulent  $Re_T = 4100$  (voir section 14.2.4).

### 14.1 Turbulence hydrodynamique sous la surface libre

#### 14.1.1 Fluctuations de vitesse

Une image typique des particules éclairées par la nappe laser est représentée sur la Fig. 14.1 et la Fig. 14.2 montre le champ de vitesses obtenu à partir d'une paire d'images successives.

On note  $u$  et  $w$  les vitesses instantanées locales respectivement horizontales (selon la coordonnée  $x$ ) et verticales (selon la coordonnée  $z$ ) du plan de mesure. Leurs moyennes locales temporelles sont respectivement  $\overline{U}(x, y, z) = \overline{u(x, y, z, t)}$  et  $\overline{W}(x, y, z) = \overline{w(x, y, z, t)}$ . La composante  $v$  (selon  $y$ ) de la vitesse est perpendiculaire au plan de mesure et on considère par symétrie que les grandeurs statistiques qui lui sont associées sont proches de celles de  $u$ . Les fluctuations de vitesses sont caractérisées par leurs écarts-types  $\sigma_u$  et  $\sigma_w$  de la forme  $\sigma_u = \sqrt{u^2 - \overline{U}^2}$ . On peut également définir une grandeur représentative des trois composantes de vitesse définies par  $\Sigma_v = \sqrt{(2\sigma_u^2 + \sigma_w^2)/3}$  [104].

Les grandeurs  $\sigma_u$ ,  $\sigma_w$  et  $\Sigma_v$  sont représentées dans le plan de mesure sur les Figs 14.3, 14.4 et 14.5 respectivement. La surface libre est en  $z = 0$ . La zone d'observation sous la surface libre (jusqu'à

---

1. Sauf les plus faibles débits pour lesquels cette durée est allongée

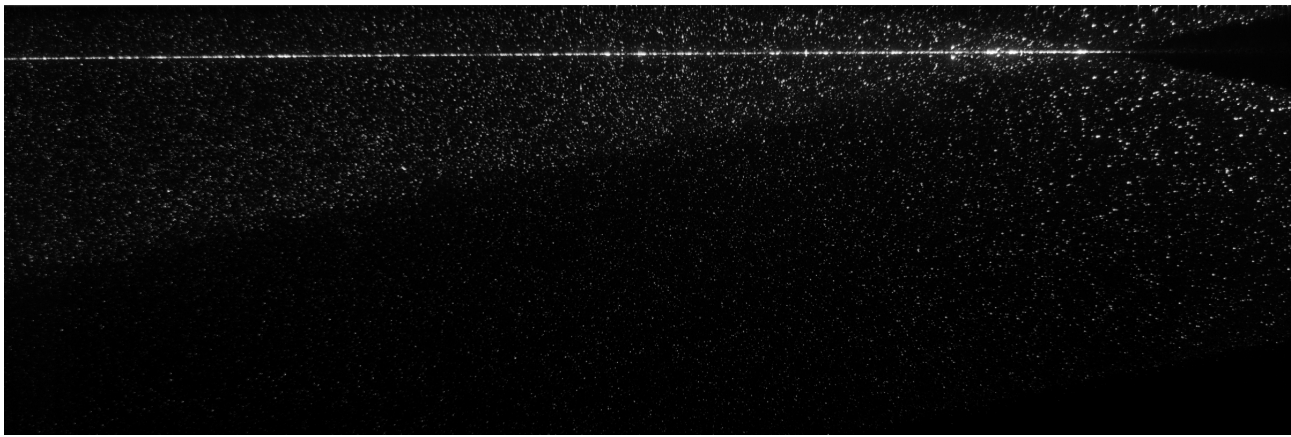


FIGURE 14.1 – Exemple d'image PIV obtenue servant à la détermination du champ de vitesses. Les points blancs correspondent aux particules qui réfléchissent la lumière de la nappe laser. La ligne blanche horizontale correspond à la surface libre visualisée par ces particules.

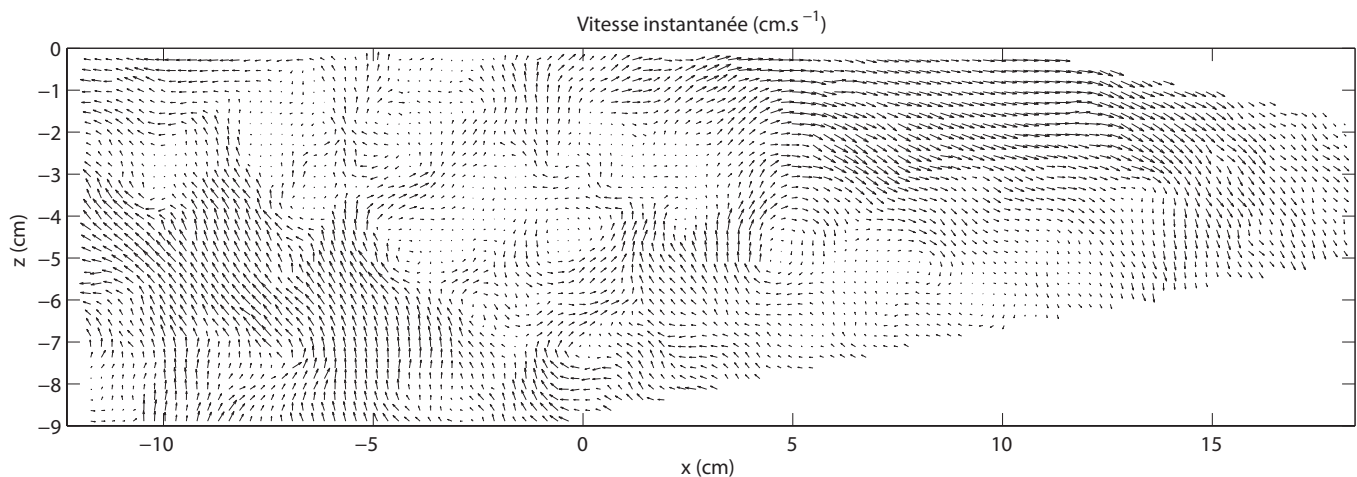


FIGURE 14.2 – Exemple de champ de vitesse obtenu à partir des images PIV. La surface libre est en  $z = 0$ .

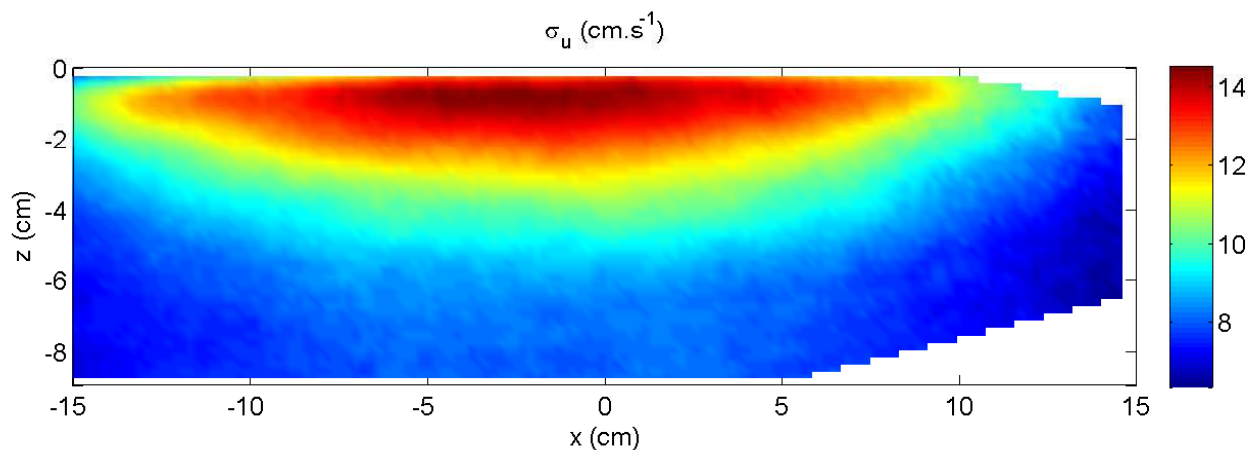
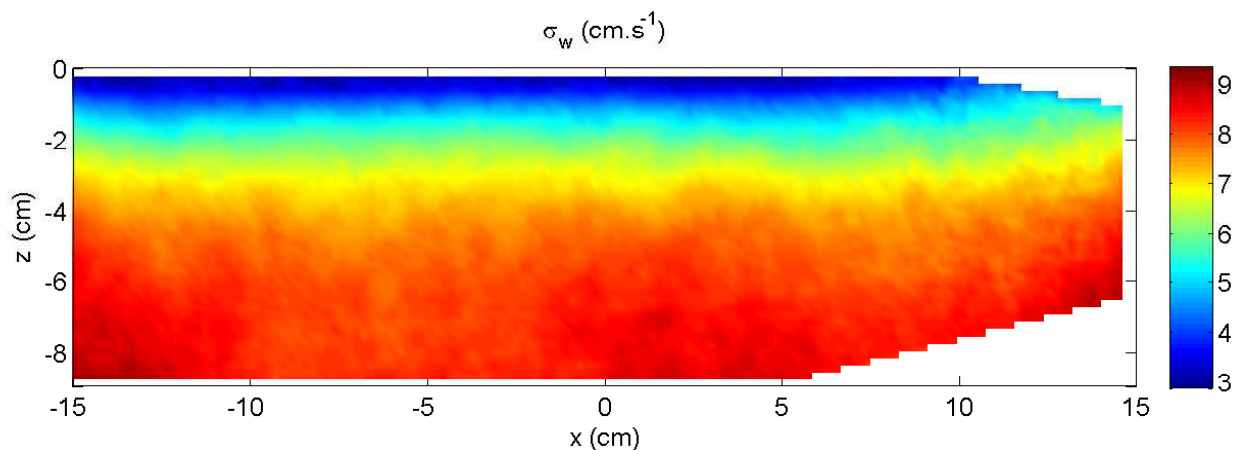
une profondeur  $z = -9$  cm) est centrée en  $x = 0$  et en  $y = 0$  et a une largeur de 30 cm soit 75 % de la largeur de la cuve.

On remarque que les fluctuations de vitesse horizontale sont maximales sous la surface libre et au centre de la cuve tandis que les fluctuations de vitesse verticale diminuent près de la surface libre en restant homogène horizontalement. Les fluctuations horizontales et verticales présentent alors des comportements très différents lorsqu'on s'approche de la surface libre, ce que nous allons étudier plus précisément ci-dessous.

### Profil vertical

On retrouve ces caractéristiques sur les profils verticaux tracés sur la Fig. 14.6. Ils montrent que  $\sigma_u$  augmente à l'approche de la surface libre, à l'exception d'une couche limite d'environ 1 cm sous la surface libre, tandis que  $\sigma_w$  diminue. Alors que l'isotropie est bonne pour une profondeur  $z < -6$  cm, l'écoulement devient alors très anisotrope en se rapprochant de la surface libre ( $z = 0$ ).

Cette évolution correspond qualitativement aux prédictions théoriques de Hunt et Graham dans le cadre de la théorie de la distorsion rapide [88]. Elle est liée aux conditions aux limites imposées par la surface libre qui joue le rôle de paroi. Il s'agit alors d'une redistribution de l'énergie des

FIGURE 14.3 – Ecart-type des fluctuations de vitesse horizontales  $\sigma_u$  dans le plan vertical.FIGURE 14.4 – Ecart-type des fluctuations de vitesse verticale  $\sigma_w$  dans le plan vertical.

fluctuations de vitesse verticales vers les fluctuations horizontales. En effet, la surface libre limite les mouvements verticaux du fluide et l'énergie cinétique correspondante est alors convertie en énergie cinétique horizontale. La profondeur de la zone affectée dépend donc de la taille typique des grands tourbillons  $L$ . Cette dernière grandeur est définie par la longueur intégrale longitudinale loin de la paroi qui vaut  $L = L_L \approx 5$  cm dans notre expérience (voir section 14.2.2).

Hunt et Graham [88] ont prédit que les fluctuations de vitesses verticales à l'approche d'une paroi solide allaient comme  $\sigma_w \propto (-z)^{1/3}$  dans la couche définie par  $-L \lesssim z$ , en-dehors de la couche visqueuse près de la paroi. Dans le cas d'une surface libre, l'épaisseur de la couche limite visqueuse déterminée expérimentalement est  $\delta_\nu \approx 2L/\sqrt{2Re_T}$  [98, 103], avec  $Re_T$  le nombre de Reynolds turbulent (ici,  $Re_T \in [500; 6500]$  et donc  $\delta_\nu \in [0.10; 0.29]$  cm – voir section 14.2.4). Le modèle

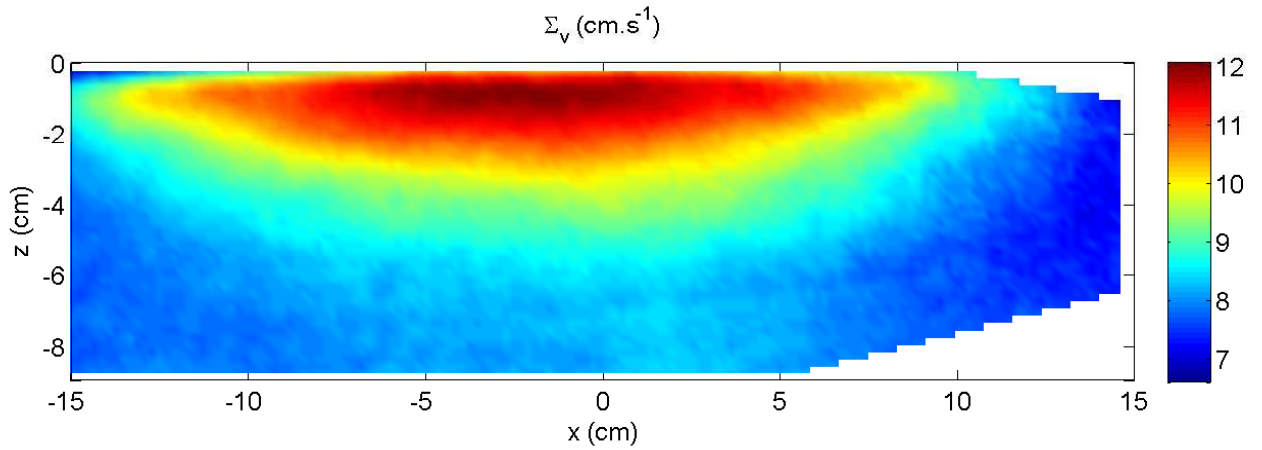


FIGURE 14.5 – Ecart-type des fluctuations de vitesse moyennées sur les trois composantes  $\Sigma_v = \sqrt{(2\sigma_u^2 + \sigma_w^2)/3}$  dans le plan vertical.

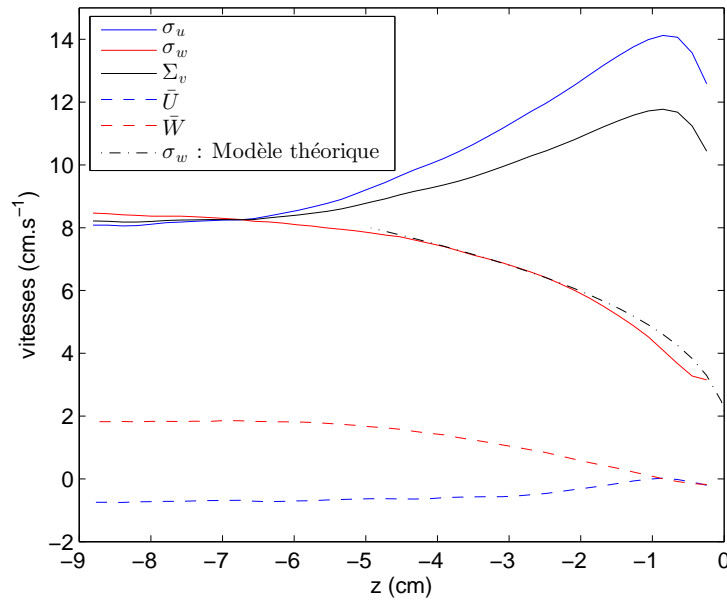


FIGURE 14.6 – Profil spatial vertical des vitesses. Moyenne horizontale sur  $-5 < x < +5$  cm. Le modèle théorique correspond à l'Eq. (14.1) avec  $L = 5$  cm,  $\beta = 1.8$ ,  $Re_T = 4100$  et  $\epsilon = 41$  cm<sup>2</sup>.s<sup>-3</sup>.

prenant en compte cette couche visqueuse prédit alors l'équation [98] :

$$\sigma_w = \sqrt{\beta} \epsilon^{1/3} \left( \frac{L(|z| - \delta_\nu)}{L - \delta_\nu} \right)^{1/3} \quad (14.1)$$

où  $\beta = 1.8$  est une constante théorique sans dimension et  $\epsilon$  est le taux de dissipation ( $\epsilon \in [0.2; 102]$  cm<sup>2</sup>.s<sup>-3</sup> – voir section 14.2.3).

Dans le cas de simulations numériques, Calmet et Magnaudet [98] ont trouvé un bon accord pour

$-0.7L \lesssim z \lesssim \delta_\nu$  en prenant  $\beta \approx 2.0$  et Variano et Cowen [104] ont mesuré expérimentalement  $\beta \approx 1.5$  et ont trouvé que le modèle était valide jusqu'à une profondeur  $z = -L$  (la couche limite visqueuse n'était pas résolue). Nous traçons ce modèle en pointillés sur la Fig. 14.6 et trouvons un bon accord jusqu'à une profondeur  $z = -L$  en utilisant la valeur théorique  $\beta = 1.8$ . Nous avons retrouvé ce bon accord entre prédiction théorique et expériences pour différents débits en choisissant  $1.4 \lesssim \beta \lesssim 1.8$  (non montré). Il est à noter que nous observons que la décroissance de  $\sigma_w$  ralentit pour  $z > -0.5$  cm. Même si ce ralentissement semble peu significatif, on le retrouve pour l'ensemble des forçages suffisamment puissants. Il est probablement dû aux déformations de la surface libre provoquée par la turbulence (voir chapitre 16), ce qui diminue le caractère bloquant de cette paroi. En effet cet effet n'est visible ni pour les plus faibles débits de notre expérience, ni dans les autres études, pour lesquelles les déformations de la surface libre sont faibles ( $Re_T = 487$  pour [137] et  $Re_T = 3250$  pour [104]<sup>2</sup>). En revanche, il est observé dans les simulations numériques de Guo et Shen [99] qui étudient la déformation de la surface libre par la turbulence. L'épaisseur de la couche liquide présentant cet effet augmente par ailleurs avec l'intensité de la turbulence dans notre expérience (non montré).

Comme on l'observe sur la Fig. 14.6,  $\sigma_u$  croît à l'approche de la surface libre, ce qui résulte du transfert d'énergie depuis les fluctuations verticales décrit précédemment. Toutefois, cette grandeur connaît une décroissance pour  $z > -1$  cm. Dans le cas d'une paroi solide, la décroissance de  $\sigma_u$  dans la couche visqueuse atteint zéro en raison de la condition de non glissement imposée à la surface. Mais pour une surface libre, on s'attend à avoir  $du/dz|_{z=0} = 0$  à la surface en raison de l'absence de forces tangentielles et donc une faible variation de  $\sigma_u$  [103]. Toutefois, une surface contaminée par des surfactants peut avoir un comportement se rapprochant de celui d'une paroi solide [103] puisque les surfactants induisent des contraintes tangentielles. Ce comportement a été observé numériquement [138] et expérimentalement [104]. Il peut être rapproché des observations faites par Benusiglio pour des impacts d'anneaux tourbillonnaires à l'interface eau-air [139]. En effet, dans cette étude, le comportement à la surface est proche de celui d'une paroi solide dans le cas de l'eau, alors que ce n'est plus le cas si l'eau est remplacée par de l'éthanol, moins sensible aux surfactants. Une telle pollution de la surface libre est très difficile à éviter dans les expériences utilisant de l'eau [140–144].

## Profil horizontal

L'approche de la surface libre correspond par ailleurs à une augmentation de l'inhomogénéité horizontale de  $\sigma_u$ . Alors que celle-ci est modérée pour une profondeur  $z < -6$  cm (voir par exemple Fig. 14.7), les fluctuations de vitesses horizontales deviennent beaucoup plus fortes au centre de la cuve que sur les bords juste en-dessous de la surface libre (voir Fig. 14.8). En revanche, on observe sur les Figs 14.4, 14.7 et 14.8 que  $\sigma_w$  reste homogène horizontalement pour toutes les profondeurs étudiées.

L'inhomogénéité horizontale de  $\sigma_u$  est liée aux parois latérales qui imposent à leur tour une condition cinématique provoquant le même effet pour  $\sigma_u$  que la surface libre pour  $\sigma_w$  dans le paragraphe précédent.  $\sigma_u$  décroît donc à l'approche des parois latérales. Lorsque  $z \rightarrow 0$ , la conversion de l'énergie cinétique horizontale en énergie cinétique verticale liée à la paroi latérale est limitée par la présence de la surface libre. Ceci provoque la décroissance de  $\sigma_u$  et la forte inhomogénéité horizontale observée autour de  $z = -1$  cm sur la Fig. 14.8.

---

2. La faible amplitude des déformations de la surface libre pour [104] m'a été confirmée par E.A. Variano lors d'une conversation privée.

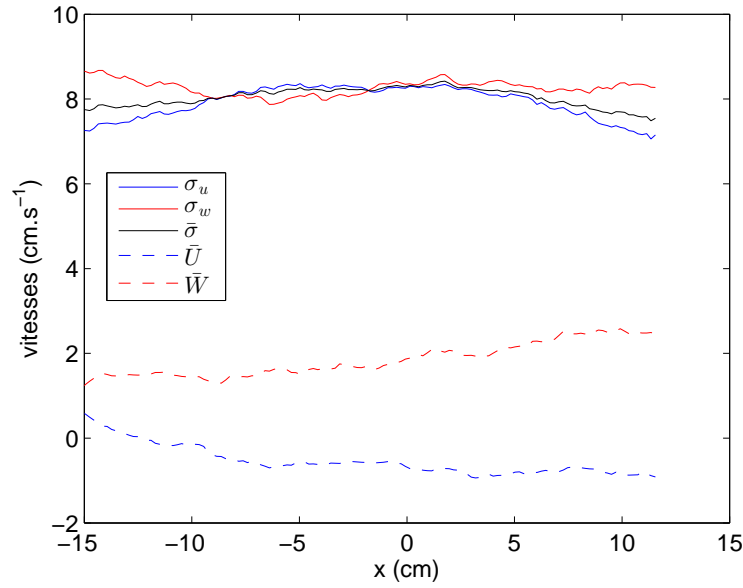


FIGURE 14.7 – Profil spatial horizontal des vitesses en profondeur (moyenne verticale sur  $-7.5 < z < -6.5$  cm).  $y = 0$

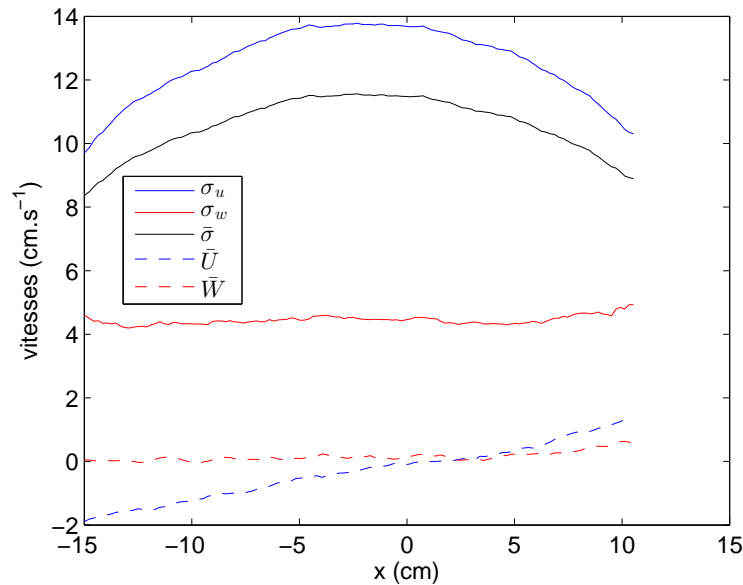


FIGURE 14.8 – Profil spatial horizontal des vitesses proche de la surface (moyenne verticale sur  $-2 < z < 0$  cm).  $y = 0$

### Vitesses moyennes

Sur les Figs 14.7 et 14.8, on note que les vitesses moyennes  $\bar{U}$  et  $\bar{W}$  restent faibles devant  $\sigma_u$  et  $\sigma_w$ , validant le régime de turbulence hydrodynamique sans écoulement moyen recherché. La Fig. 14.9 montre la direction des vecteurs correspondants sur l'ensemble de l'espace.

Ce motif est représentatif de ceux observés pour une grande partie des débits utilisés. Le centre de la cuve est le siège d'un mouvement d'ensemble vertical dirigé vers le haut qui se transforme en mouvement horizontal dirigé vers l'extérieur. Ceci correspond probablement à une légère recircula-

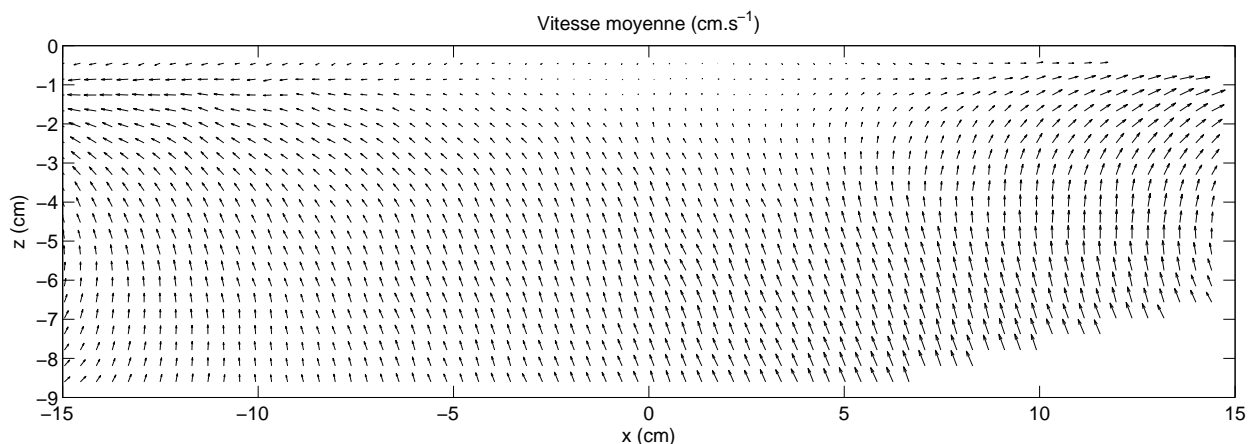


FIGURE 14.9 – Vitesses moyennes  $\overline{U}\mathbf{e}_x + \overline{W}\mathbf{e}_z$  sous formes de vecteurs dans le plan vertical. Les ordres de grandeur des valeurs des vitesses moyennes peuvent être lus sur les Figs 14.7 et 14.8.

tion provoquée par l'inhomogénéité dans les débits des jets et la présence de jets de plus forts débits au centre de la cuve (voir section 13.4.1). Il est à noter que si les écoulements moyens mesurés ici sont faibles, ceux relevés dans les chapitres suivants sont parfois plus élevés. Ceci est lié à des électrovannes dont le débit a pu changer dans le temps ou qui restent parfois ouvertes malgré l'absence d'alimentation (voir section 13.4.1).

### 14.1.2 Spectres d'énergie

La Fig. 14.10 montre les spectres d'énergie spatiaux des fluctuations turbulentes de vitesse à une profondeur  $z = -6.4$  cm selon le nombre d'onde horizontal  $k_x$  pour les deux composantes de vitesse  $u$  et  $w$ , respectivement  $S_u(k_x)$  (longitudinal) et  $S_w(k_x)$  (transverse).

La position relative des deux spectres est conforme à celle prédite théoriquement [145] : dans les échelles inertielles,  $S_{u,x} < S_{w,x}$  alors que qu'on tend vers une relation inverse,  $S_{u,x} > S_{w,x}$ , pour les plus bas nombres d'onde. On a de plus tracé en pointillés un modèle<sup>3</sup> proportionnel à  $k_x^{-5/3}$ , conformément à la loi de puissance prédite théoriquement par Kolmogorov [145]. Les spectres expérimentaux présentent une loi de puissance proche, même s'ils sont un peu plus pentus ( $\propto k_x^{-1.85}$ ), comme pour l'étude de Variano [104].

Sur la Fig. 14.11, on trace les mêmes spectres mais à une profondeur  $z = -1$  cm. Le même modèle que sur la Fig. 14.10 est également représenté afin de voir l'effet de la surface libre sur la forme du spectre spatial. En effet, la comparaison des Figs 14.10 et 14.11 montre qu'à l'approche de la surface libre, la densité d'énergie contenue dans les échelles inertielles varie faiblement tandis que celle à grande échelle (bas  $k_x$ ) varie fortement.

3. Il s'agit du modèle utilisé dans la section 14.2.3 pour déterminer le taux de dissipation  $\epsilon$ . La valeur  $\epsilon_S$  utilisée pour tracer les droites des Figs 14.10 et 14.11 est la même et est celle déterminée expérimentalement dans cette section.

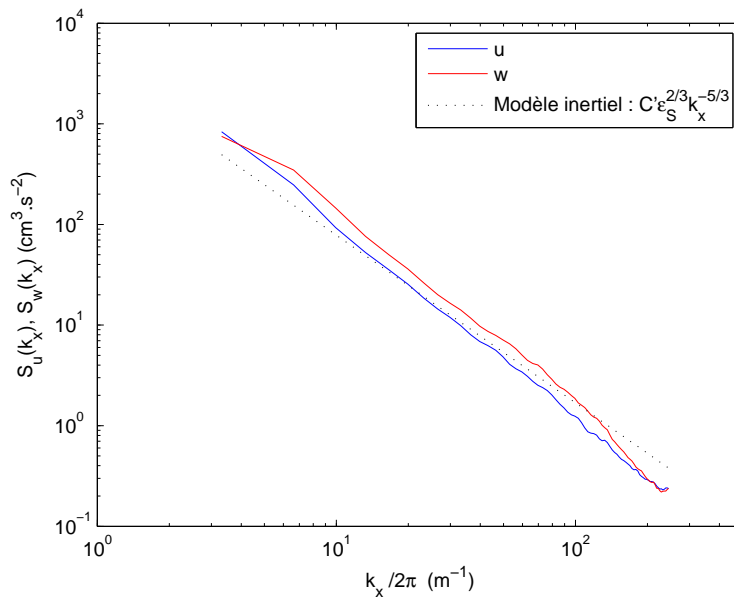


FIGURE 14.10 – Spectres d'énergie spatiaux des fluctuations turbulentes de vitesse selon  $x$ .  $y = 0$  et  $z = -6.4$  cm. Moyennés temporellement.

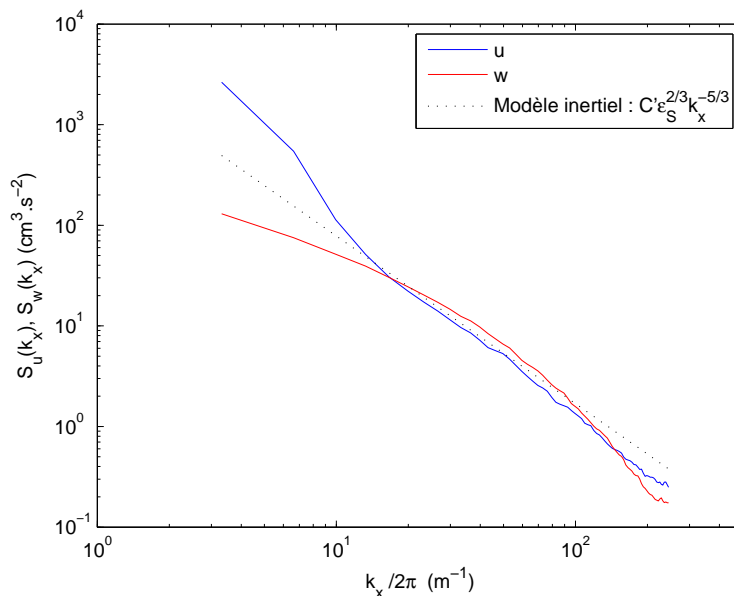


FIGURE 14.11 – Spectres d'énergie spatiaux des fluctuations turbulentes de vitesse selon  $x$ .  $y = 0$  et  $z = -1$  cm. Moyennés temporellement. La droite tracée en pointillés est la même que sur la Fig. 14.10.

Cette isotropie aux échelles inertielles a été prédite théoriquement par Hunt et Graham [88] puisque seuls sont affectés les tourbillons plus grands que la profondeur. Mais une anisotropie a été observée expérimentalement dans un dispositif à grille oscillante par Brumley et Jirka [103]. Celle-ci était liée à une diminution de la densité d'énergie spectrale transverse de la vitesse verticale à toutes les échelles. Pour les plus petits nombres d'onde, on retrouve qualitativement les résultats prédits théoriquement : la densité d'énergie spectrale transverse de la vitesse verticale diminue tandis que celle, longitudinale, de la vitesse horizontale augmente. C'est donc dans les grandes échelles que l'on retrouve l'anisotropie observée à l'approche de la surface libre sur la Fig. 14.6 : les grands tourbillons subissent les premiers la contrainte imposée par la surface libre du fait de leurs dimensions.



Enfin, la Fig. 14.12 représente les spectres d'énergie temporels de  $u$  et  $w$  à une profondeur  $z = -4$  cm obtenus à partir de mesures LDV. On observe une loi de puissance en  $f^{-5/3}$  dans le régime inertiel pour les deux vitesses. Cette loi de puissance est prédite par le modèle de Tennekes [146] et provient directement de celle, identique, prédite dans le domaine spatial par Kolmogorov ( $k_x^{-5/3}$ ). En effet, elle s'explique par l'advection des petits tourbillons (échelle inertielle) par les grands tourbillons. Les fluctuations temporelles aux plus hautes fréquences sont alors similaires aux fluctuations de vitesses spatiales. Tennekes prédit ainsi que la densité spectrale d'énergie est de la forme [146] :  $S_u(f) = S_w(f) = B_0(\sqrt{3}\Sigma_v\epsilon)^{2/3}\omega^{-5/3}$ , avec la constante  $B_0$  de l'ordre de 1 ( $\omega = 2\pi f$ ). Toutefois, il n'y a pas de consensus sur les valeurs de  $B_0$  obtenues expérimentalement, très variables d'une étude à l'autre [104].

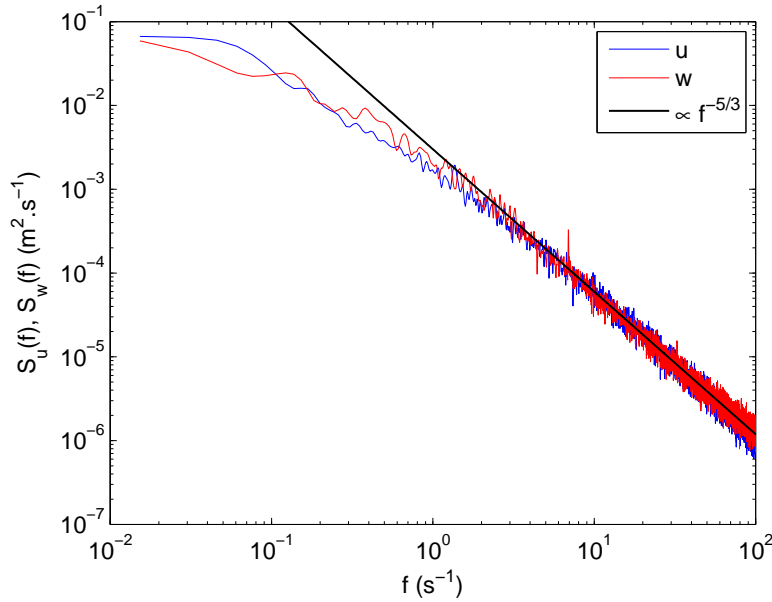


FIGURE 14.12 – Spectres d'énergie temporels en  $x = y = 0$  et  $z = -4$  cm. Les deux mesures ont été réalisées de façon distinctes pour  $u$  et  $w$  par LDV. Durée : 610 s.  $h = 50$  cm. 8 électrovannes ouvertes.  $\langle Q_j \rangle = 0.37 \text{ L.s}^{-1}$ .  $\Sigma_v = 11.6 \text{ cm.s}^{-1}$ .

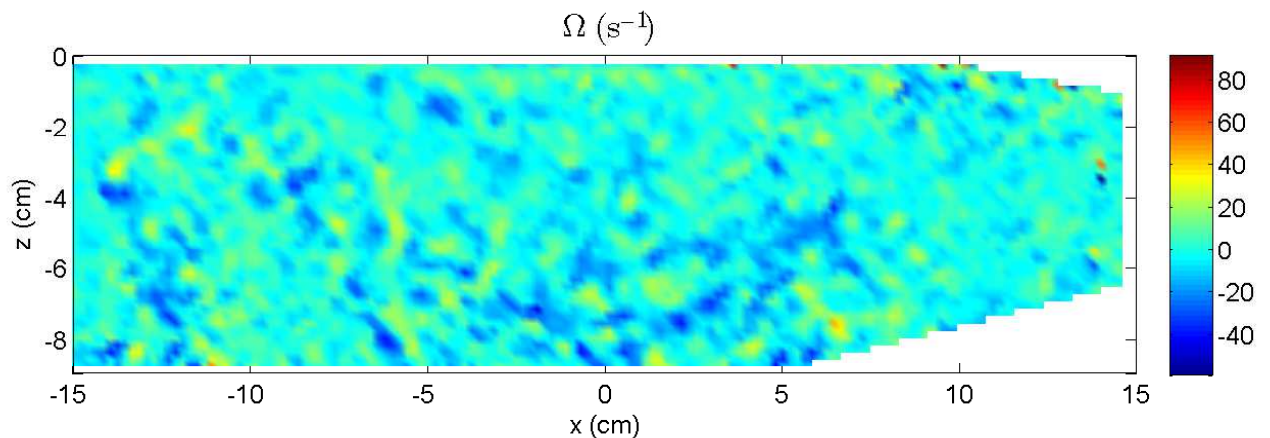
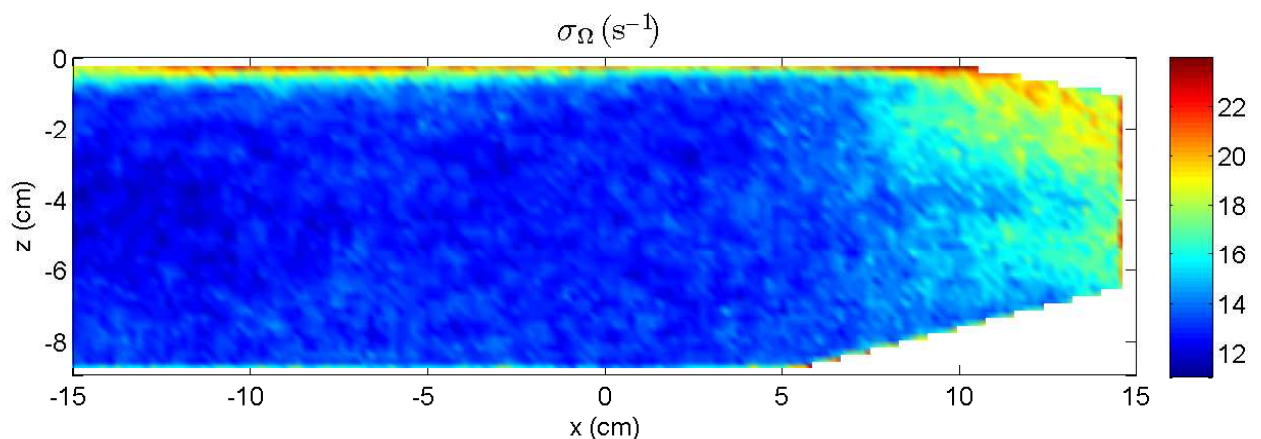
### 14.1.3 Vorticité

Le calcul du champ de vitesses sous la surface libre permet d'accéder au champ de vorticité  $\Omega \equiv \nabla \times \mathbf{q}$ , où  $\mathbf{q}$  est le vecteur vitesse et  $\nabla \times$  est l'opérateur rotationnel. La Fig. 14.13, représentant la vorticité instantanée, montre qu'elle est inhomogène, du fait de la présence de petits tourbillons, et qu'elle n'est pas dominée par des structures à grandes échelles.

L'écart-type de la vorticité,  $\sigma_\Omega$ , présenté sur la Fig. 14.14, est quand à lui homogène, à l'exception d'une couche limite proche de la surface libre ( $z > -1$  cm), où la vorticité augmente. Ceci est probablement lié à la décroissance rapide de  $\sigma_u$  sur cette même zone vue précédemment (voir Fig. 14.6) en raison de la contamination de la surface libre.

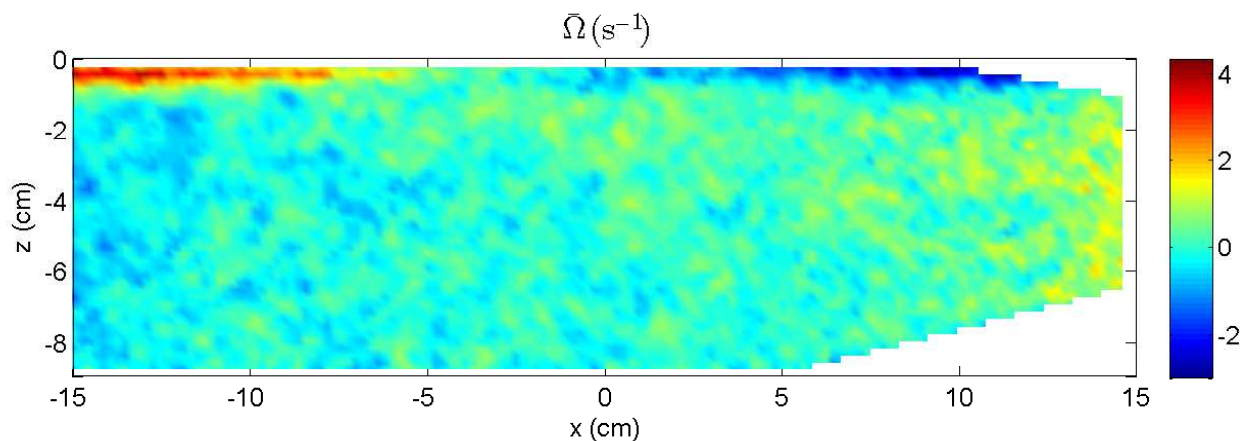
Sur la Fig. 14.15, les valeurs moyennes de la vorticité  $\bar{\Omega}$  ont des signes qui correspondent en effet à ce qu'on attend du champ de vitesse moyen (voir Fig. 14.9). La gauche de la Fig. 14.15 affiche ainsi des valeurs positives pour  $\bar{\Omega}$ , qui correspondent à un sens de rotation horaire, observé dans la couche définie par  $z > -1$  cm sur la Fig. 14.9. La partie droite affiche au contraire des valeurs négatives.

Les valeurs de  $\sigma_\Omega$ , plus importantes sur la droite de la Fig. 14.14, sont probablement des artefacts

FIGURE 14.13 – Exemple de vorticité instantanée  $\Omega$ .FIGURE 14.14 – Ecart-type des fluctuations de vorticité  $\sigma_{\Omega}$ .

de mesures et n'ont donc pas de signification physique. En effet, la largeur de la nappe laser  $y$  est plus épaisse, elle éclaire des particules en-dehors du plan de focalisation de la caméra qui sont alors de taille importante sur les images. Les faux vecteurs sont alors plus nombreux, ce qui nécessite de plus nombreuses corrections pouvant induire des gradients de vitesses artificiellement plus élevés.

On note par ailleurs sur les Figs 14.14 et 14.15 que la vorticité moyenne est faible devant ses fluctuations, soulignant l'absence de structures permanentes à grande échelle. Enfin, il faut noter que ces analyses ont été réalisées dans le plan vertical et ne préjugent donc pas des caractéristiques de la vorticité alignée avec  $Oz$ .

FIGURE 14.15 – Vorticité moyenne  $\bar{\Omega}$ .

## 14.2 Grandeurs turbulentes caractéristiques

Nous évaluons ici les grandeurs caractéristiques de la turbulence générée par notre dispositif. Celles-ci sont définies à distance de la surface libre, c'est-à-dire à des profondeurs  $z < -6$  cm. Le tableau 14.1 résume les grandeurs mesurées dans cette section. Les définitions et les méthodes de calcul de ces grandeurs sont données dans la suite du texte.

Grandeur	Valeurs
Fluctuations de vitesse horizontale $\sigma_u$	$[1.2; 11.2] \text{ cm}^2.\text{s}^{-1}$
Fluctuations de vitesse verticale $\sigma_w$	$[1.2; 10.4] \text{ cm}^2.\text{s}^{-1}$
Longueur intégrale longitudinale $L_L$	$\approx 5 \text{ cm}$
Longueur intégrale transverse $L_T$	$\approx 3 \text{ cm}$
Longueur de Kolmogorov $\eta_K$	$[0.1; 0.5] \text{ mm}$
Nombre de Reynolds turbulent $Re_T$	$[600; 5500]$
Nombre de Reynolds de Taylor $Re_\lambda$	$[120; 460]$
Taux de dissipation $\epsilon$	$[0.2; 102] \text{ cm}^2.\text{s}^{-3}$

TABLE 14.1 – Résumé des grandeurs caractéristiques de la turbulence engendrée par les jets.

### 14.2.1 Ecart-types

L'intensité de la turbulence peut être caractérisée par l'amplitude des fluctuations de vitesse, quantifiée par  $\sigma_u$  et  $\sigma_w$ . La région homogène et isotrope définie par  $-5 < x < +5$  cm et  $-9 < z < -7$  cm (voir section 14.1.1), permet de calculer leur valeur loin de la surface libre. Les valeurs moyennes de  $\sigma_u$  et  $\sigma_w$  sur cette région sont ainsi tracées en fonction du débit moyen par jet  $\langle Q_j \rangle$  sur la Fig. 14.16.

On observe une bonne isotropie pour l'ensemble des débits puisque  $\sigma_u \approx \sigma_w$ . Ces valeurs présentent par ailleurs une évolution linéaire avec  $\langle Q_j \rangle$ , d'équation  $\sigma_u \approx \sigma_v = a \langle Q_j \rangle$  avec  $a = 210 \text{ m}^{-2}$ . Les

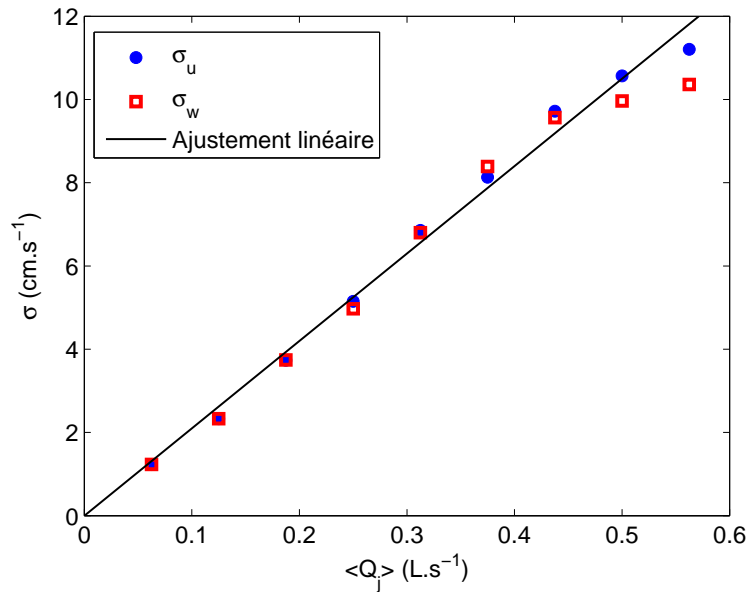


FIGURE 14.16 – Moyenne de  $\sigma_u$  et  $\sigma_w$  sur la région homogène et isotrope définie par  $-5 < x < +5$  cm et  $-9 < z < -7$  cm en fonction du débit moyen par jet  $\langle Q_j \rangle$ . La ligne noire correspond à un ajustement linéaire d'équation  $\sigma = a\langle Q_j \rangle$  avec  $a = 210 \text{ m}^{-2}$ .

plus grands débits présentent une exception puisqu'on observe une décroissance de  $\sigma_u$  et surtout  $\sigma_w$  pour les deux valeurs maximales. L'intensité de la turbulence sera caractérisée dans toute la partie par la grandeur moyenne  $\Sigma_v = \sqrt{(2\sigma_u^2 + \sigma_w^2)/3}$  calculée à partir de l'équation linéaire.

### 14.2.2 Echelles intégrales

La longueur intégrale caractérise la taille des plus gros tourbillons de la turbulence et peut être calculée par l'intégrale de la fonction d'autocorrélation des vitesses dans l'espace [145]. Une longueur intégrale pertinente dans notre problème est ici celle faisant intervenir la vitesse horizontale  $u$  étudiée le long de l'axe longitudinal  $Ox$ . On se place en profondeur en  $y = 0$  et  $z = -7$  cm. La fonction d'autocorrélation correspondante, définie par [145], moyennée dans le temps est alors :

$$R_{uu}(r_x) = \left[ \frac{\langle u(x, t)u(x + r_x, t) \rangle_x}{\langle u(x, t)^2 \rangle_x} \right] \quad (14.2)$$

où  $r_x$  est aligné avec  $Ox$ . La longueur intégrale longitudinale est alors  $L_L = \int_0^\infty R_{uu}(r_x) dr_x$ . La fonction d'autocorrélation transverse pour la vitesse verticale  $R_{ww}(r_x)$  est définie de la même manière en remplaçant  $u$  par  $w$  dans l'expression de l'Eq. (14.2). L'intégrale associée est la longueur intégrale transverse :  $L_T = \int_0^\infty R_{ww}(r_x) dr_x$ . Les fonctions d'autocorrélation  $R_{uu}(r_x)$  et  $R_{ww}(r_x)$  sont représentées sur la Fig. 14.17.

Les échelles intégrales ainsi obtenues prennent des valeurs autour de  $L_L \approx 5$  cm et  $L_T \approx 3$  cm, sans qu'on puisse voir une évolution avec le débit des jets.  $L \equiv L_L$  caractérise la taille typique des plus grands tourbillons dans le reste de la partie. Le rapport  $L_L/L_T \approx 1.7$  est proche de la valeur 2 prédite théoriquement dans le cas d'une turbulence homogène et isotrope à toutes les échelles [145].

Les valeurs mesurées sont à prendre avec précaution car elles doivent normalement être calculées sur des régions grandes devant les longueurs intégrales afin d'observer des plateaux de valeur nulle

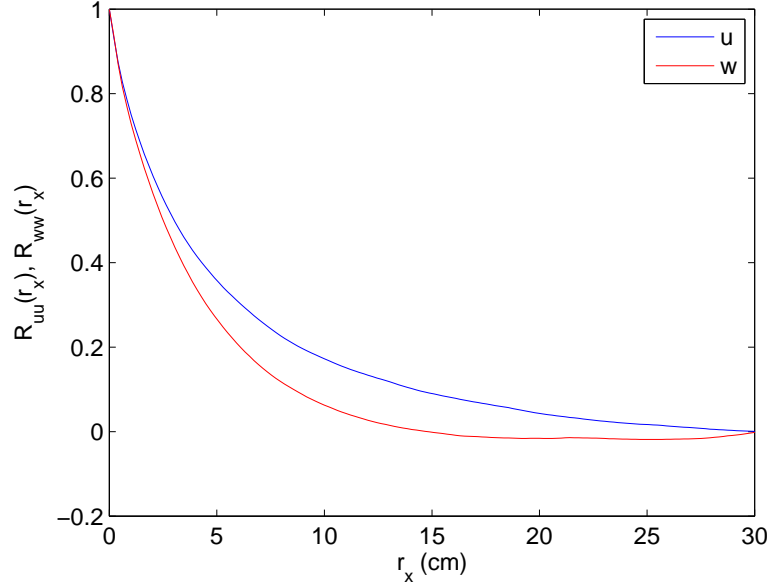


FIGURE 14.17 – Fonctions d'autocorrélation selon  $x$  des vitesses  $u$  et  $w$ , respectivement  $R_{uu}$  et  $R_{ww}$ , en fonction de l'incrément spatial  $r_x$ .  $y = 0$  et  $z = -7$  cm.

pour de grands  $r_x$  sur la Fig. 14.17, ce qui n'est pas le cas ici<sup>4</sup>. Toutefois, elles sont cohérentes avec ce qui est observé dans la section 14.1.1 puisque  $L$  correspond bien à la profondeur typique sur laquelle les effets de la surface libre sur la turbulence sont visibles. Cette taille, qui est également la distance entre deux jets au fond de la cuve, correspond par ailleurs à l'échelle d'injection.

Enfin, on remarque qu'à l'approche de la surface libre,  $L_L$  augmente ( $L_L \approx 7$  cm pour  $z = -1$  cm), ce qui est prédit théoriquement [88] et  $L_T$  diminue ( $L_T \approx 2$  cm pour  $z = -1$  cm). Ceci est en accord avec les résultats des spectres d'énergie spatiaux sur lesquels on a observé qu'à l'approche de la surface libre, les grandes échelles des vitesses horizontales gagnent en énergie tandis que celles des vitesses verticales perdent en énergie (voir section 14.1.2).

### 14.2.3 Taux de dissipation

Le taux de dissipation  $\epsilon$  est associé à l'énergie qui est injectée dans le spectre aux grandes échelles, qui traverse les échelles inertielles et qui est finalement dissipée aux petites échelles. Il est défini par  $\epsilon \equiv 2\nu \langle S_{ij} S_{ij} \rangle$ , où  $S_{ij} \equiv (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$  est le gradient de vitesse et  $\nu = 1.10^{-6} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  est la viscosité cinématique de l'eau. La résolution des mesures PIV n'est pas suffisante pour calculer  $\epsilon$  à partir de cette définition. Mais comme discuté ci-dessous, il peut être évalué de différentes manières, dont les résultats pour tous les débits sont rassemblés sur la Fig. 14.18.

Le taux de dissipation peut être estimé à partir des fluctuations de vitesse par l'ordre de grandeur  $\epsilon_{\Sigma_v} = A \Sigma_v^3 / L_L$ , en choisissant  $A = 0.5$  comme suggéré par [104, 147]. Les valeurs ainsi obtenues sont représentées par une ligne noire sur la Fig. 14.18, constituant la borne supérieure des différentes estimations.

Les mesures PIV permettent par ailleurs de calculer la fonction de structure d'ordre 2 selon  $x$  et

4. La longueur intégrale est plus difficile à estimer dans notre dispositif que dans un dispositif à écoulement moyen. Dans ce dernier cas, il est possible d'utiliser l'hypothèse de turbulence gelée de Taylor [145], qui permet de traduire dans l'espace des mesures réalisées temporellement. Il est alors possible d'allonger les échelles spatiales observées en augmentant simplement le temps de mesure.

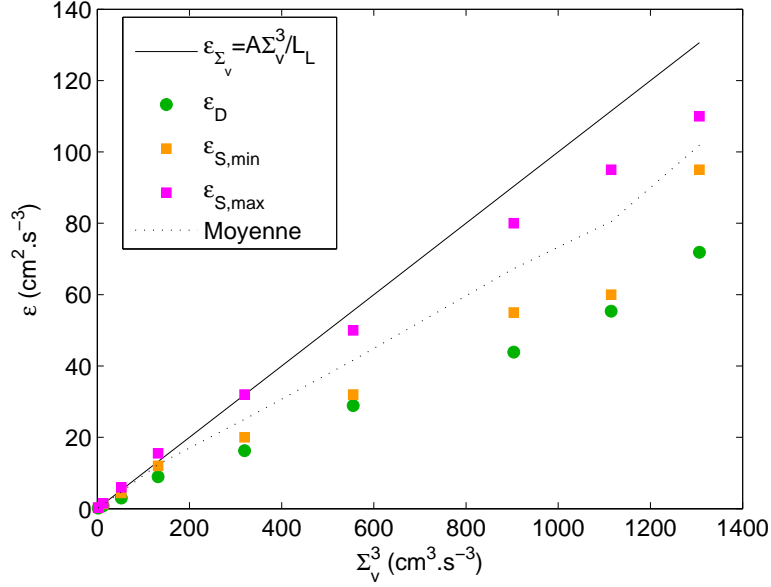


FIGURE 14.18 – Taux de dissipation  $\epsilon$  en fonction des fluctuations turbulentes de vitesse typiques  $\Sigma_v$  pour les différentes estimations :  $\epsilon_{\Sigma_v}$  correspond à un ordre de grandeur,  $\epsilon_D$  est établi à partir des fonctions de structure, et  $\epsilon_{min}$  et  $\epsilon_{max}$  à partir des spectres spatiaux (voir texte).

moyennée temporellement, définie par [145] :

$$D_{LL}(r_x, t) \equiv \overline{\langle [u(x, t) - u(x + r_x, t)]^2 \rangle_x} \quad (14.3)$$

où  $r_x$  est l'incrément spatial selon l'axe  $Ox$ . Dans les échelles inertielles, il est prédit que  $D_{LL} = C_2(\epsilon r_x)^{2/3}$ , avec  $C_2 = 2$  [145]. Nous avons calculé les taux de dissipation associés à différentes valeurs de  $r_x$ . Ceux-ci sont tracés pour différents débits sur la Fig. 14.19 et présentent une bonne homogénéité sur l'ensemble des échelles inertielles. La valeur retenue  $\epsilon_D$  est issue de la moyenne sur l'intervalle  $2 < r_x < 6$  cm et tracée sur la Fig. 14.18, constituant la borne inférieure des différentes estimations.

Le taux de dissipation est par ailleurs directement relié aux spectres d'énergie spatiaux. Ainsi, dans les échelles inertielles, il a été montré que  $S_u(k_x) = C' \epsilon^{2/3} k_x^{-5/3}$ , où  $C' = 0.49$  [145]. Le taux  $\epsilon$  peut donc être déterminé en ajustant ce modèle au spectre spatial. Nous traçons sur la Fig. 14.20 le spectre d'énergie spatial horizontal longitudinal ainsi que les ajustements issus du modèle pour deux valeurs  $\epsilon_{S,min}$  et  $\epsilon_{S,max}$ .

Ces valeurs encadrent l'intervalle des valeurs possible pour le taux de dissipation estimé de cette manière  $\epsilon_S$ . Elles apparaissent sur la Fig. 14.18 avec des ordres de grandeur similaires aux valeurs obtenues avec les méthodes précédentes.

Nous choisissons de retenir comme taux de dissipation la moyenne des valeurs calculées avec les différentes méthodes. Nous obtenons ainsi  $\epsilon \in [0.2; 102] \text{ cm}^2.\text{s}^{-3}$ .

La connaissance du taux de dissipation  $\epsilon$  permet d'accéder aux échelles de longueur et de temps de Kolmogorov, respectivement  $\eta_K = (\nu^3/\epsilon)^{1/4} \in [0.1; 0.5] \text{ mm}$  et  $\tau_\eta = (\nu/\epsilon)^{1/2} \in [10; 200] \text{ ms}$ . Celles-ci sont les échelles de dissipation des tourbillons. Il faut noter que les valeurs les plus petites de ces deux paramètres correspondent aux niveaux de turbulence les plus élevés.

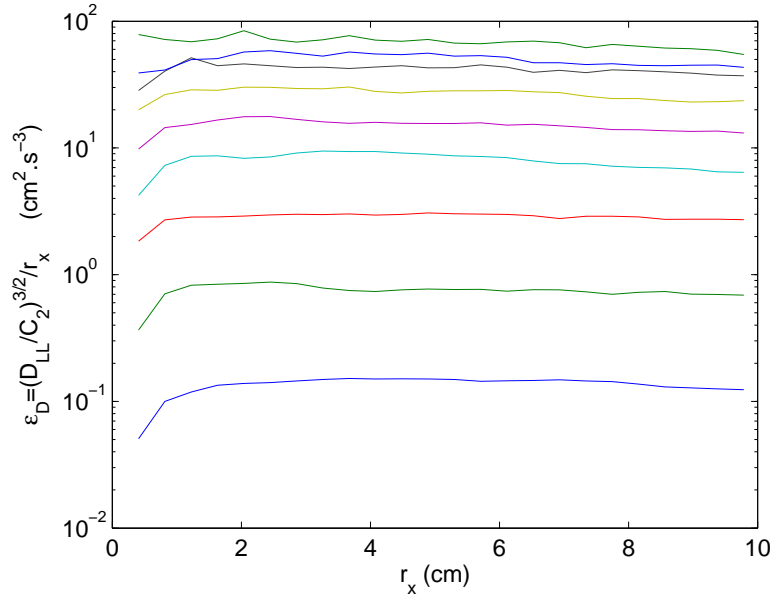


FIGURE 14.19 – Fonction de structure  $D_{LL}$  d'ordre 2 pour la vitesse horizontale en fonction de l'incrément spatial  $r_x$ .  $D_{LL}$  est compensée pour calculer la valeur du taux de dissipation  $\epsilon_D$  (croissant avec le forçage  $0.062 \leq \langle Q_j \rangle \leq 0.56 \text{ L.s}^{-1}$ ).  $y = 0$ ,  $z = -6.4 \text{ cm}$ .

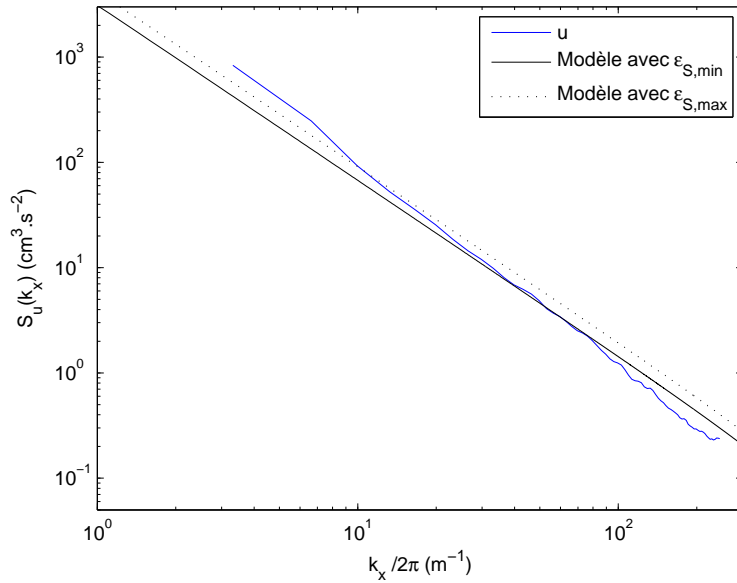


FIGURE 14.20 – Spectre spatial horizontal en  $y = 0$  et  $z = -6.4 \text{ cm}$ .

#### 14.2.4 Nombres de Reynolds

Les grandeurs mesurées dans cette section permettent finalement d'avoir accès aux nombres de Reynolds, utilisés pour comparer les expériences entre elles. Le nombre de Reynolds à l'échelle de Taylor  $Re_\lambda = \Sigma_v^2 \sqrt{15/(\nu\epsilon)}$  prend des valeurs entre 120 et 460. Nous obtenons par ailleurs un nombre de Reynolds turbulent défini par  $Re_T = \Sigma_v L / \nu$  entre 600 et 5500. Ces valeurs sont ainsi supérieures à celle obtenue par Variano et Cowen [104] avec le même type de dispositif ( $Re_T = 3220$ ), qui lui-même parvenait à une turbulence 7 fois plus forte que celles atteintes au maximum avec des grilles oscillantes [137].



### 14.3 Conclusion

Par des mesures PIV dans un plan vertical sous la surface libre, nous avons montré dans ce chapitre que notre dispositif expérimental permet d'atteindre des régimes de forte turbulence hydrodynamique ( $Re_T = 5500$ ), pour lesquels l'amplitude des fluctuations turbulentes de vitesse croît linéairement avec le débit des jets (jusqu'à un écart-type  $\Sigma_v \approx 11 \text{ cm.s}^{-1}$ ), tout en conservant une taille caractéristique des tourbillons constante  $L \approx 5 \text{ cm}$ . Nous avons caractérisé la turbulence générée en mesurant différentes grandeurs typiques. L'homogénéité et l'isotropie des fluctuations de vitesses sont bonnes à distance de la surface libre. Le forçage de la turbulence hydrodynamique par des jets de débits réglables constitue alors un bon moyen d'obtenir une turbulence d'intensité contrôlable tout en conservant ses propriétés spatiales.

L'homogénéité spatiale diminue à l'approche de la surface libre en raison de la présence des parois latérales de la cuve. L'isotropie entre fluctuations turbulentes de vitesses verticales et horizontales est quant à elle réduite par la présence de la surface libre, ce qui est conforme aux prédictions théoriques et aux études expérimentales précédentes. Nous avons montré une redistribution de l'énergie cinétique des fluctuations de vitesse verticales vers les fluctuations horizontales à l'approche de la surface libre et liée aux limitations des mouvements verticaux du fluide imposée par cette interface. Des comportements particuliers liés aux déformations de la surface libre et à sa contamination ont par ailleurs été mis en évidence.



# Chapitre 15

## Effet de la turbulence hydrodynamique sur des ondes de surface monochromatiques

Nous étudions dans ce chapitre le comportement d'ondes de surface monochromatiques engendrées mécaniquement à la surface d'un fluide présentant un écoulement turbulent. La turbulence hydrodynamique est générée par le dispositif expérimental décrit dans le chapitre 13 et caractérisé dans le chapitre 14. Comme nous l'avons vu au chapitre 12 d'introduction, les mesures spatiales dans une telle situation sont rares. Gutiérrez et Aumaître [111] ont réalisé des mesures 1D dans la direction de propagation des ondes à la surface d'un écoulement turbulent 2D. Nous mesurons ici les déformations de la surface libre dans les deux dimensions grâce à un dispositif de profilométrie par transformée de Fourier (voir section 13.5.2). Nous nous concentrons donc sur les caractéristiques spatiales et temporelles de ces ondes, dans les directions à la fois longitudinale et transverse à la propagation.

Il s'agit de comprendre comment les ondes sont affectées par la turbulence sous la surface mais aussi d'appréhender la lecture des spectres spatiaux, temporels et spatio-temporels dans un contexte de turbulence et donc d'écoulement sous la surface. En ce sens, les enseignements tirés de cette étude seront utiles dans le cadre des déformations de la surface libre générées par la turbulence (voir chapitre 16).

### 15.1 Dispositif expérimental

Les ondes de surface planes monochromatiques étudiées sont générées au moyen d'un batteur rectiligne de forme triangulaire, subissant un mouvement vertical sinusoïdal (voir Fig. 15.1). Il est situé à proximité d'une paroi de la cuve dont il occupe presque toute la largeur. Des mesures sont réalisées pour deux fréquences d'excitation,  $f_e = 5$  et  $8$  Hz, associées aux longueurs d'ondes  $\lambda_0 = 6.6$  et  $3.1$  cm, respectivement supérieure et inférieure à l'échelle intégrale de la turbulence  $L \approx 5$  cm. Les écart-types moyens respectifs des vagues obtenues sont  $\sigma_\eta = 0.65$  et  $0.26$  mm dans la zone de mesure, soit des raideurs  $\kappa \equiv k_0 \sigma_\eta$  de  $0.06$  et  $0.05$ , avec  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  le nombre d'onde. Les amplitudes sont ainsi suffisantes pour obtenir une bonne résolution tout en conservant des raideurs suffisamment faibles pour que les effets non-linéaires soient faibles. Le champ de déformation de la surface libre est mesuré dans les deux dimensions par profilométrie par transformée de Fourier (FTP – voir section 13.5.2) sur une surface de  $15 \times 16$  cm<sup>2</sup> et pendant une durée de 220 s à une fréquence

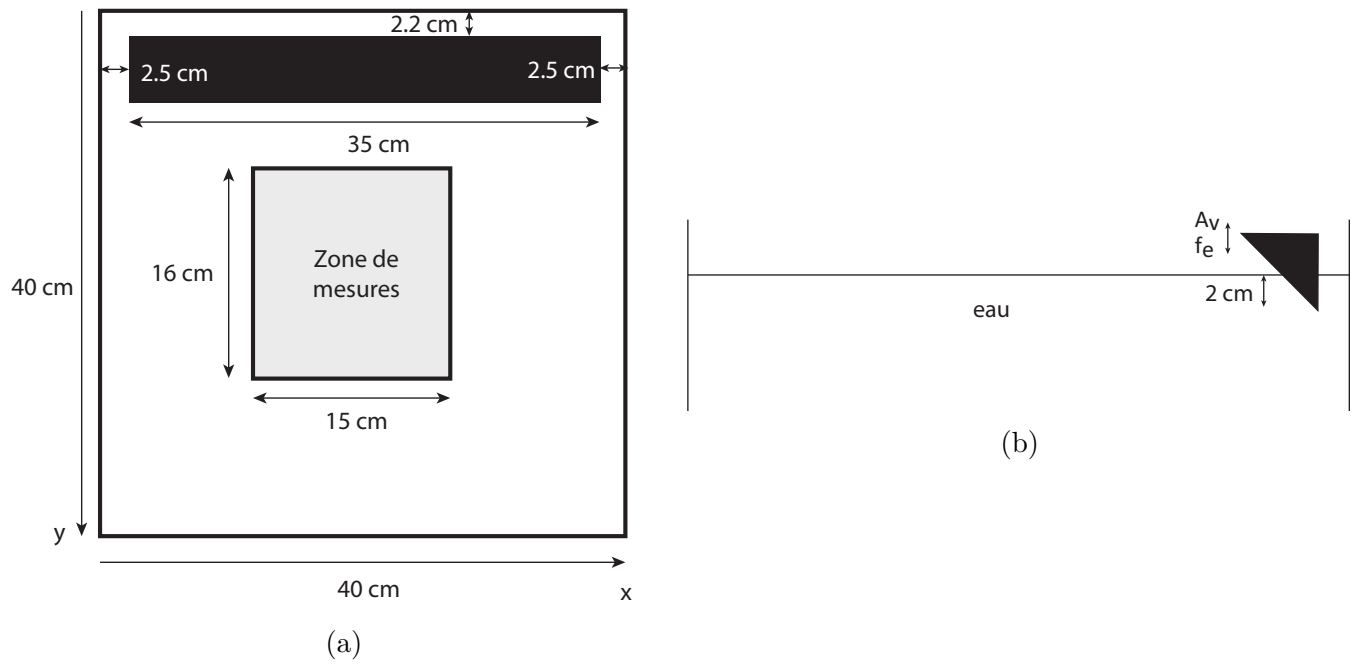


FIGURE 15.1 – Schéma du dispositif expérimental pour la génération d'ondes monochromatiques. Un batteur rectiligne allongé selon  $Ox$  et en forme de triangle est placé près d'une paroi et subit des oscillations verticales sinusoïdales. (a) Vue de dessus ; (b) Vue de côté

d'acquisition proche de 100 Hz.

L'intensité de la turbulence est d'un niveau modéré (écart-type des fluctuations de vitesse :  $\Sigma_v \in [0; 5.25] \text{ cm.s}^{-1}$ ) afin de limiter les déformations de la surface libre induites par la turbulence (voir chapitre 16). Dans la suite du chapitre, les figures constituées de quatre vignettes représentent toujours les mêmes niveaux de turbulence. Les valeurs de  $\Sigma_v$  utilisées dans ce chapitre sont calculées à partir des résultats de la section 14.2.1, moyennées sur le domaine défini par  $-9 < z < -7 \text{ cm}$  et  $-5 < x < 5 \text{ cm}$ .

## 15.2 Observations

Des images instantanées représentatives des déformations de la surface libre pour des niveaux croissants de turbulence sont représentées sur les Figs 15.2 et 15.3 pour  $f_e = 5$  et 8 Hz respectivement. Le batteur est situé au-dessus de l'image. En l'absence de turbulence (Fig. a), les ondes sont presque planes, allongées selon  $Ox$  et se propageant selon  $Oy$ . Comme la dissipation visqueuse augmente avec la fréquence des ondes, elle est visible pour  $f_e = 8 \text{ Hz}$  par la décroissance de l'amplitude au cours de la propagation (Fig. 15.3.a). Dans les deux cas, lorsque la turbulence est présente, on observe une modification de la structure spatiale de l'onde. Il apparaît une déviation de la direction de propagation, sûrement liée à l'advection par les courants turbulents à grandes échelles, ainsi qu'une déstabilisation du front d'onde caractérisée par son morcellement.

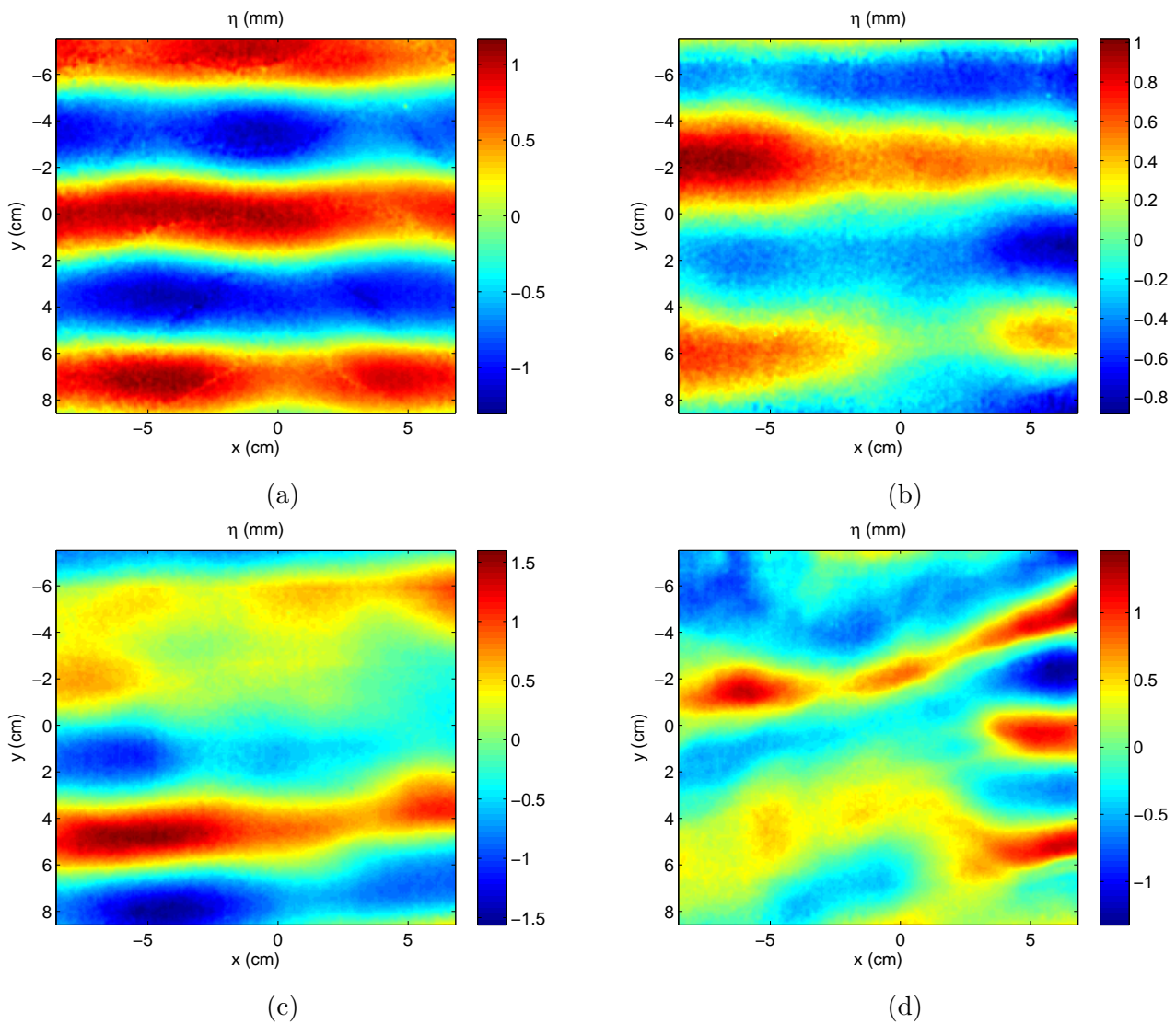


FIGURE 15.2 – Image instantanée des déformations de la surface libre  $\eta$  dans l'espace pour  $f_e = 5 \text{ Hz}$  : (a)  $\Sigma_v = 0$ ; (b)  $\Sigma_v = 1.31 \text{ cm.s}^{-1}$ ; (c)  $\Sigma_v = 2.62 \text{ cm.s}^{-1}$ ; (d)  $\Sigma_v = 5.25 \text{ cm.s}^{-1}$ . Le batteur est en haut ( $y = -17.8 \text{ cm}$ ).

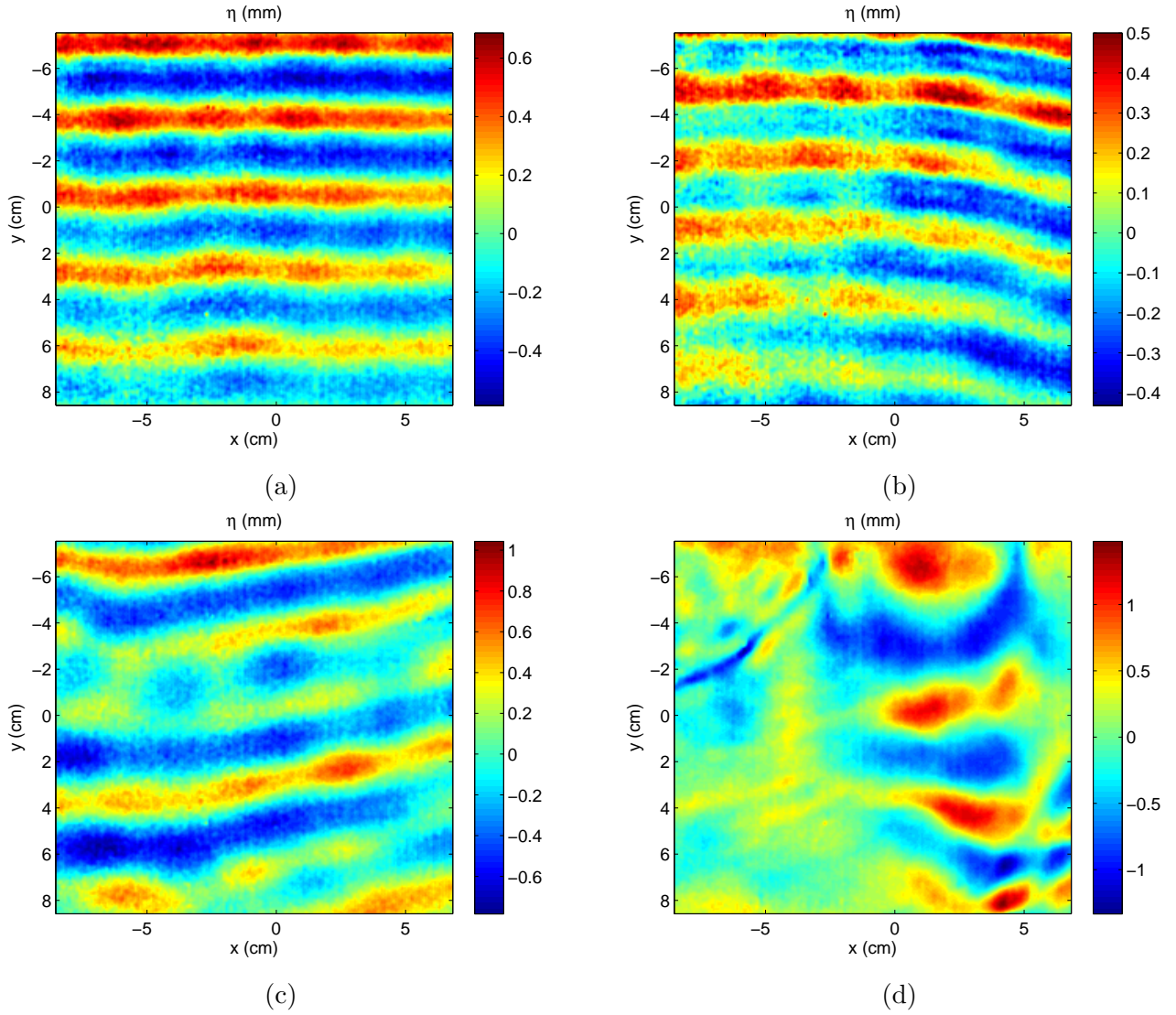


FIGURE 15.3 – Image instantanée des déformations de la surface libre  $\eta$  dans l'espace pour  $f_e = 8$  Hz : (a)  $\Sigma_v = 0$ ; (b)  $\Sigma_v = 1.31 \text{ cm.s}^{-1}$ ; (c)  $\Sigma_v = 2.62 \text{ cm.s}^{-1}$ ; (d)  $\Sigma_v = 5.25 \text{ cm.s}^{-1}$ . Le batteur est en haut ( $y = -17.8 \text{ cm}$ )

Nous traçons sur les Figs 15.4 et 15.5 l'écart-type des hauteurs de vagues  $\sigma_\eta$  en chaque point de la surface libre pour  $f_e = 5$  et 8 Hz respectivement. En l'absence de turbulence hydrodynamique (Fig. a), nous observons des minima et des maxima le long de l'axe de propagation des ondes  $Oy$ , en particulier pour  $f_e = 5$  Hz. Il s'agit respectivement de nœuds et de ventres liés à la présence d'ondes stationnaires longitudinales. Ces dernières sont causées par les réflexions de l'onde sur la paroi opposée au batteur. Elles sont moins marquées pour  $f_e = 8$  Hz (Fig. 15.5.a) en raison de la dissipation visqueuse. On note par ailleurs la présence d'ondes stationnaires transverses selon  $Ox$  (perpendiculaires à la direction de propagation) qui sont des ondes croisées (*cross-waves*) créées par instabilité paramétrique au niveau du batteur [148, 149]. Leur fréquence d'oscillation est alors  $f_e/2$ , et elles sont donc associées à une longueur d'onde plus grande.

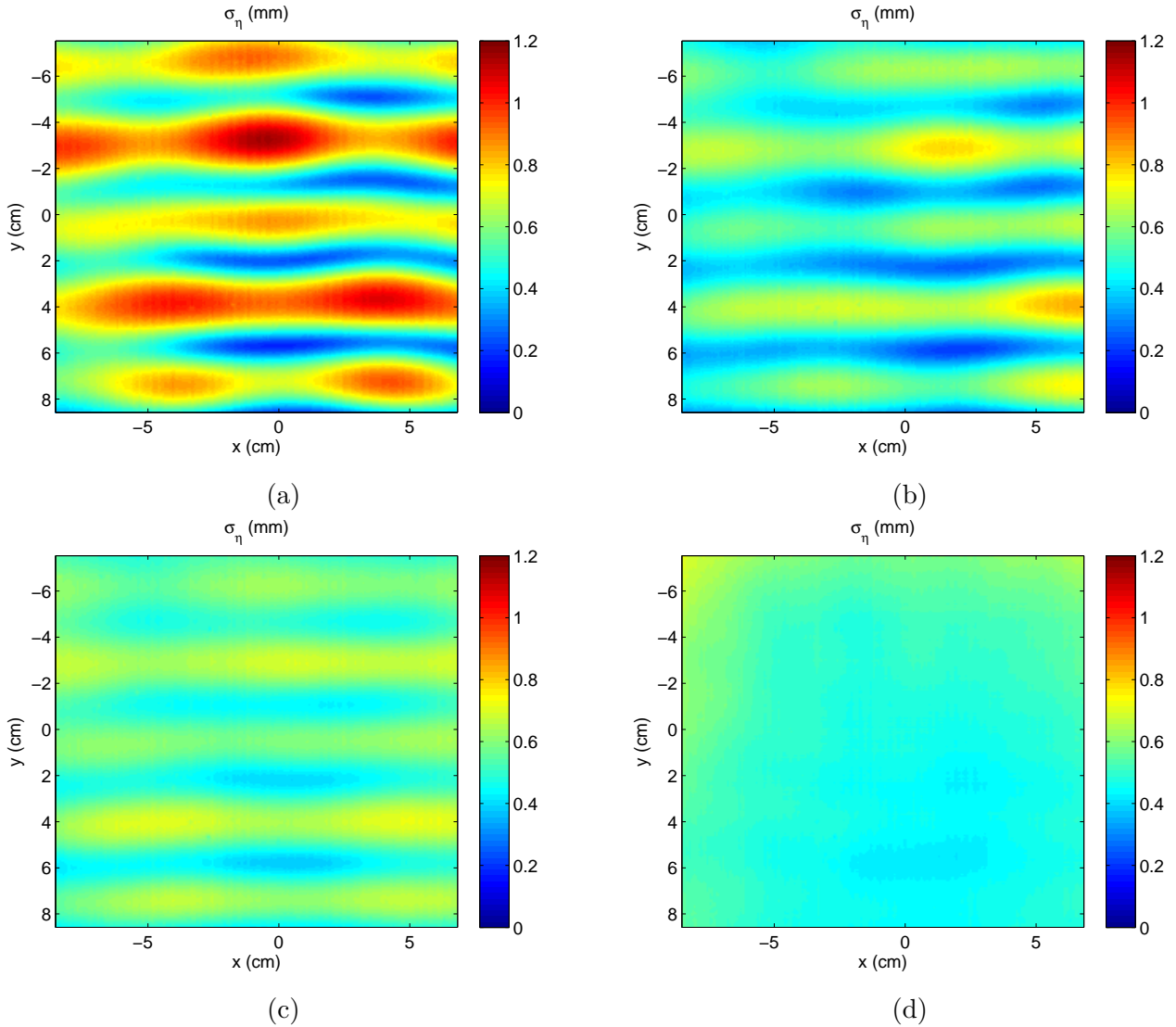


FIGURE 15.4 – Ecart-type des déformations de la surface libre  $\sigma_\eta$  dans l'espace pour  $f_e = 5$  Hz : (a)  $\Sigma_v = 0$  ; (b)  $\Sigma_v = 1.31 \text{ cm.s}^{-1}$  ; (c)  $\Sigma_v = 2.62 \text{ cm.s}^{-1}$  ; (d)  $\Sigma_v = 5.25 \text{ cm.s}^{-1}$ . Le batteur est en haut ( $y = -17.8 \text{ cm}$ ).

En présence de turbulence hydrodynamique (croissante pour les Figs b, c et d), le contraste entre minima et maxima diminue jusqu'à disparaître (Fig. d). Ceci est cohérent avec ce que nous avons observé sur les Figs 15.2 et 15.3 puisque l'advection par les courants dans toutes les directions ainsi que la déstabilisation du front d'onde réduisent les résonances nécessaires aux ondes stationnaires.

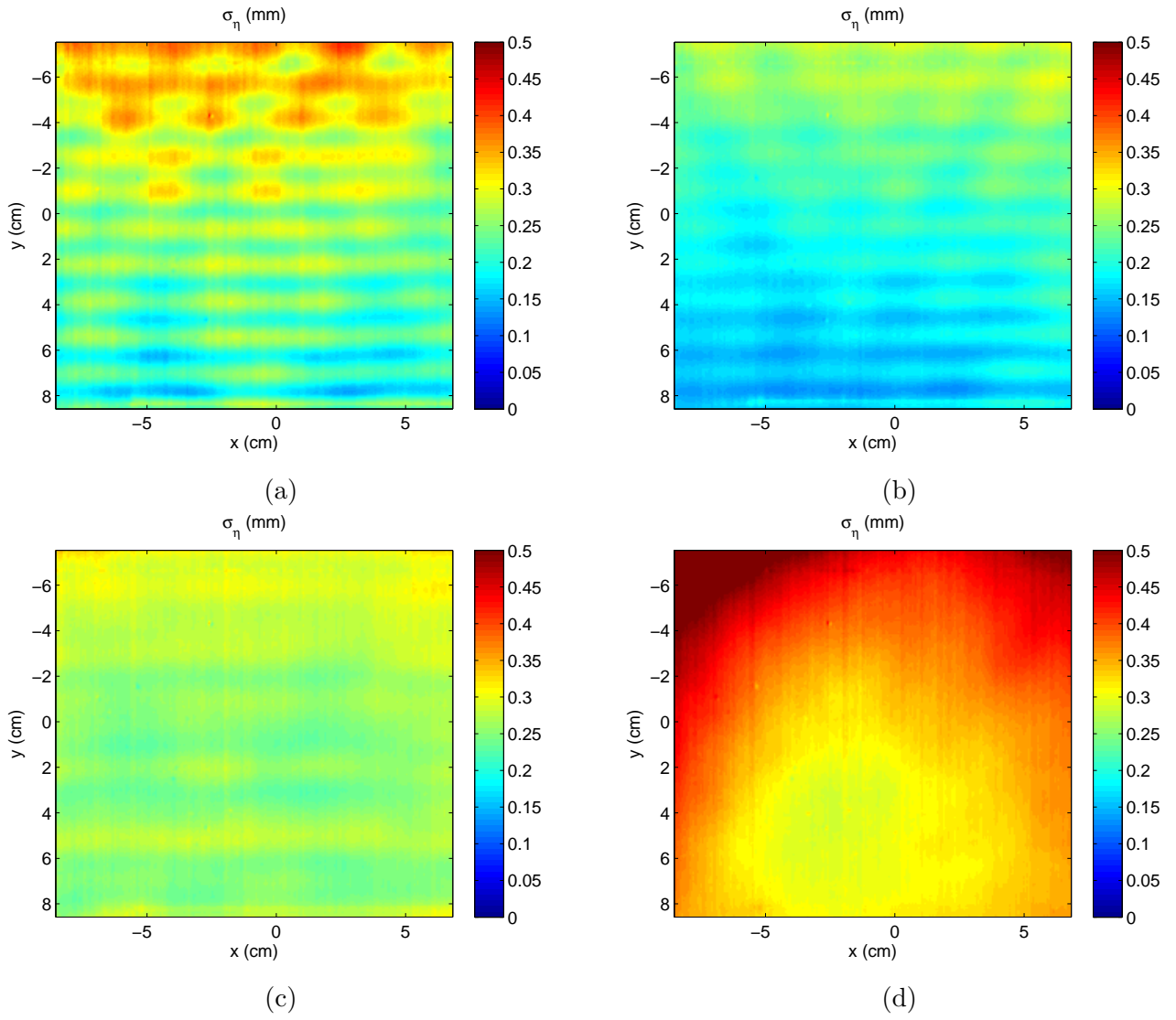


FIGURE 15.5 – Ecart-type des déformations de la surface libre  $\sigma_\eta$  dans l'espace pour  $f_e = 8 \text{ Hz}$  : (a)  $\Sigma_v = 0$  ; (b)  $\Sigma_v = 1.31 \text{ cm.s}^{-1}$  ; (c)  $\Sigma_v = 2.62 \text{ cm.s}^{-1}$  ; (d)  $\Sigma_v = 5.25 \text{ cm.s}^{-1}$ . Le batteur est en haut ( $y = -17.8 \text{ cm}$ ).

Afin d'étudier l'effet de la turbulence hydrodynamique sur l'énergie des ondes de surface, on trace sur la Fig. 15.6 la moyenne de l'écart-type sur l'ensemble de l'image en fonction des fluctuations de vitesse sous la surface. Pour  $f_e = 5$  Hz, l'écart-type semble diminuer avec la turbulence mais les variations sont ici trop faibles en regard du nombre de données pour conclure. Pour  $f_e = 8$  Hz, on observe une augmentation de  $\sigma_\eta$  sûrement liée aux déformations de la surface libre générée par la turbulence. Cependant, on notera que les fluctuations observées ici restent inférieures à celles obtenues pour les mêmes débits en l'absence de batteur (jusqu'à  $\sigma_\eta \approx 1$  mm pour les mêmes débits – voir Fig. 16.2 du chapitre 16). S'il est connu que la présence de vagues modifie la turbulence sous la surface [150] et donc potentiellement les déformations induites, nous souhaitons rester prudent sur ce résultat surprenant. En effet, les deux séries de mesures ont été réalisées séparément, et les conditions expérimentales ont changé. Une série d'expériences spécifique à cette problématique apparaît donc nécessaire.

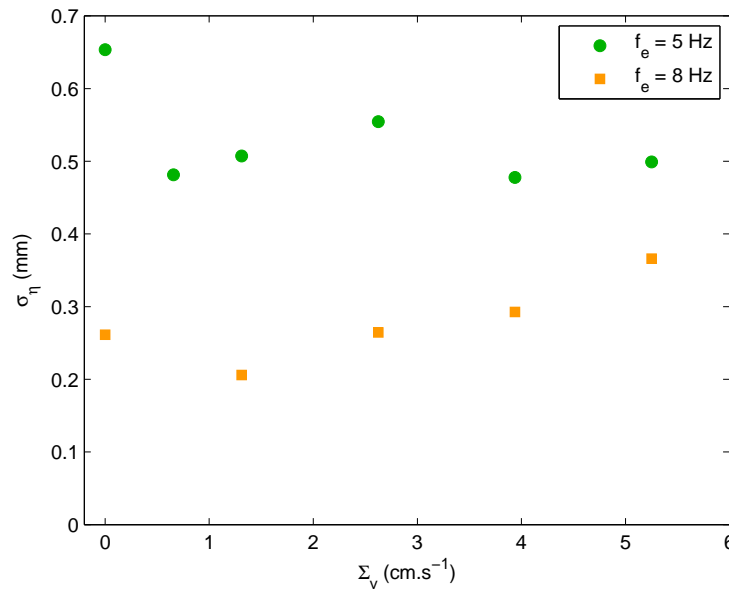


FIGURE 15.6 – Moyenne de l'écart-type des hauteurs de vagues  $\sigma_\eta$  sur l'ensemble de l'image en fonction des fluctuations de vitesses dans l'eau  $\Sigma_v$ .

### 15.3 Spectres spatiotemporels longitudinaux

L'effet de la turbulence sur les vagues est difficile à mettre en évidence au seul moyen de l'écart-type des fluctuations de la surface puisque les déformations induites par la turbulence se mêlent aux ondes déjà présentes à la surface. Les caractéristiques spectrales du champ de vagues sont ainsi susceptibles de livrer plus d'informations sur le phénomène de dispersion induit par la turbulence. Afin d'étudier ces propriétés dans la direction de propagation  $Oy$ , on impose  $k_x = 0$  et on trace sur la Fig. 15.7 le spectre spatiotemporel longitudinal  $S_\eta(k_x = 0, k_y, \omega)$ , calculé à partir de l'Eq. (13.5), pour  $f_e = 8$  Hz et différents niveaux de turbulence.

En l'absence de turbulence (Fig. 15.7.a), l'énergie est très concentrée sous forme de “patches” au niveau de la fréquence fondamentale  $f_e = 8$  Hz, ainsi que de ses harmoniques ( $2f_e, 3f_e \dots$ ) en raison des non linéarités. Les longueurs d'onde associées à ces fréquences sont fixées par la relation de dispersion des ondes gravito-capillaires linéaires en profondeur infinie [62] :



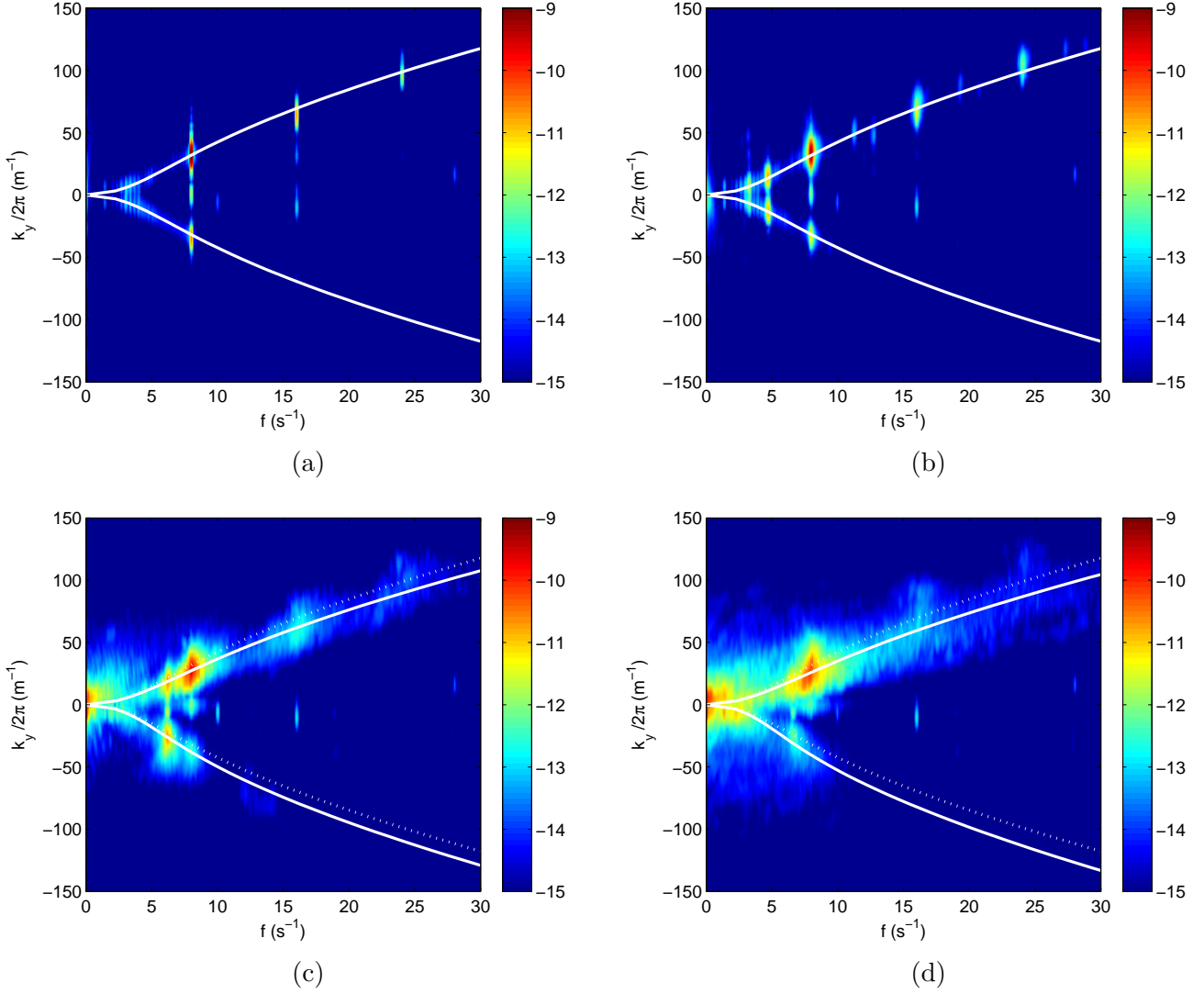


FIGURE 15.7 – Spectres de puissance spatiotemporels longitudinaux des déformations de la surface libre  $\log[S_\eta(k_x = 0, k_y, \omega)]$  pour  $f_e = 8 \text{ Hz}$ . Les pointillés blancs correspondent aux relations de dispersion classique des ondes gravito-capillaires (voir Eq. (15.1)) ; les lignes blanches continues prennent en compte l'effet Doppler à l'observation (voir Eq. (15.2)) en présence d'un écoulement moyen de vitesse  $\bar{V}$ . (a)  $\Sigma_v = 0$  et  $\bar{V} = 0$  ; (b)  $\Sigma_v = 1.31 \text{ cm.s}^{-1}$  et  $\bar{V} = 0$  ; (c)  $\Sigma_v = 3.94 \text{ cm.s}^{-1}$  et  $\bar{V} = 3 \text{ cm.s}^{-1}$  ; (d)  $\Sigma_v = 5.25 \text{ cm.s}^{-1}$  et  $\bar{V} = 4 \text{ cm.s}^{-1}$ . Le débit de (c) est ici différent de celui des autres figures constituées de 4 vignettes, car il est un bon exemple d'advection par l'écoulement moyen à la surface libre.

$$\omega = \sqrt{gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}} \quad (15.1)$$

où ici,  $k = |k_y|$ . La relation de dispersion (15.1) est représentée par une ligne blanche sur la Fig. 15.7.a dans les deux directions et prédit bien les longueurs d'ondes observées. Le point visible en  $-k_y(f_e)$  correspond à des ondes se propageant dans le sens inverse de la direction de propagation initiale. Il est donc lié à la présence d'ondes stationnaires. On observe par ailleurs que les “patches” d'énergie ont une largeur importante selon  $k_y$ . Cette largeur initiale peut s'expliquer principalement par le faible nombre de longueurs d'onde dans la fenêtre de mesure (voir Figs 15.2 et 15.3), même si les non linéarités et la dissipation visqueuse induisent par ailleurs une largeur non nulle physique.



En présence de turbulence, on observe sur les Figs 15.7.b-d un étalement de l'énergie à la fois spatialement et temporellement<sup>1</sup>. Par ailleurs, l'énergie des ondes reste localisée autour de la relation de dispersion. Pour les Figs 15.7.c et d, la relation de dispersion doit toutefois être adaptée à la présence d'écoulements moyens en raison d'un effet Doppler à l'observation. En effet, pour un observateur immobile (comme notre caméra), la relation de dispersion donnant  $\omega$  pour des ondes se propageant sur un milieu mobile de vitesse algébrique  $v$  dans la direction de propagation  $Oy$  s'écrit alors :

$$\omega = \sqrt{gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}} + vk_y \quad (15.2)$$

La fréquence d'oscillation perçue par l'observateur est alors différente de la fréquence d'oscillation de l'onde dans le référentiel du milieu de propagation, qui est quant à elle fixée par l'Eq. (15.1). La dissymétrie verticale des spectres spatiotemporels de la Fig. 15.7 permet alors de déterminer la vitesse de l'écoulement moyen  $\bar{V}$  selon  $Oy$ . En effet, celui-ci décale les fréquences d'observation dans des sens opposés pour les  $k_y$  positifs et négatifs (pour  $\bar{V} > 0$ ,  $\omega$  augmente si  $k_y > 0$  mais diminue si  $k_y < 0$ ). Nous montrons sur les Figs 15.7.c et d les relations de dispersion non corrigées (pointillés blancs) ainsi que celles corrigées par l'effet Doppler à l'observation (lignes blanches).

En principe, l'effet Doppler à l'observation, décrit par l'Eq. (15.2), induit par ailleurs un étalement de l'énergie autour de la ligne blanche représentant la relation de dispersion. En effet, les fluctuations turbulentes de vitesse induisent une distribution des fréquences observées pour une même longueur d'onde. Toutefois, cet élargissement est peu visible en raison de la largeur déjà importante selon  $k_y$  des "patches" d'énergie, même sans turbulence. Enfin, on doit noter l'apparition d'énergie à basse fréquence en présence de turbulence, visible pour  $f \rightarrow 0$  sur les Figs 15.7.b-d. Cette énergie est celle des déformations générées par la turbulence comme nous le verrons dans le chapitre 16.

L'effet Doppler à l'observation affecte les fréquences des ondes. Les longueurs d'onde observables sur chaque image instantanée de la surface libre ne sont quant à elles pas modifiées par cet effet. Nous allons donc nous intéresser aux spectres spatiaux, indépendants des fréquences temporelles, afin d'étudier de façon plus fine l'étalement de l'énergie du système à travers les échelles en présence de turbulence.

## 15.4 Spectres spatiaux longitudinaux

Les Figs 15.8.a et b montrent les spectres spatiaux de hauteur des vagues selon la direction de propagation de l'onde  $S_\eta(k_x = 0, k_y) \equiv \int_{\omega > 0} S_\eta(k_x = 0, k_y, \omega) d\omega$  pour les deux fréquences étudiées. Il s'agit donc de l'intégration sur les fréquences du spectre spatiotemporel comme celui représenté sur la Fig 15.7. En l'absence de turbulence (ligne rouge), puisque l'onde est monochromatique, on observe bien des pics dont la position des maxima,  $k_{max}$ , est située au niveau des nombres d'ondes prévus par la relation de dispersion,  $k_0 = 15.1$  (Fig. 15.8.a) et  $31.9 \text{ m}^{-1}$  (Fig. 15.8.b). Comme on l'a vu dans la section 15.3, l'importante largeur des pics, visible aussi sur la Fig 15.7, peut s'expliquer principalement par le faible nombre de longueurs d'onde dans la fenêtre de mesure (voir Figs 15.2 et 15.3). Il faut toutefois noter que les non linéarités et la dissipation visqueuse induisent également une largeur non nulle physique. En présence de turbulence, on observe quand même un élargissement

1. Il faut noter que les Figs 15.7.b et c font apparaître de l'énergie localisée sur la relation de dispersion mais autour de fréquences différentes de la fréquence fondamentale de l'onde monochromatique et de ses harmoniques. Il s'agit très probablement de résonances liées à la vibration de la cuve causée par la pompe. Ces fréquences augmentent d'ailleurs avec le débit et donc la fréquence de rotation du moteur de la pompe.

des pics ainsi qu'un décalage vers les plus bas nombres d'onde. Comme nous allons le montrer, ces effets peuvent s'expliquer en partie par un effet Doppler lors de la génération des ondes.

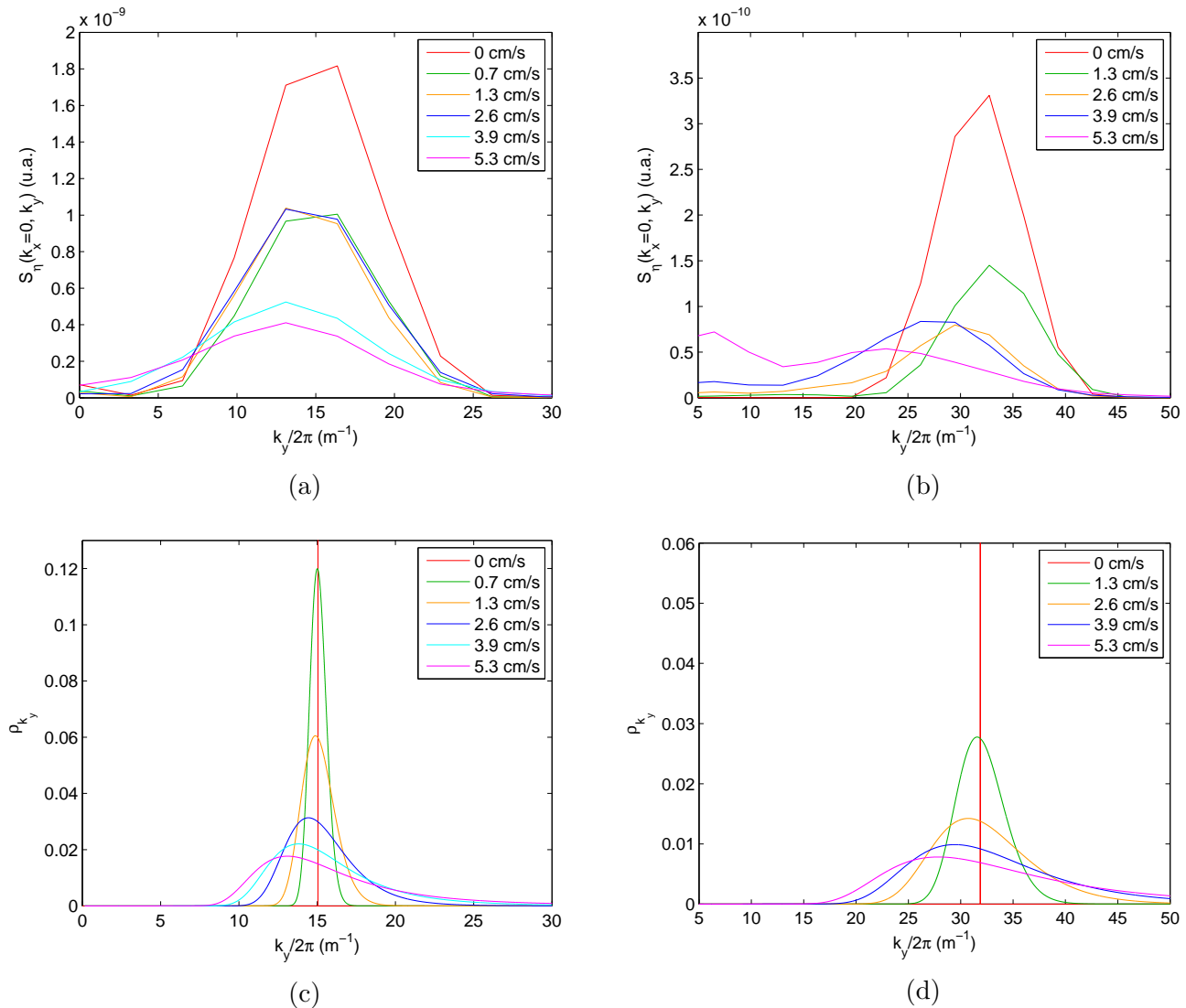


FIGURE 15.8 – (a) et (b) Spectres de puissance spatiaux longitudinaux des déformations de la surface libre  $S_\eta(k_x = 0, k_y)$  de la surface libre pour différents niveaux de turbulence hydrodynamique. (a)  $f_e = 5$  Hz ; (b)  $f_e = 8$  Hz. (c) et (d) Distributions des nombres d'onde prévues par un effet Doppler à la génération. Les valeurs indiquées dans la légende correspondent à  $\Sigma_v$ . (c)  $f_e = 5$  Hz ; (d)  $f_e = 8$  Hz.

En effet, lorsque le batteur est en mouvement, l'écoulement modifie la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde générée. La vitesse de phase de l'onde monochromatique générée par un batteur oscillant à la pulsation  $\omega_e = 2\pi f_e$  dans un milieu immobile s'écrit  $c_w(k_0) = \omega_e/k_0$  avec  $k_0$  fixé par la relation de dispersion. On considère que la période du batteur  $1/f_e$  est petite devant l'échelle de temps de la turbulence, ce qui est le cas dans notre expérience. On se place dans le cas où l'écoulement est constant et uniforme<sup>2</sup> dans la direction  $Oy$  à la vitesse algébrique  $v$ . Entre deux instants séparés de la période  $1/f_e$ , le fluide s'est déplacé de la distance  $v/f_e$  et l'onde s'est propagée à la vitesse  $\omega(k_y)/k_y$  dans le référentiel de l'écoulement, soit un déplacement  $\omega(k_y)/(k_y f_e)$ , où  $\omega$  est déterminé par la relation de dispersion (15.1). La longueur d'onde ainsi créée est alors :

2. L'hypothèse d'uniformité suppose que les courants ont des échelles spatiales grandes devant les longueurs d'onde étudiées. Cette hypothèse est limitée dans le sens où la taille typique des tourbillons  $L \approx 5$  cm est comprise entre les deux longueurs d'onde étudiées de 3.1 et 6.6 cm. On notera toutefois que l'échelle intégrale de la turbulence augmente à l'approche de la surface libre ( $L \approx 7$  cm à une profondeur de 1 cm).

$$\lambda_y = \frac{v}{f_e} + \frac{\omega(k_y)}{k_y f_e} \iff k_y = \frac{\omega_e}{v + \omega(k_y)/k_y} \quad (15.3)$$

Nous obtenons ainsi une relation entre le nombre d'onde  $k_y$  de l'onde et la vitesse locale d'écoulement du fluide au moment de la génération. En raison de la turbulence, la vitesse  $v$  de l'écoulement horizontal sous la surface présente des fluctuations qui suivent une distribution normale  $\rho_v(v)$  de largeur  $\sigma_v = \sigma_u$  (déterminée dans la section 14.2.1). La distribution des nombres d'ondes générés est alors<sup>3</sup> :

$$\rho_{k_y}(k_y) = \rho_v(v(k_y)) \left| \frac{dv}{dk_y} \right| \quad (15.4)$$

où  $v$  et  $dv/dk_y$  sont calculés avec l'Eq. (15.3). Il vient donc :

$$\rho_{k_y}(k_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \left( \frac{\omega_e - \omega(k_y)}{k_y^2} + \frac{g + 3\gamma k_y^2/\rho}{2k_y\omega(k_y)} \right) \exp \left( -\frac{[\omega_e - \omega(k_y)]^2}{2k_y^2\sigma_v^2} \right) \quad (15.5)$$

Afin de comparer ces distributions avec les spectres spatiaux obtenus expérimentalement, nous représentons  $\rho_{k_y}$  calculée à partir de l'Eq. (15.5) sur les Figs 15.8.c et d, correspondant aux fréquences d'excitation  $f_e = 5$  et 8 Hz. Les niveaux de turbulence simulés sont les mêmes que ceux des figures Figs 15.8.a et b respectivement. En l'absence de turbulence (ligne rouge), la largeur du pic simulé est nulle puisque seule est générée la longueur d'onde associée à la fréquence d'excitation. La comparaison avec les spectres spatiaux est difficile en raison de la largeur initiale des pics expérimentaux. Toutefois, quand la turbulence est présente, on observe qualitativement le même type d'étalement et de décalage des pics vers les plus bas nombres d'ondes. L'effet Doppler lié aux fluctuations de vitesses locales à la génération permet donc d'expliquer en partie les observations expérimentales.

Il existe toutefois des différences mais qu'il est difficile d'interpréter. Par exemple, pour  $f_e = 8Hz$ , les décalages vers les bas nombres d'ondes sont plus importants sur les pics expérimentaux que ceux simulés pour certains niveaux de turbulence (Figs 15.8.b et d). Cela peut s'expliquer par la présence d'écoulements moyens locaux au niveau du batteur lors de la génération, peut-être liés à ceux que nous avons repéré dans la zone de mesure en section 15.3. Il peut également s'agir d'un effet de la turbulence pendant la propagation. Une piste d'analyse est par exemple un effet de l'advection dans la direction transverse, montré par Gutiérrez et Aumaître [111]. Toutefois, cette explication n'est pas applicable ici puisque les spectres spatiaux sont tracés avec la condition  $k_x = 0$ .

## 15.5 Redistribution transverse de l'énergie des vagues

Une façon de sonder l'advection des ondes de surface par la turbulence une fois qu'elles sont générées est de s'intéresser à la dimension transverse. En effet, les fluctuations turbulentes de vitesse sous la surface sont omnidirectionnelles et ne se limitent donc pas à la direction de propagation de l'onde monochromatique. Nous étudions ici les spectres spatiaux dans les deux directions spatiales à une fréquence temporelle fixée. Dans un premier temps, cette fréquence temporelle est la fréquence d'excitation du batteur  $f_e$ . Les Figs 15.9 et 15.10 représentent ainsi les spectres  $S_\eta(k_x, k_y, f = f_e)$  pour  $f_e = 5$  et 8 Hz respectivement.

---

3. Ce calcul de l'effet Doppler à la génération a été inspiré d'un modèle d'effet Doppler lors de la propagation proposé par P. Gutiérrez et S. Aumaître dans le cadre de leurs recherches (communication privée).

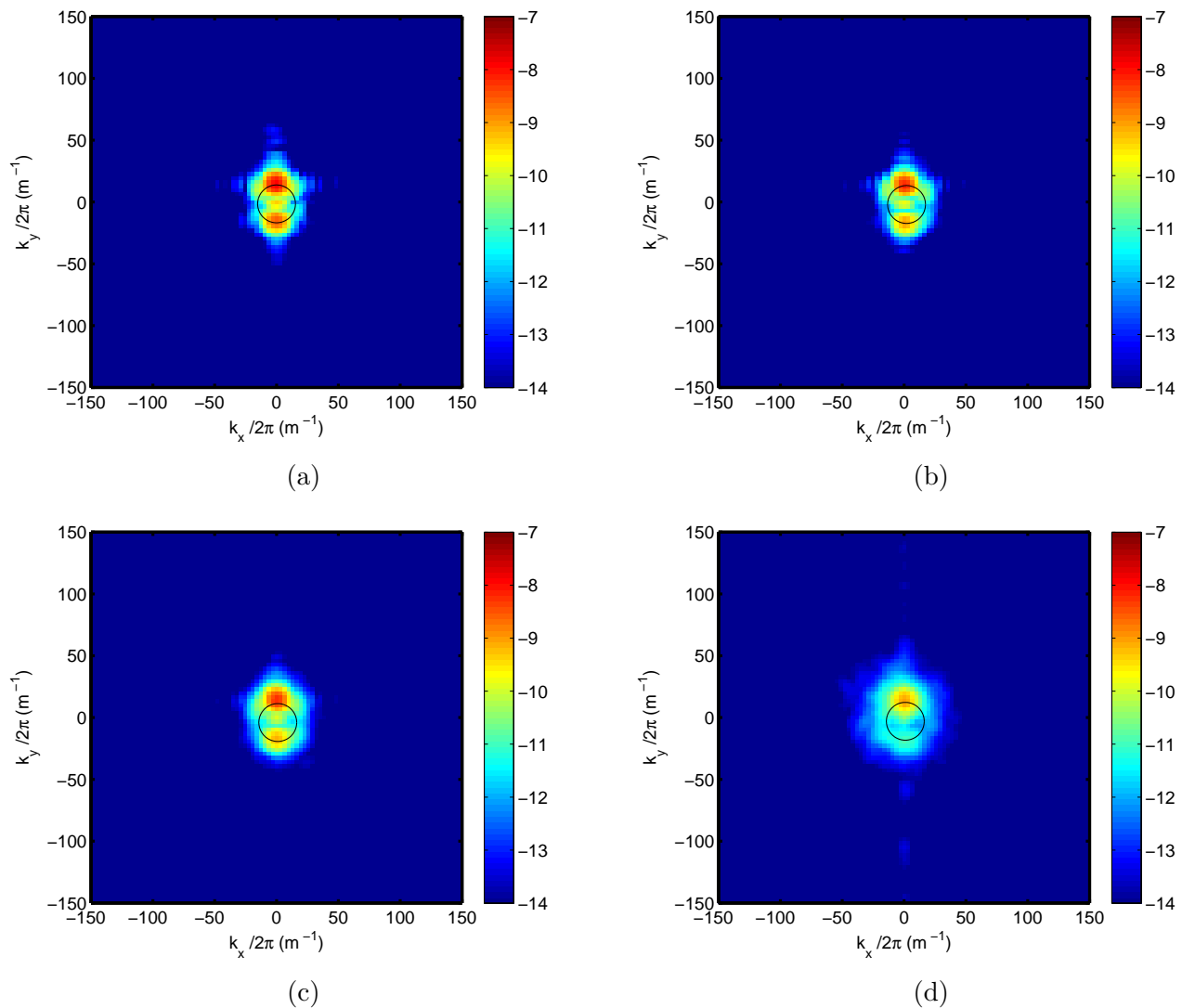


FIGURE 15.9 – Spectres de puissance spatiaux 2D des déformations de la surface libre  $\log[S_\eta(k_x, k_y, f = f_e)]$  pour  $f_e = 5$  Hz : (a)  $\Sigma_v = 0$  ; (b)  $\Sigma_v = 1.31$  cm.s $^{-1}$  ; (c)  $\Sigma_v = 2.62$  cm.s $^{-1}$  ; (d)  $\Sigma_v = 5.25$  cm.s $^{-1}$ . Le rayon des cercles noirs est le nombre d'ondes  $k_0$ .

En l'absence de turbulence (Fig. a), on remarque que l'énergie est principalement concentrée aux points satisfaisants  $k_x = 0$  et  $k_y = \pm k_0$ , correspondant aux ondes planes monochromatiques dans les directions  $y$  et  $-y$ . Le point  $ky = -k_0$  est moins marqué pour  $f_e = 8$  Hz (Fig. 15.10.a) puisqu'on a vu sur la Fig. 15.5.a que les réflexions sur la paroi opposée au batteur étaient moins importantes que pour  $f_e = 5$  Hz, l'atténuation étant plus forte. En présence de turbulence (Figs 15.10.b-d), on observe un étalement dans les deux directions. Ceci est lié à l'effet Doppler à l'observation mentionné dans la section 15.3 et l'Eq. (15.2) : on a vu que les fréquences observées pour un nombre d'onde donné fluctuent avec les vitesses turbulentes et ont donc une distribution élargie par la turbulence. Réciproquement, les nombres d'onde observés à une fréquence donnée (ici,  $f_e$ ) ont donc une distribution élargie par la turbulence. Toutefois, les spectres spatiaux des Figs 15.10.b-d restent fortement dominés par les ondes se propageant selon la direction initiale.

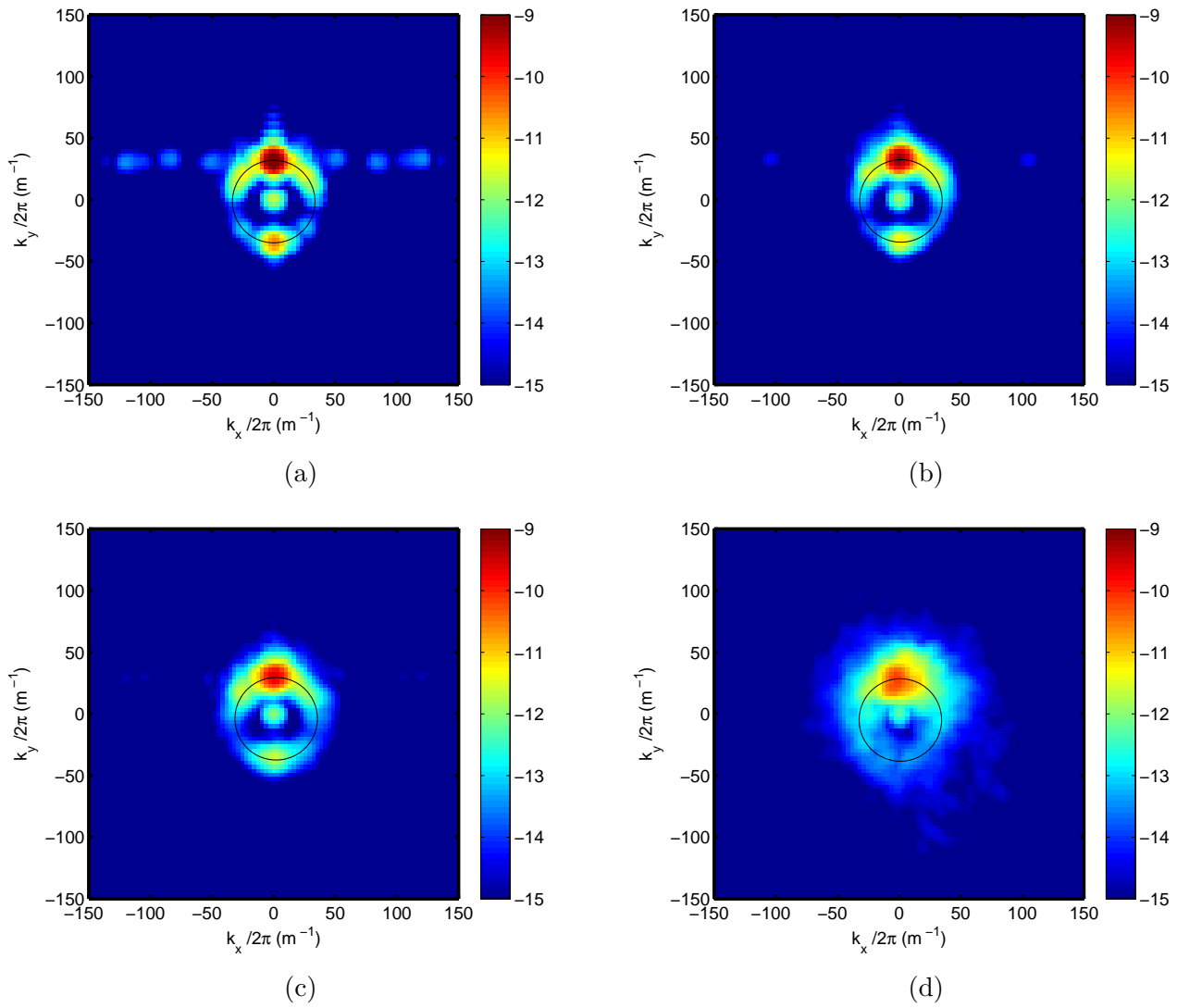


FIGURE 15.10 – Spectres de puissance spatiaux 2D des déformations de la surface libre  $\log[S_\eta(k_x, k_y, f = f_e)]$  pour  $f_e = 8 \text{ Hz}$  : (a)  $\Sigma_v = 0$  ; (b)  $\Sigma_v = 1.31 \text{ cm.s}^{-1}$  ; (c)  $\Sigma_v = 2.62 \text{ cm.s}^{-1}$  ; (d)  $\Sigma_v = 5.25 \text{ cm.s}^{-1}$ . Le rayon des cercles noirs est le nombre d'ondes  $k_0$ .

Sur les Figs 15.11 et 15.12, on trace les spectres spatiaux en des fréquences différentes quoique proches des fréquences d'excitation  $f_e = 5$  et  $8 \text{ Hz}$  :  $S_\eta(k_x, k_y, f = f_s = 5.4 \text{ Hz})$  et  $S_\eta(k_x, k_y, f = f_s = 8.7 \text{ Hz})$ . En l'absence de turbulence (Fig. a), les deux points bleus indiquent la présence de traces du forçage en raison de la largeur non nulle des spectres de puissance. En présence de turbulence, le spectre spatial gagne en énergie. L'effet Doppler à la génération permet d'expliquer le renforcement des nombres d'ondes dans la direction  $Oy$  et l'effet Doppler à l'observation explique l'étalement de l'énergie sur le spectre. Toutefois, on observe très nettement la formation d'un cercle dont le rayon est le nombre d'ondes  $k_s$  associé à la fréquence d'observation  $f_s$  du spectre via la relation de dispersion (15.1) (Figs b et c). Ceci montre l'existence d'ondes dans toutes les directions en présence de turbulence.

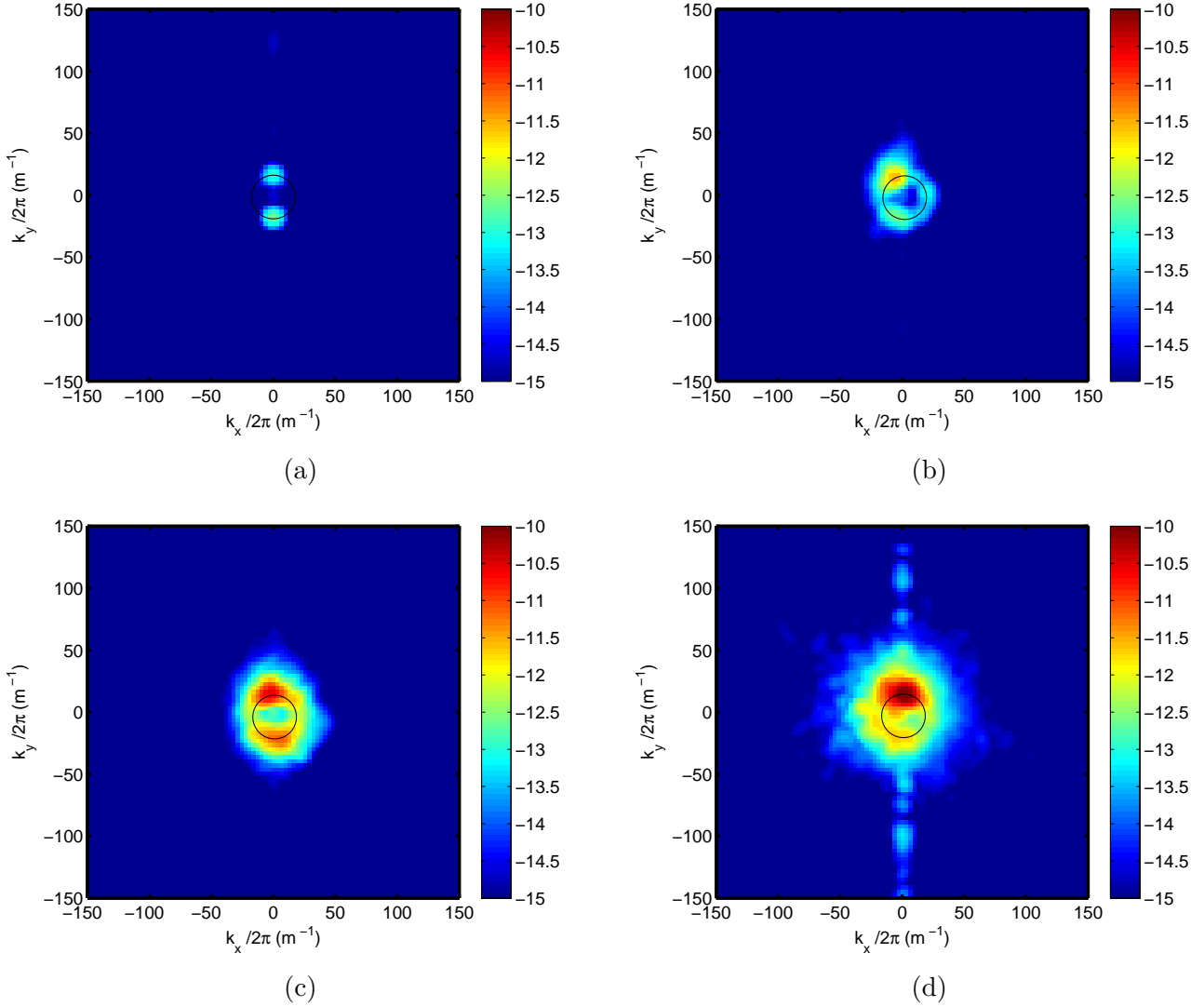


FIGURE 15.11 – Spectres de puissance spatiaux 2D des déformations de la surface libre  $\log[S_\eta(k_x, k_y, f = 5.4 \text{ Hz})]$  en  $f = f_s = 5.4 \text{ Hz}$  pour  $f_e = 5 \text{ Hz}$  : (a)  $\Sigma_v = 0$ ; (b)  $\Sigma_v = 1.31 \text{ cm.s}^{-1}$ ; (c)  $\Sigma_v = 2.62 \text{ cm.s}^{-1}$ ; (d)  $\Sigma_v = 5.25 \text{ cm.s}^{-1}$ . Le rayon des cercles noirs est le nombre d'ondes  $k_s$ , fixé par  $f_s$  via la relation de dispersion (15.1).

Ceci est conforme à l'advection dans toutes les directions et la déstabilisation du front d'ondes mises en évidence sur les aperçus de la surface libre des Figs 15.2 et 15.3. Les tourbillons d'axe perpendiculaire à la surface libre permettent probablement de modifier la direction des ondes générées initialement [114–116]. Notons toutefois que ces ondes omnidirectionnelles pourraient également être des ondes de surface générées par la turbulence elle-même. Cependant, nous montrerons dans

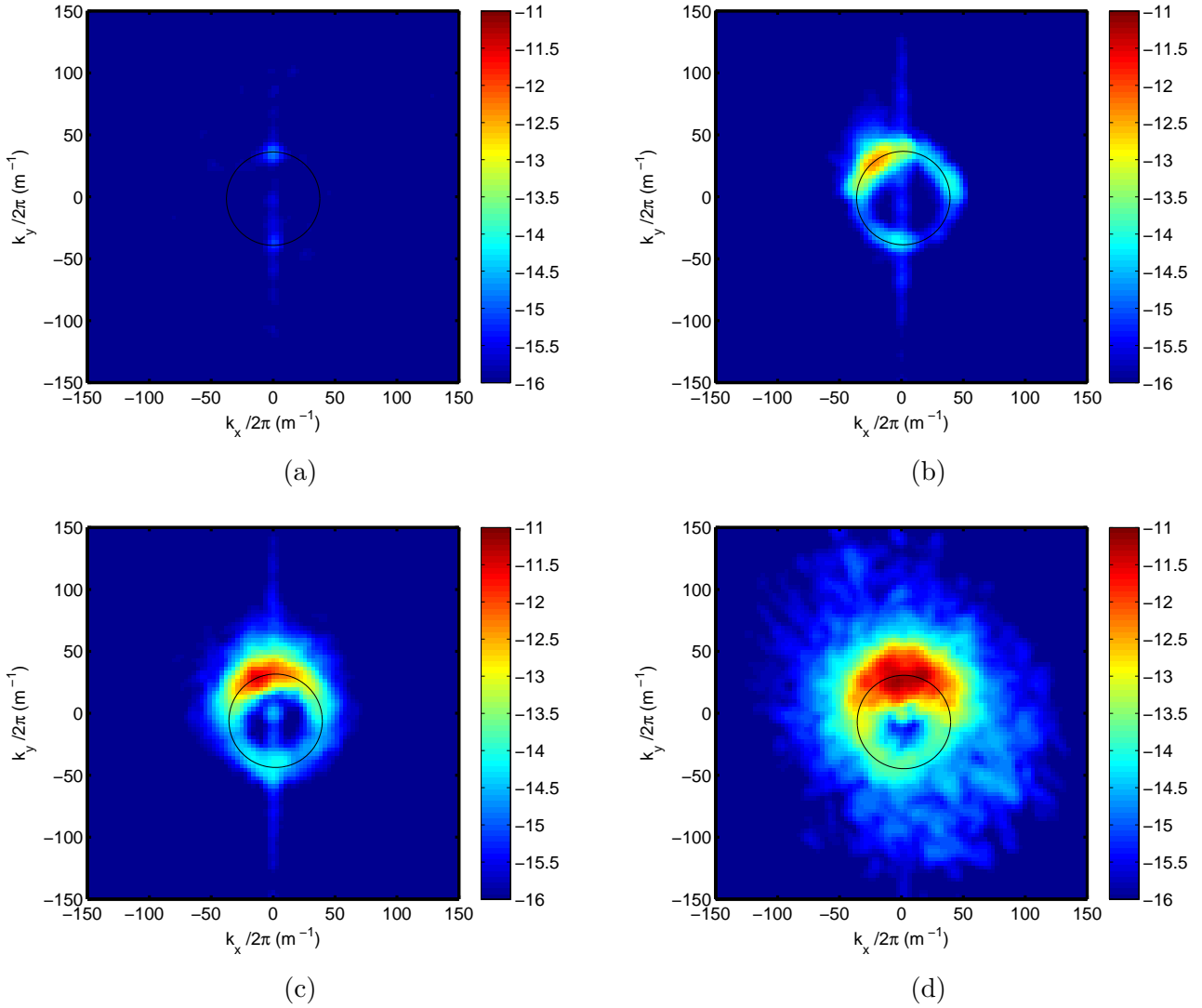


FIGURE 15.12 – Spectres de puissance spatiaux 2D des déformations de la surface libre  $\log[S_\eta(k_x, k_y, f = 8.7 \text{ Hz})]$  en  $f = f_S = 8.7 \text{ Hz}$  pour  $f_e = 8 \text{ Hz}$  : (a)  $\Sigma_v = 0$ ; (b)  $\Sigma_v = 1.31 \text{ cm.s}^{-1}$ ; (c)  $\Sigma_v = 2.62 \text{ cm.s}^{-1}$ ; (d)  $\Sigma_v = 5.25 \text{ cm.s}^{-1}$ . Le rayon des cercles noirs est le nombre d'ondes  $k_S$ , fixé par  $f_S$  via la relation de dispersion (15.1).

le chapitre 16 que, pour les faibles niveaux de turbulence, les déformations de la surface libre induites par la turbulence semblent dominées par des structures non propagatives, ce qui n'est pas compatible avec les cercles observés sur les Figs 15.11 et 15.12. En effet, ces cercles sont déterminés par la relation de dispersion des ondes gravito-capillaires qui n'est pas respectée par les structures non propagatives.

## 15.6 Spectres temporels

Pour finir, nous nous intéressons maintenant aux spectres de puissance temporels  $S_\eta(f)$  intégrés sur l'ensemble des nombres d'onde pour les deux séries de mesures, représentés sur la Fig. 15.13. En l'absence de turbulence, on observe bien sûr des pics centrés sur les fréquences d'excitation, qui s'élargissent fortement lorsque la turbulence est générée sous la surface.

Il s'agit là de la conséquence des deux effets Doppler mentionnés dans les sections précédentes.

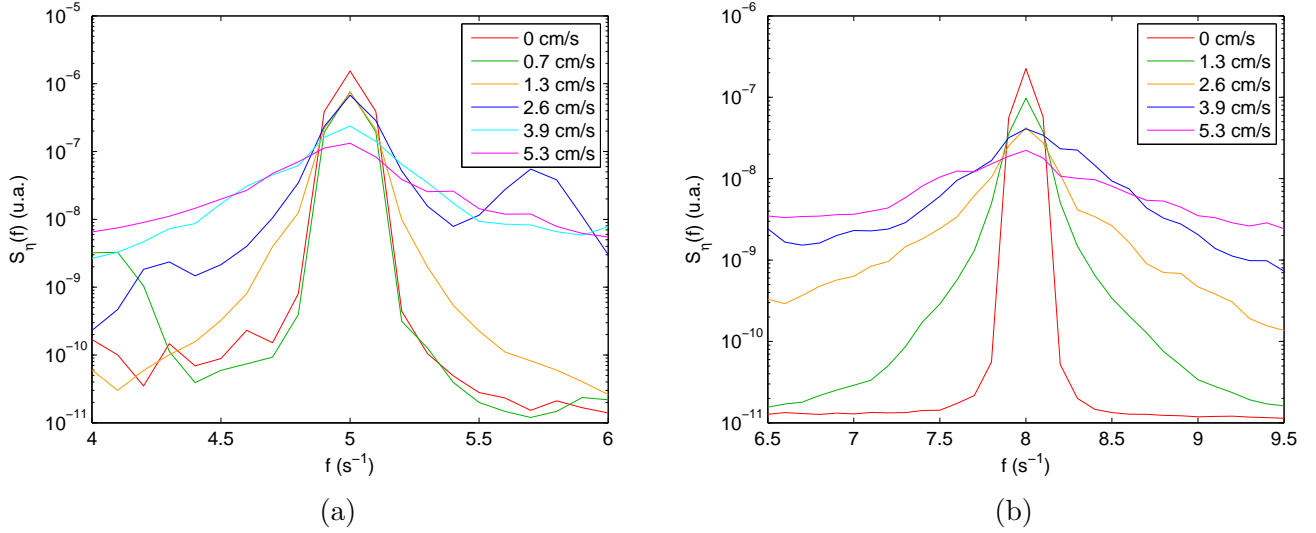


FIGURE 15.13 – Spectres de puissance temporels des déformations de la surface libre  $S_\eta(f)$  pour différents niveaux de turbulence hydrodynamique. (a)  $f_e = 5$  Hz ; (b)  $f_e = 8$  Hz. Les valeurs indiquées dans la légende correspondent à  $\Sigma_v$ .

L'effet Doppler à la génération (voir section 15.4) élargit la gamme des longueurs d'ondes présentes dans le système et donc la gamme de fréquences d'oscillation associées (via la relation de dispersion) dans le référentiel de propagation. D'autre part, un effet Doppler secondaire est lié à l'observation depuis un référentiel en mouvement par rapport au référentiel de propagation (voir section 15.3). Comme l'onde se propage sur un milieu subissant des fluctuations de vitesses, la fréquence perçue par l'observateur est différente de la fréquence d'oscillation dans le référentiel de propagation. Ces deux effets Doppler expliquent donc au moins en partie l'élargissement observé sur les spectres de la Fig. 15.13. L'advection et la déstabilisation du front d'onde jouent probablement un rôle mais qu'il est difficile de distinguer ici.

## 15.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le comportement d'ondes planes monochromatiques générées par un batteur rectiligne à la surface d'un fluide présentant un écoulement turbulent sous la surface libre. Nous avons décrit leurs propriétés au moyen de leurs caractéristiques spectrales spatiotemporelles 2D. En présence de turbulence, nous avons mis en évidence et décrit un effet Doppler à la génération qui produit une large gamme de longueur d'ondes en raison des fluctuations de vitesse locale au niveau du batteur. Ce phénomène masque les effets dispersifs propres à la turbulence dans la direction de propagation. Nous avons aussi mis en évidence la présence d'ondes de surface gravito-capillaires dans toutes les directions en présence de turbulence. Cette redistribution angulaire d'énergie pourrait provenir de la déstabilisation du front d'ondes rectilignes et/ou de l'advection des ondes longitudinales par les courants turbulents, deux phénomènes observés directement à la surface libre. Des analyses complémentaires sont nécessaires pour quantifier leur influence sur l'isotropie des ondes. Par ailleurs, nous pourrions envisager la réalisation d'expériences dans lesquelles le batteur est isolé de la turbulence. Ceci permettrait d'éliminer l'effet Doppler à la génération et d'observer les effets de la turbulence dans la direction longitudinale. Enfin, dans l'optique d'une meilleure compréhension des mécanismes physiques, une mesure simultanée du champ de vitesses sous la surface et des déformations de la surface libre semble prometteuse. Dans le prolongement de cette étude, une perspective serait d'étudier les interactions entre la turbulence hydrodynamique



et des ondes gravito-capillaires engendrées de façon isotrope dans une certaine bande de fréquence. De premiers résultats sont présentés dans l'annexe E. On retrouve une advection des ondes gravito-capillaire qui élargit la relation de dispersion par un effet Doppler à l'observation. Mais on observe aussi une superposition des ondes engendrées par le batteur et des déformations de la surface libre induites par la turbulence hydrodynamique elle-même. Nous allons donc étudier dans le prochain chapitre les déformations de la surface libre observées en l'absence de batteur afin de ne sonder que les déformations engendrées par la turbulence.



# Chapitre 16

## Déformations de la surface libre induites par la turbulence hydrodynamique

Nous avons vu dans le chapitre 12 d'introduction que la nature des déformations de la surface libre générées par un écoulement turbulent sous la surface étaient loin d'être comprises et dépendaient des conditions expérimentales. Notre dispositif nous permet d'étudier ici ces déformations grâce à des mesures spatiotemporelles 2D de la surface libre. Ces mesures sont réalisées pour différents niveaux de turbulence qui permettent d'atteindre de fortes déformations de la surface.

### 16.1 Protocole expérimental

Les déformations de la surface libre présentées dans ce chapitre sont observées en l'absence de batteurs au moyen de la profilométrie par transformée de Fourier (voir section 13.5.2). Le champ de déformation de la surface libre est ainsi mesuré dans les deux dimensions au centre de la cuve sur une surface de  $14 \times 14 \text{ cm}^2$  et pendant une durée de 52 s à une fréquence d'acquisition de 300 Hz. Une image instantanée représentative des déformations de la surface libre observées est représentée sur la Fig. 16.1.

Les valeurs des fluctuations turbulentes de vitesse  $\Sigma_v$  utilisées dans ce chapitre sont calculées à partir de celles mesurées dans la section 14.2.1, moyennées sur le domaine défini par  $-9 < z < -7 \text{ cm}$  et  $-5 < x < 5 \text{ cm}$ . La gamme étudiée est  $\Sigma_v \in [0.66; 11.8] \text{ cm.s}^{-1}$ . Le nombre de Froude,  $Fr = \Sigma_v / \sqrt{2gL}$  (avec  $L \approx 5 \text{ cm}$  l'échelle intégrale de la turbulence déterminée dans la section 14.2.2), permet de quantifier le rapport entre énergie cinétique turbulente (provoquant les déformations) et énergie gravitationnelle (s'opposant aux déformations de la surface libre). La gamme des valeurs dans cette expérience est  $Fr = \Sigma_v / \sqrt{2gL} \in [0.007; 0.12]$ , soit entre 0.4 et 7 fois celles atteintes par Savelsberg et van de Water<sup>1</sup> [87].

Les mesures de ce chapitre sont de moindre qualité que dans le chapitre 15 car le dispositif n'avait pas encore été optimisé (quantité de  $\text{TiO}_2$ , contraste des franges, durée de la mesure). Du bruit pouvait apparaître dans certaines images en raison de problèmes de contraste lors de fortes déformations. Toutefois, nous avons pu vérifier que les caractéristiques spatiales décrites dans ce chapitre étaient similaires lorsque nous ne conservions que les images non bruitées. Nous retrouvons par ailleurs les mêmes caractéristiques temporelles lors de la réalisation d'une mesure locale des déformations de la surface libre au moyen d'une sonde capacitive. Le bruit sur les images affecte particulièrement les

---

1. La formule utilisée par Savelsberg et van de Water correspond à  $Fr^2$ . Pour la comparaison, nous avons donc recalculé les valeurs.

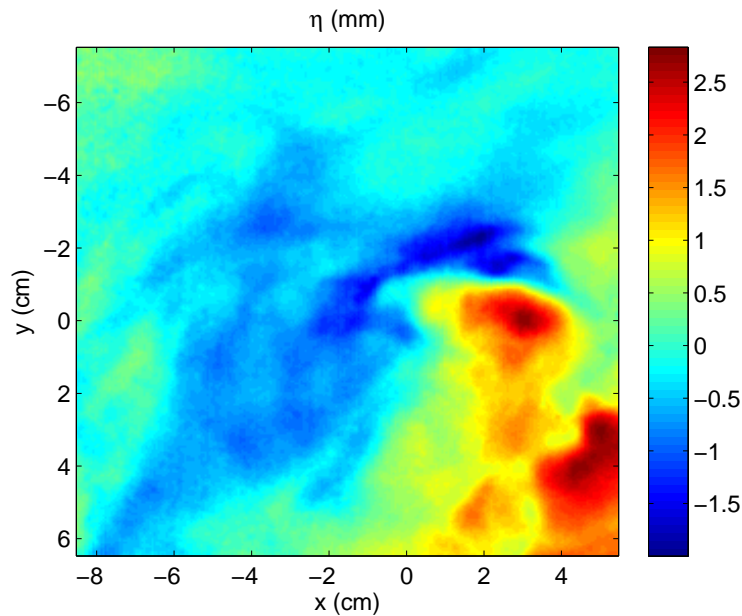


FIGURE 16.1 – Exemple d’image instantanée des déformations de la surface libre  $\eta$  dans l’espace en l’absence de batteurs.  $\Sigma_v = 5.25 \text{ cm.s}^{-1}$ .

deux débits maximaux, pour lesquels les gradients spatiaux et les courbures des déformations de la surface libre sont très importants. Les limites de notre système de mesure sont atteintes pour ces deux cas.

## 16.2 Amplitude des déformations

Une façon de quantifier les déformations de la surface libre est de mesurer l’écart-type des déformations de la surface libre  $\sigma_\eta$ . Elles sont représentées sur la Fig. 16.2.a en fonction des fluctuations de vitesse turbulentes  $\Sigma_v$  mesurées au préalable sous la surface (voir section 16.1). La relation entre  $\sigma_\eta$  et  $\Sigma_v$  est à peu près linéaire. Il ne semble donc pas exister de seuil dans l’apparition ou la croissance des déformations de la surface. Ceci suggère que le mécanisme de déformation de la surface libre est le même pour l’ensemble des niveaux de turbulence engendrée sous la surface.

On trace par ailleurs la pente moyenne  $\kappa \equiv k_{max}\sigma_\eta$  sur la Fig. 16.2.b, où  $k_{max} = 46 \text{ rad.m}^{-1}$  est le nombre d’ondes correspondant au maximum du spectre spatial de la hauteur des déformations de la surface (voir section 16.4). Comme  $k_{max}$  ne dépend pas de l’amplitude du forçage,  $\kappa$  évolue comme  $\sigma_\eta$ . Cette raideur atteint une valeur maximale de 0.1, qui correspond à des régimes de déformation importants.

## 16.3 Spectres spatiotemporels

Afin d’obtenir des informations sur la nature des déformations de la surface libre, on s’intéresse aux spectres spatiotemporels des déformations de la surface libre  $S_\eta(k_x, k_y, f)$ , calculés à partir de l’Eq. (13.5). Ces spectres peuvent être intégrés sur tous les angles dans le cas d’une isotropie des déformations de la surface libre :  $S_\eta(k, f) = \int_{k=\sqrt{k_x^2+k_y^2}} S_\eta(k_x, k_y, f) dk_x dk_y = 2\pi k S_\eta(k_x, k_y, f)$  avec  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ . Un tel spectre est représenté sur la Fig. 16.3. La zone de forte énergie proche de l’origine du spectre correspond à l’advection des déformations de la surface libre par les courants

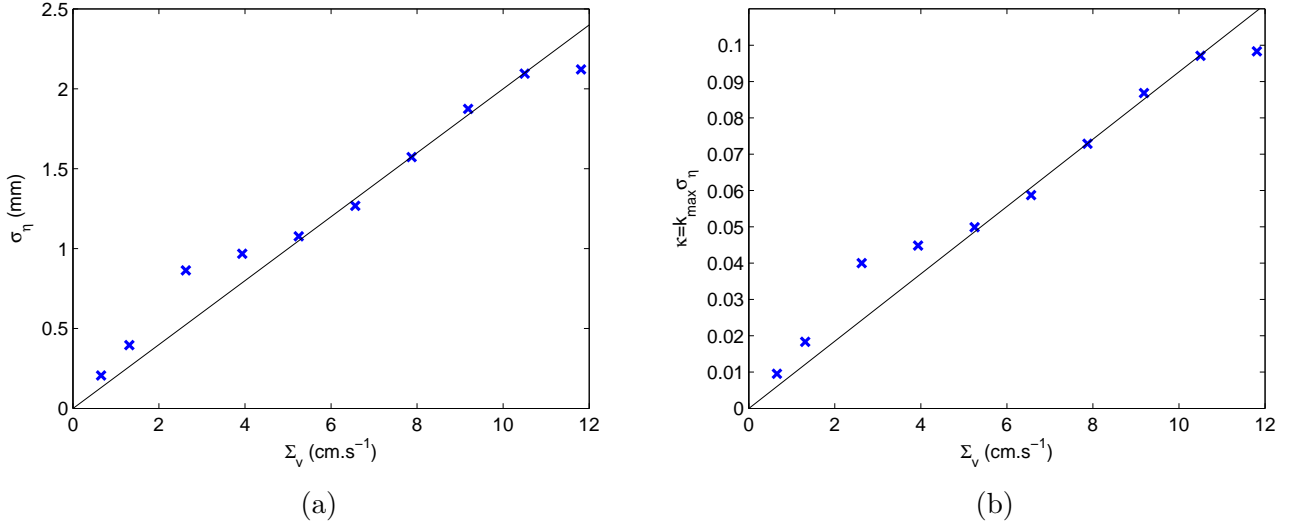


FIGURE 16.2 – Caractéristiques de la surface libre en fonction des fluctuations turbulentes de vitesse  $\Sigma_v$  sous la surface : (a) Ecart-type des déformations de la surface libre  $\sigma_\eta$  ; (b) Pente moyenne  $\kappa \equiv k_{\max} \sigma_\eta$ .

turbulents, comme discuté par la suite. Les électrovannes présentant des problèmes d'ouverture (voir section 13.4.1), les résultats montrent la présence d'écoulements moyens en particulier pour les faibles débits. Les spectres spatiotemporels intégrés sur tous les angles présentent alors des résultats difficilement interprétables en raison de ces asymétries. Nous présenterons donc ici uniquement des spectres spatiotemporels définis selon la direction  $Ox$  :  $S_\eta(k_x, k_y = 0, f)$ . Nous n'avons pas observé de différences notables entre les directions horizontales  $Ox$  et  $Oy$ .

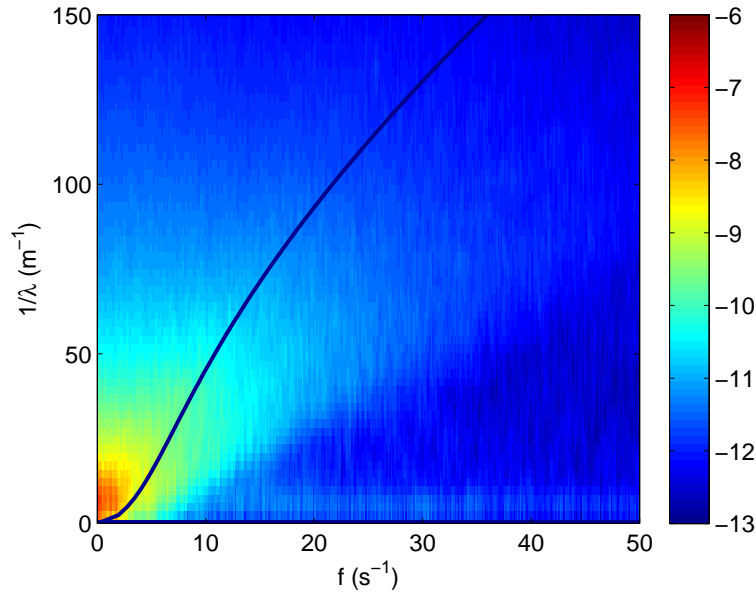


FIGURE 16.3 – Spectre de puissance spatiotemporel des déformations de la surface libre  $\log[S_\eta(1/\lambda, f)]$ . La ligne représente la relation de dispersion des ondes gravito-capillaires.  $\Sigma_v = 6.6 \text{ cm.s}^{-1}$ .

### Faible turbulence

La Fig. 16.4 représente ainsi des spectres spatiotemporels  $S_\eta(k_x, k_y = 0, f)$  pour les deux débits les plus faibles étudiés. Dans les deux cas, on observe un spectre asymétrique présentant trois zones de

concentration de l'énergie, similaires à celles obtenues par Savelsberg et van de Water [87] dans le cas d'une turbulence à écoulement moyen. Nous devons prendre en compte ici l'advection par un écoulement moyen pour comprendre ces spectres.

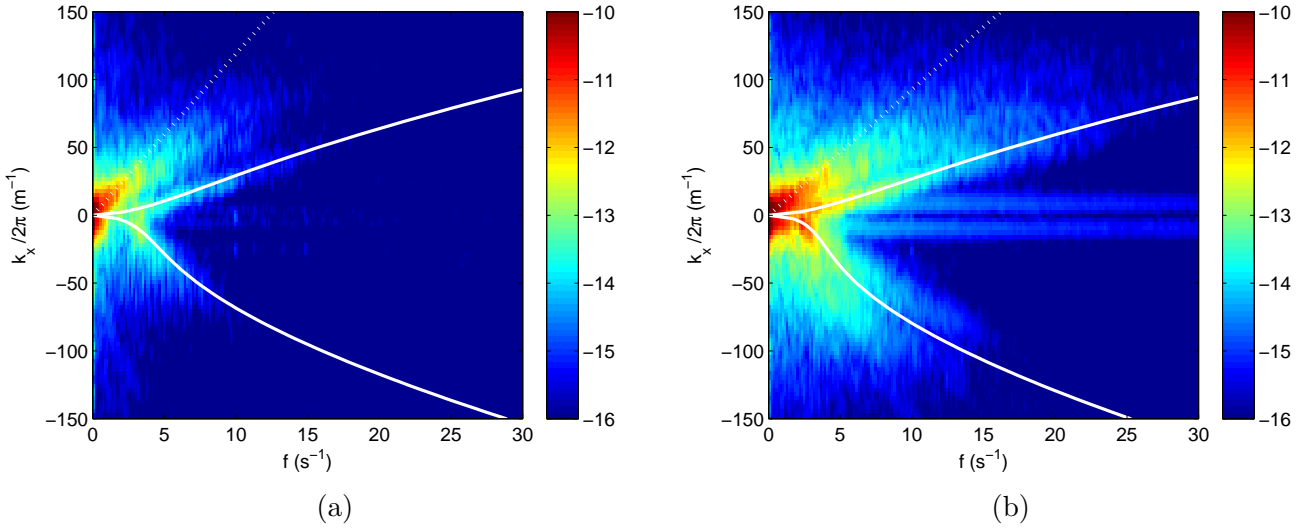


FIGURE 16.4 – Spectre spatiotemporel de la déformation de la surface libre  $\log[S_\eta(k_x, k_y = 0, f)]$  selon  $k_x$  pour deux faibles niveaux de turbulence en présence d'écoulement moyen sous la surface  $\bar{U}$  suivant l'axe  $Ox$  : (a)  $\Sigma_v = 0.66 \text{ cm.s}^{-1}$  et  $\bar{U} = 9.1 \text{ cm.s}^{-1}$ ; (b)  $\Sigma_v = 1.31 \text{ cm.s}^{-1}$  et  $\bar{U} = 13.5 \text{ cm.s}^{-1}$ . Les lignes blanches continues correspondent aux relations de dispersion advectées par le courant moyen ajusté  $\bar{U}$  (voir Eq. (16.1)). Les pointillés blancs sont sur une droite d'équation  $\omega = k_x \bar{U}$ .

Comme nous l'avons vu dans la section 15.3, la pulsation d'une onde gravito-capillaire advectée par un courant de vitesse constante  $\bar{U}$  selon l'axe  $Ox$  est modifiée par l'effet Doppler à l'observation. La relation de dispersion pour un observateur dans le référentiel du laboratoire doit prendre en compte cet effet et s'écrit :

$$\omega = \sqrt{gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}} + k_x \bar{U} \quad (16.1)$$

où  $k = |k_x|$ . Les lignes blanches tracées sur la Fig. 16.4 correspondent à l'Eq. (16.1), pour laquelle le courant moyen  $\bar{U}$  a été ajusté comme dans la section 15.3. On trouve qu'une partie de l'énergie des déformations de la surface libre est concentrée autour de ces lignes. Nous mettons donc en évidence ici l'existence d'ondes gravito-capillaires générées par un écoulement turbulent. L'énergie est plus étalée sur la Fig. 16.4.b en raison d'une turbulence plus importante sous la surface. Comme nous l'avons vu dans la section 15.3, cet étalement s'explique par le même effet Doppler à l'observation que précédemment : les fluctuations de vitesses du milieu de propagation de l'onde induisent une gamme de fréquences associées à une longueur d'onde donnée. Cet élargissement est donc différent de l'élargissement non linéaire de la relation de dispersion habituellement rencontrée en turbulence d'ondes [151]. Cette génération d'ondes pourrait être le fait des remontées d'eau comme suggéré par Savelsberg [152]. Il est à noter que le courant moyen est ici important et la formation d'ondes pourrait avoir lieu près des parois, où les variations spatiales de vitesses horizontales sont alors susceptibles d'être importantes.

Enfin, une autre partie de l'énergie des spectres de la Fig. 16.4 semble se concentrer autour de la droite d'équation  $\omega = k_x \bar{U}$  (en pointillés blancs). Il s'agit là de structures de basse fréquence temporelle advectées par l'écoulement moyen. Comme l'a relevé Savelsberg [152], qui observait le

même type de structures se déplaçant avec l'écoulement, celles-ci sont probablement directement liées à la turbulence sous la surface. Il pourrait aussi s'agir de remontées d'eau ou de scarifications mentionnées par Brocchini et Peregrine [117] et que nous avons pu observer directement. Dans notre cas, cela peut aussi correspondre à l'impact des jets, parfois visible à la surface libre.

Il faut noter que contrairement à Savelsberg et van de Water [87], l'énergie associée aux ondes gravito-capillaires (autour des lignes blanches sur les spectres spatiotemporels de la Fig. 16.4) est dominée par celle des structures à basse fréquence se déplaçant avec l'écoulement moyen (autour des lignes en pointillés). Les spectres spatiotemporels que nous avons obtenus sont plutôt à rapprocher de ceux obtenus en simulation numérique par Guo et Shen [99] pour un dispositif proche de celui utilisé ici (sans écoulement moyen). En effet, si la présence d'ondes de surface gravito-capillaires y est perceptible, elles sont également largement dominées par des structures oscillant à basse fréquence.

### Turbulence modérée ou forte

Nous observons maintenant les cas de plus forte turbulence avec les spectres spatiotemporels de la Fig. 16.5 pour deux intensités de turbulence croissantes. Il est ici difficile de déterminer la présence d'un écoulement moyen en raison de la relative symétrie verticale des spectres. L'effet Doppler lors de l'observation tend par ailleurs à étaler horizontalement l'énergie présente sur le spectre spatiotemporel (voir section 15.3). Il devient dès lors difficile de distinguer l'énergie associée à d'éventuelles ondes de surface (concentrée autour de la relation de dispersion en l'absence d'advection) et l'énergie liée à des structures basses fréquences (concentrée autour de l'axe vertical  $f = 0$  en l'absence d'advection). L'importante concentration d'énergie selon l'axe horizontal défini par  $k_x = 0$  correspond au bruit de mesure sur les images.

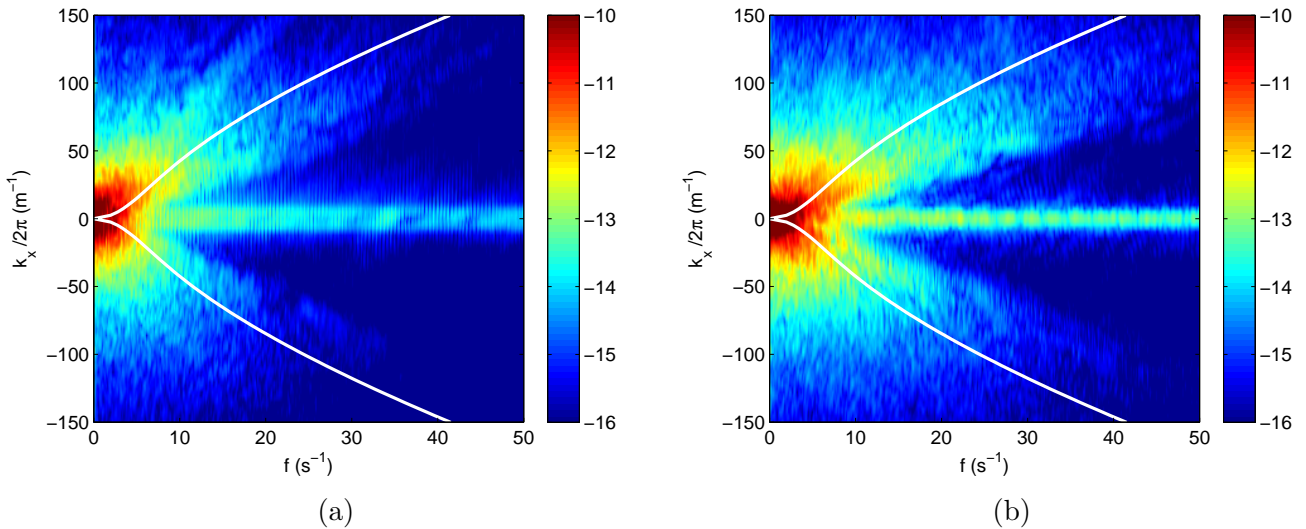


FIGURE 16.5 – Spectre spatiotemporel de la déformation de la surface libre  $\log[S_\eta(k_x, k_y = 0, f)]$  selon  $Ox$  pour (a) un niveau de turbulence modéré  $\Sigma_v = 5.2 \text{ cm.s}^{-1}$  et (b) un niveau de turbulence fort  $\Sigma_v = 9.2 \text{ cm.s}^{-1}$ . Les lignes blanches continues correspondent aux relations de dispersion.

## 16.4 Spectres spatiaux

Une autre manière de sonder la nature des déformations de la surface libre est de calculer les spectres spatiaux, intégrés sur l'ensemble des fréquences  $S_\eta(k) \equiv \int S_\eta(k, \omega) d\omega$ . Ceux-ci, qui rendent compte

de la distribution des longueurs d'onde dans le système, sont représentés pour l'ensemble des forçages étudiés sur la même Fig. 16.6. Ils présentent des formes très proches. Le bruit à haute fréquence augmente avec le forçage, puisque le nombre d'images bruitées augmente. Le maximum des spectres correspond à un nombre d'ondes  $k_{max} \approx 46 \text{ m}^{-1}$ , soit une longueur d'onde  $\lambda_{max} \approx 13.5 \text{ cm}$ , un peu plus grande que l'échelle intégrale de la turbulence  $L \approx 5 \text{ cm}$  (voir section 14.2.2), qui correspond à la taille typique des plus grands tourbillons. Chaque spectre présente par ailleurs une loi de puissance pour les échelles intermédiaires ( $\lambda \in [2; 10] \text{ cm}$ ). Dans cet intervalle de nombres d'ondes, on a ainsi  $S_\eta(k) \propto k^\alpha$ , avec  $\alpha \approx -2.7$  pour l'ensemble des niveaux de turbulence. Une diminution de la pente peut toutefois être observée pour les deux forçages les plus élevés, probablement en raison du bruit sur les images. Il est à noter que dans tous les cas, seules sont bien résolues les ondes de gravité ( $1/\lambda \lesssim 60 \text{ m}^{-1}$ ).

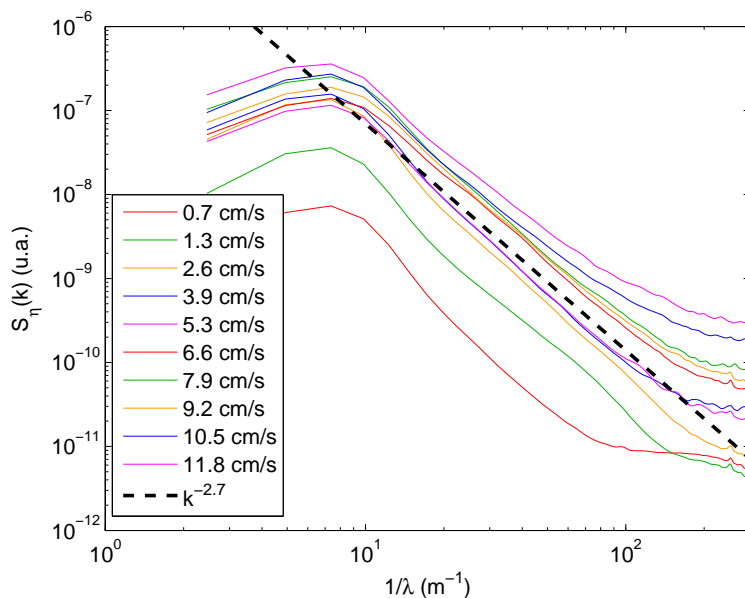


FIGURE 16.6 – Spectres de puissance spatiaux  $S_\eta(k)$  pour différents forçages d'intensité croissante vers le haut. Les valeurs indiquées dans la légende correspondent à  $\Sigma_v$ .

Les spectres des études précédentes ne présentent pas toujours de loi de puissance bien définie et lorsque c'est le cas, les exposants peuvent varier d'une étude à l'autre. Par exemple, Savelsberg et van de Water [87], dont la surface libre est dominée par des ondes gravito-capillaires, trouvent un spectre équivalent à une loi de puissance en  $k^{-7}$ . Une telle pente peut être rapprochée de celles qu'on peut obtenir avec un mélange d'ondes de faibles amplitudes comme celui que nous avons étudié dans l'annexe E.

En revanche, Gutiérrez [123], pour des déformations à la surface d'un écoulement turbulent 2D (où la présence d'ondes n'est pas mise en évidence), obtient des lois de puissance comparables à celles trouvées ici, entre  $k^{-2}$  et  $k^{-3.5}$  selon l'intensité et le type de forçage. Dans le régime gravitaire, les spectres spatiaux obtenus dans les simulations numériques de Guo et Shen [99] sont compatibles avec les lois de puissance que nous trouvons ici, même si leurs lois de puissance sont mal définies.

Une loi de puissance en  $k^{-2.5}$  est prédite théoriquement pour le régime de turbulence d'ondes de gravité (turbulence faible) [153–155]. Pour des ondes générées par résonance à partir des fluctuations turbulentes du vent à la surface de l'eau, Phillips prédit également des lois de puissances entre

2. Comme nous l'avons vu dans la section 16.3, les spectres spatiaux intégrés sur tous les angles s'écrivent  $S_\eta(k) = 2\pi k S_\eta(k_x, k_y)$  où  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ . La comparaison des pentes des spectres spatiaux des différentes études nécessitent donc de prendre en compte cette différence.



$k^{-2.5}$  [156] et  $k^{-3}$  [157], ce qui est compatible avec ce qui est observé et modélisé empiriquement dans les océans [158–160]. Nos données sont donc en accord avec ce type de régime d’ondes.

Toutefois, pour les faibles forçages, nous avons mis en évidence sur les spectres spatiotemporels de la Fig. 16.4 la présence de structures oscillant à basse fréquence, advectées par l’écoulement et qui dominent les ondes de surface. Les spectres spatiaux associés à ces régimes de forçage sont donc susceptibles de refléter ces structures et les lois de puissance observées ne peuvent pas simplement s’expliquer par la présence d’ondes de gravité. Comme le mentionnent Brocchini et Peregrine [117] ainsi que Teixeira et Belcher [120], en l’absence de mécanisme de génération d’ondes résonantes, une partie des déformations de la surface libre peut être une simple réponse passive aux fluctuations turbulentes de pression sous la surface libre. Nous explorons ici cette piste qualitativement. Les fluctuations de la surface libre  $\eta$  peuvent être estimées à partir de la relation hydrostatique qui les relie à l’amplitude des fluctuations de pression dans le liquide  $p$  [120] :  $\eta \approx p/(\rho g)$ . On peut donc s’attendre en première approximation à ce que la structure spatiale du champ de déformations de la surface libre ainsi produit soit similaire à celle du champ de pression sous la surface. Il a été prédit théoriquement et montré expérimentalement que le spectre spatial du champ de pression était de la forme  $S_p(k) \propto k^{-7/3}$  pour des Reynolds suffisamment grand [161]. Cet exposant  $\alpha = -7/3 = -2.33$  est proche de celui de la loi de puissance en  $k^{-2.7}$  de nos spectres spatiaux. Une interprétation selon laquelle les déformations de la surface libre seraient une empreinte des fluctuations de pression sous la surface est donc une piste possible d’explication des spectres spatiaux obtenus.

## 16.5 Spectres temporels

Pour compléter cette analyse spectrale, on trace sur la Fig. 16.7 les spectres temporels des déformations de la surface libre :  $S_\eta(\omega) \equiv \int S_\eta(k, \omega) dk$ . Pour les débits intermédiaires (excluant les deux débits les plus faibles et les deux débits les plus forts), les échelles inertielles peuvent là encore être décrites par une loi de puissance :  $S_\eta(f) \propto f^\beta$ , avec  $\beta \approx -2.5$  pour l’ensemble des forçages. Il est à noter que des spectres temporels similaires ont été retrouvés par une mesure locale avec une sonde capacitive.

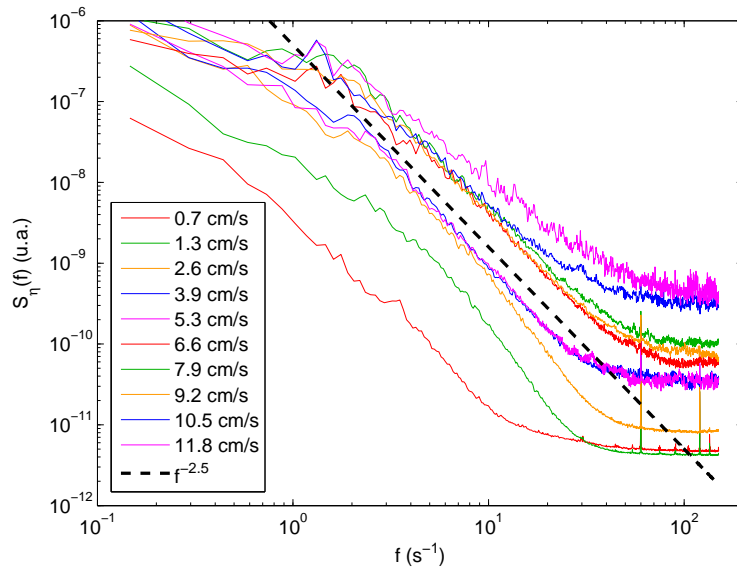


FIGURE 16.7 – Spectres de puissance temporels des déformations de la surface libre  $S_\eta(f)$  pour différents forçages d’intensité croissante (vers le haut). Les valeurs indiquées dans la légende correspondent à  $\Sigma_v$ .

Les spectres de puissance spatiaux et temporels sont reliés par la relation  $S_\eta(f)df = S_\eta(k)dk$ . Si  $S_\eta(k) \propto k^\alpha$  et  $S_\eta(f) \propto f^\beta$ , on a donc :

$$f^\beta \propto k(f)^\alpha \frac{dk}{df} \quad (16.2)$$

où, pour des ondes,  $k(f)$  est défini par la relation de dispersion. Dans le cas d'ondes de gravité sans écoulement, la relation de dispersion s'écrit  $\omega = \sqrt{gk}$ , et on obtient donc :

$$\beta = 2\alpha + 1 \quad (16.3)$$

Par exemple, pour un spectre spatial en  $k^{-2.5}$ , on s'attend donc à ce que les spectres temporels présentent une loi de puissance en  $f^{-4}$ , comme prédit par Phillips [156] ou en turbulence d'ondes [153–155]. On a vu dans le cas de la turbulence hydrodynamique dans la section 14.1.2 que les spectres temporels des vitesses présentaient des lois de puissance identiques à celles des spectres spatiaux dans le régime inertiel. Ce comportement est prédit par le modèle de Tennekes [146] et s'explique par l'advection des petits tourbillons (échelle inertielle) par les grands tourbillons. Le même raisonnement peut ici être appliqué pour expliquer le spectre temporel obtenu. Pour des structures oscillant à basse fréquence et advectées par l'écoulement, on peut ainsi écrire  $\omega \approx kV$ , où  $V$  est la vitesse de l'écoulement, soit  $d\omega/dk \approx V$ . Ceci entraîne alors que  $\beta \approx \alpha$ . De telles structures oscillant à basse fréquence et advectées par l'écoulement ont été mises en évidence pour les faibles forçages sur les spectres spatio-temporels de la Fig. 16.4. Si elles sont présentes pour des forçages plus importants, elles permettent donc d'expliquer que les exposants que nous trouvons pour les lois de puissance des spectres temporels et spatiaux sont proches. Il faut noter que ces structures à basse fréquence peuvent tout à fait être l'empreinte des structures turbulentes de pression sous la surface que nous avons mentionnées précédemment. En effet, nous avons vu que le modèle de Tennekes était valide dans le cas des spectres des fluctuations turbulentes de vitesse au sein du liquide (voir section 14.1.2). Cela montre que l'advection domine pour les structures turbulentes et qu'on a donc  $\omega \approx kV$ . La concordance entre spectres spatiaux et temporels est donc compatible avec l'hypothèse d'une réponse passive de la surface libre aux fluctuations de pression sous la surface.

Mais nous ne pouvons pas exclure la possibilité que les déformations de la surface libre soient dominées par des ondes pour les niveaux de turbulence plus importants. En effet, les spectres spatio-temporels n'ont pas permis de conclure à ce sujet. Dans le cas d'ondes de surface gravito-capillaires, la relation de dispersion en présence d'un écoulement de vitesse  $V$  s'écrit (voir section 15.3) :

$$\omega = \sqrt{gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}} \pm kV \implies \frac{d\omega}{dk} = \frac{g + 3\gamma k^2/\rho}{2\sqrt{gk + \gamma k^3/\rho}} \pm V \quad (16.4)$$

Le premier terme de l'équation de droite est la vitesse de groupe  $c_g$  des ondes gravito-capillaires. On s'attend à ce que les spectres spatiaux et temporels présentent les mêmes lois de puissance si la vitesse de l'écoulement  $V$  est grande devant  $c_g > 17 \text{ cm.s}^{-1}$ . Mais les fluctuations de vitesses de l'écoulement turbulent sous la surface libre  $\sigma_u = \sigma_v$  atteignent tout juste cette vitesse de groupe minimale pour les plus forts débits. Pourtant, la similarité des lois de puissance spatiales et temporelles s'observe sur nos spectres pour la majorité des niveaux de forçage, notamment lorsque  $\Sigma_v = 3.9 \text{ cm.s}^{-1}$  (qui correspond à des fluctuations juste sous la surface libre  $\sigma_v \approx \sigma_u \approx 6 \text{ cm.s}^{-1}$  – voir section 14.1.1). L'advection d'ondes de surface par les courants turbulents ne semble donc pas pouvoir expliquer des lois de puissance similaires pour les spectres temporels et spatiaux.

Au moins pour une grande partie des débits étudiés, la correspondance entre les exposants des

lois de puissance des spectres spatiaux et temporels semble donc être le fait de structures oscillant à plus basse fréquence que les ondes de surface. Cela semble indiquer que les déformations de la surface libre sont dominées par des structures de basses fréquences pour l'ensemble des débits. Nous ne pouvons pas exclure l'hypothèse de la présence d'écoulements moyens susceptibles d'advecier ces ondes à une vitesse suffisante. Par ailleurs, il faut noter que l'énergie est très largement étalée horizontalement sur les spectres spatiotemporels de la Fig. 16.5. Ceci suggère l'existence de grandes vitesses sous la surface libre ou d'une présence non négligeable d'ondes de surface.

## 16.6 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre la nature des déformations de la surface libre induites par la turbulence hydrodynamique pour différents niveaux de turbulence, atteignant des régimes de déformations importants. Nous observons une évolution linéaire de l'amplitude des déformations de la surface libre avec l'amplitude des fluctuations turbulentes de vitesse sous la surface. Les spectres de puissance spatiaux et temporels de déformation sont de plus similaires pour les différents forçages. Ces observations suggèrent que le type de déformation de la surface libre est le même pour l'ensemble de nos mesures. Pour de faibles niveaux de turbulence, nous montrons à partir de spectres spatiotemporels que les déformations de la surface libre sont dominées par des structures non propagatives qui oscillent à basse fréquence temporelle et qui sont advectées par l'écoulement. Nous avons également mis en évidence l'existence d'ondes de surface gravito-capillaires mais qui restent de faibles amplitudes devant ces structures non propagatives. Pour des forçages plus importants, les spectres spatiotemporels ne permettent pas de tirer d'informations claires. Cependant, la concordance entre les exposants des lois de puissance des spectres temporels et spatiaux suggère à nouveau que des structures à basse fréquence advectées par l'écoulement dominant les déformations de la surface libre, y compris pour des niveaux modérés de turbulence. Les résultats obtenus semblent par ailleurs compatibles avec l'hypothèse que ces structures sont une réponse passive de la surface libre aux fluctuations turbulentes de pression sous la surface.

Nos spectres de puissance spatiotemporels peuvent par ailleurs être rapprochés de ceux obtenus par Guo et Shen [99] dans une simulation numérique d'un dispositif proche du nôtre (sans écoulement moyen), siège de faibles niveaux de turbulence. En effet, ils observent également une faible présence d'ondes de surface gravito-capillaires, largement dominées par des structures oscillant à basse fréquence.

Malgré des raideurs atteintes importantes ( $\kappa \approx 0.1$ ), les régimes de déformation de la surface libre étudiés dans notre expérience semblent donc de même nature pour tous les niveaux de turbulence. Les conditions pour un mécanisme de génération d'ondes résonantes prédit par Teixeira et Belcher [120] ne semblent donc pas remplies. Ceci n'est pas surprenant puisque les fluctuations turbulentes de vitesse horizontale restent inférieures à la vitesse de phase minimale des ondes gravito-capillaires  $c_{w,min} = 23 \text{ cm.s}^{-1}$  et notre dispositif ne met pas en jeu de cisaillement important près de la surface libre. Dans ce cas non résonant, les déformations de la surface sont susceptibles d'être une réponse passive aux fluctuations turbulentes de pression sous la surface selon Brocchini et Peregrine [117] et Teixeira et Belcher [120], ce qui est donc cohérent avec nos observations.

Notre dispositif est capable de créer des niveaux de turbulence bien plus importants puisque la puissance de la pompe est loin de son maximum. Comme cela a été mentionné dans le chapitre 12 d'introduction, nous avons pu par exemple observer directement la formation de bulles sous la surface. Toutefois, les fortes déformations atteignent les limites de notre système de mesure dans sa disposition actuelle (profilométrie par transformée de Fourier). Pour les dépasser, il serait nécessaire d'éloigner le vidéoprojecteur de la surface libre. Comme nous sommes actuellement limité par la

hauteur de plafond, un système de miroir devra être envisagé.

Pour les régimes étudiés ici, des mesures complémentaires sont nécessaires. Tout d'abord, des mesures identiques mais de meilleure qualité (durée plus longue, vérification des écoulements moyens, meilleur contraste) pourront permettre des analyses statistiques plus poussées. Elle permettront également d'étudier les plus petites échelles, comme les ondes capillaires qui semblent se former à proximité de remontées d'eau et qu'on aperçoit en visualisation directe, ou des scarifications de la surface qui apparaissent à faible niveau de turbulence (voir chapitre 12). D'autre part, nous pourrions étudier des corrélations avec les vitesses turbulentes par une mesure simultanée du champ de vitesses sous la surface et des déformations de la surface libre.

# Chapitre 17

## Conclusion et perspectives

Durant cette thèse, nous avons mis au point une expérience afin d'étudier les interactions entre turbulence hydrodynamique et surface libre dans une cuve. Pour cela, nous avons conçu un dispositif expérimental de génération de turbulence basé sur un réseau carré de  $8 \times 8$  jets au fond d'une cuve, alimentés par une pompe de gros débit variable. L'ouverture et la fermeture des jets sont contrôlées par 64 électrovannes qui sont allumées et éteintes de façon aléatoire et contrôlée, maintenant 16 jets toujours actifs en même temps.

Nous avons pu caractériser le champ de vitesse sous la surface libre par des mesures PIV. L'écoulement turbulent obtenu est reproductible et présente une bonne homogénéité et une bonne isotropie à distance de la surface libre. Le dispositif permet d'atteindre des régimes de forte turbulence hydrodynamique (jusqu'à un Reynolds turbulent  $Re_T = 5500$ ), pour lesquels l'amplitude des fluctuations turbulentes de vitesse croît linéairement avec le débit des jets (jusqu'à un écart-type  $\Sigma_v \approx 11 \text{ cm.s}^{-1}$ ), tout en conservant une taille caractéristique des tourbillons constante  $L \approx 5 \text{ cm}$ . Le dispositif permet donc une turbulence reproductible dont l'intensité est contrôlable tout en conservant ses propriétés spatiales. Si quelques difficultés techniques subsistent, notamment liées à la fiabilité des électrovannes, ce type de dispositif présente donc des caractéristiques très intéressantes pour notre étude. Nous avons montré qu'à l'approche de la surface libre, la turbulence hydrodynamique présente une redistribution de l'énergie cinétique des fluctuations verticales de vitesse vers les fluctuations horizontales. Ceci est lié aux limitations des mouvements verticaux du fluide imposée par cette interface et conforme aux prédictions théorique et aux études expérimentales et numériques précédentes.

Nous avons ensuite étudié l'effet de la turbulence hydrodynamique sur des ondes de surface planes monochromatiques générées par un batteur. Nous avons décrit leur comportement au moyen de leurs caractéristiques spectrales spatiotemporelles 2D. Il a ainsi été mis en évidence que les fluctuations turbulentes de vitesse au niveau du batteur conduisent à une distribution de longueurs d'onde au sein du système dont la largeur croît avec l'intensité de la turbulence. Nous avons également observé des ondes de surface gravito-capillaires dans toutes les directions en présence de turbulence, qui sont probablement issues de l'advection des ondes planes monochromatiques et de la déstabilisation du front d'ondes par les courants turbulents. Des analyses complémentaires sont toutefois nécessaires.

Enfin, ce sont les déformations de la surface libre directement générées par la turbulence qui ont attiré notre attention car leur nature est peu comprise. Une mesure spatiotemporelle 2D de ces déformations a été réalisée. A faible turbulence, nous avons mis en évidence que la surface libre est dominée par des structures non propagatives qui oscillent à basse fréquence temporelle et qui sont advectées par l'écoulement, même si nous avons relevé également l'existence d'ondes de surface gravito-capillaires. Quand on augmente ensuite le débit des jets, les amplitudes de déformation de la surface libre évoluent linéairement avec l'intensité de la turbulence et les différents régimes semblent

induire des déformations de même nature pour toutes les intensités de forçage. Ceci suggère que les ondes de surfaces ne sont jamais dominantes à la surface libre. Il est probable que les déformations de la surface soient alors l’empreinte des fluctuations turbulentes de pression sous la surface libre. Mais de nouvelles mesures sont nécessaires pour confirmer ces résultats préliminaires et mieux sonder les petites échelles et donc les régimes capillaires. Les scarifications de la surface et les rides que nous avons observées en visualisation directe (voir chapitre 12) pourraient ainsi être analysées. Des intensités de turbulence plus importantes devront par ailleurs être étudiées mais cela demande une adaptation de notre système de mesure de la surface qui atteint ses limites pour les régimes de plus fortes déformations étudiés de cette partie.

Dans le processus de génération de la turbulence, la puissance de la pompe n’a pas été testée à son maximum afin de préserver le dispositif des risques d’une trop forte pression dans cette phase d’exploration, mais aussi parce que l’amplitude des déformations de la surface libre atteignait les limites de notre système de mesures. Comme nous l’avons décrit dans le chapitre 12 d’introduction, nous avons par exemple pu observer la formation de bulles sous la surface en visualisation directe pour les régimes de turbulence les plus intenses présentés ici. Les perspectives de recherche avec ce dispositif sont donc étendues. D’autre part, il sera peut-être possible par la suite de modifier la taille caractéristique des tourbillons en modifiant le nombre de jets allumés simultanément, le diamètre de sortie des jets ou les temps d’ouverture des électrovannes. Enfin, les problématiques explorées ici pourraient tirer parti d’une mesure simultanée de la surface libre et du champ de vitesse.

## Annexe E

# Effet de la turbulence hydrodynamique sur un mélange d'ondes gravito-capillaires

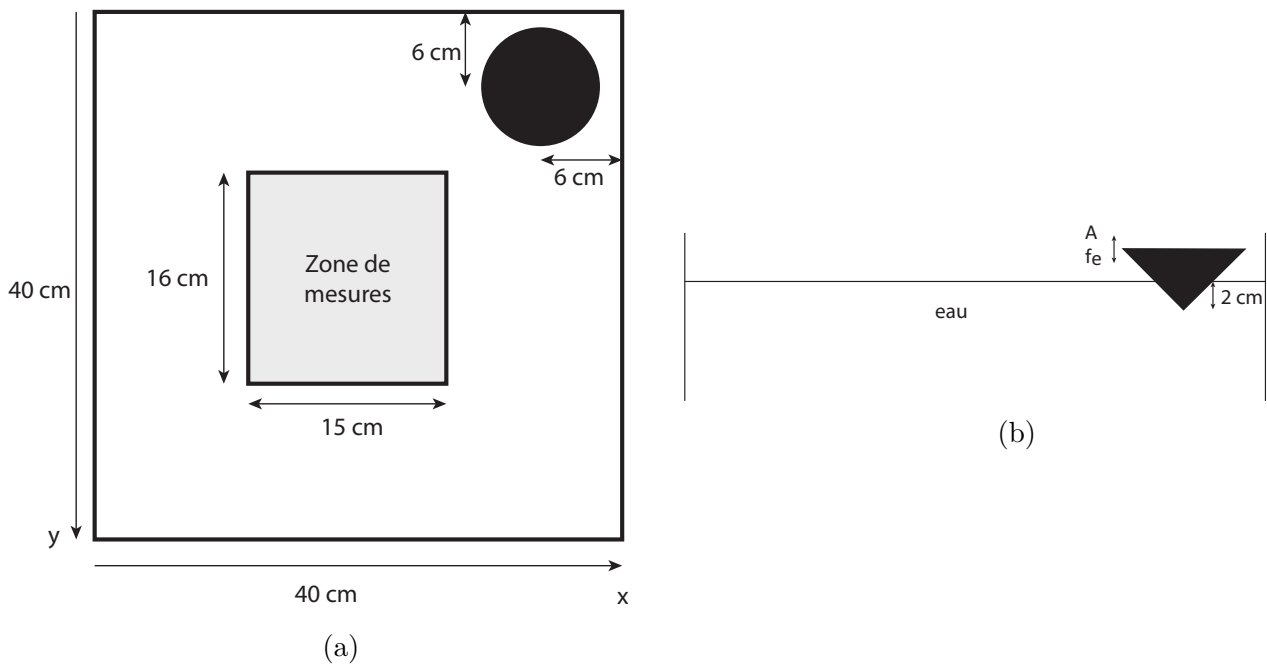


FIGURE E.1 – Schéma du dispositif expérimental pour la génération d'un mélange d'ondes. Un cône est placé dans un coin de la cuve et subit des oscillations verticales. (a) Vue de dessus ; (b) Vue de côté

Au chapitre 15, nous avons étudié le comportement d'ondes de surface planes monochromatiques générées à la surface d'un fluide présentant un écoulement turbulent. Dans le prolongement de cette étude, une perspective d'étude concerne les interactions entre une turbulence hydrodynamique et un mélange d'ondes gravito-capillaires engendré par un cône plongé dans l'eau (voir Fig. E.1). Dans de premières expériences, ce dernier subit des oscillations verticales selon un bruit blanc filtré entre 2 et 6 Hz. L'écart-type des fluctuations de la surface libre en l'absence de turbulence est  $\sigma_\eta = 1.1$  mm, soit une pente moyenne  $\kappa \equiv k_{max}\sigma_\eta = 0.07$ , où  $k_{max} \approx 60 \text{ rad.m}^{-1}$  est le nombre d'ondes correspondant au maximum du spectre spatial de la hauteur des déformations de la surface (voir Fig. E.3). Les caractéristiques spatiotemporelles de la surface libre sont alors étudiées en l'absence de turbulence, puis pour trois niveaux de turbulence avec des fluctuations turbulentes de vitesse d'écart-type jusqu'à

$$\Sigma_v = 5.3 \text{ cm.s}^{-1}.$$

En l'absence de turbulence, le spectre spatiotemporel des déformations de la surface libre (voir Fig. E.2.a) montre la répartition attendue de l'énergie le long de la relation de dispersion des ondes gravito-capillaires (ligne blanche continue). Les croix blanches représentent les maxima détectés sur le spectre. On observe qu'elles viennent également se placer sur une seconde courbe (pointillés blancs) qui est celle représentant la relation de dispersion des ondes liées. Les ondes liées sont des harmoniques (de pulsation  $2\omega$  et de nombre d'ondes  $2k$ ) d'une porteuse qui se propagent à la vitesse de phase de cette porteuse ( $\omega, k$ ) [133]. En présence de turbulence, on observe un élargissement de la relation de dispersion qualitativement conforme à un effet Doppler à l'observation mentionné dans la section 15.3.

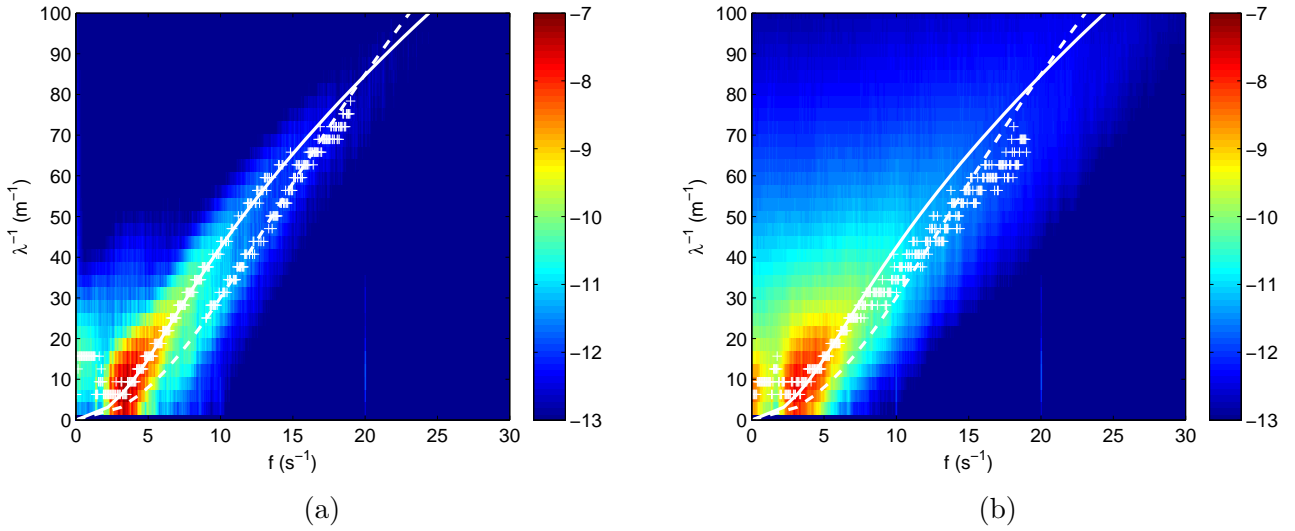


FIGURE E.2 – (a) Spectres de puissance spatiotemporels des déformations de la surface libre  $\log[S_\eta(1/\lambda, f)]$  en l'absence de turbulence hydrodynamique. (b) Spectre de puissance spatiotemporel en présence de turbulence hydrodynamique.  $\Sigma_v = 5.3 \text{ cm.s}^{-1}$ . Dans les deux cas, la ligne blanche continue représente la relation dispersion des ondes gravito-capillaires et les pointillés celle des ondes liées. Les croix blanches représentent les maxima du spectre pour chaque fréquence.

Enfin, on trace sur les Figs E.3.a et b les spectres de puissance respectivement temporels et spatiaux des déformations de la surface libre en l'absence de turbulence (lignes rouges). Les exposants des lois de puissance observées dans le régime d'ondes de gravité ( $f^{-7}$  et  $k^{-6}$ ) sont éloignés des prédictions de la turbulence d'ondes ( $f^{-4}$  et  $k^{-5/2}$  [153–155]) en raison d'une amplitude d'excitation faible. Dans les expériences de turbulence d'ondes que nous avons menées à Nantes, les spectres étaient également plus raides pour les faibles forçages, la loi de puissance en  $f^{-4}$  étant atteinte pour une pente moyenne de l'ordre de 0.17 (voir Figs 3 et 7 dans [1]), contre 0.07 ici. Les spectres temporels et spatiaux sont également tracés en présence de turbulence hydrodynamique d'intensité croissante. Le spectre temporel semble indiquer que la turbulence hydrodynamique a un effet à très basse fréquence ainsi qu'à haute fréquence mais pas sur les fréquences intermédiaires. Le spectre de puissance spatial croît en revanche pour tous les nombres d'onde des échelles inertielles, même si la croissance relative est plus importante pour les plus petits nombres d'onde. Dans le chapitre 16, nous montrons que les déformations induites par la turbulence sont des structures à basse fréquence qui couvrent de nombreuses échelles spatiales. Elles peuvent donc expliquer la croissance du spectre spatial à toutes les échelles ainsi que la croissance des très basses fréquences du spectre temporel. La croissance d'énergie à haute fréquence sur le spectre temporel peut quant à elle s'expliquer par l'advection de l'ensemble des échelles spatiales par les courants turbulents à la surface libre. Les comportements observés méritent bien sûr une analyse plus approfondie.



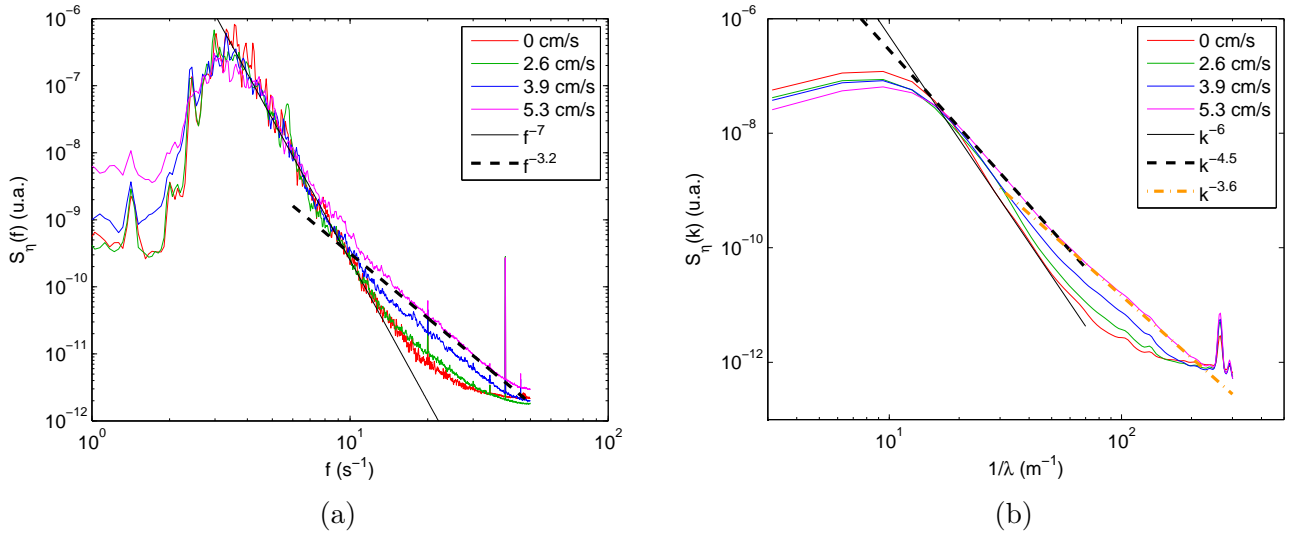


FIGURE E.3 – Spectres de puissance (a) temporels et (b) spatiaux des déformations de la surface libre pour différents niveaux de turbulence hydrodynamique. Les valeurs indiquées dans la légende correspondent aux fluctuations turbulentes de vitesse sous la surface libre  $\Sigma_v$ .



# Conclusion



Trois dispositifs expérimentaux différents ont été étudiés au cours de cette thèse. Ils montrent comment les interactions entre un écoulement hydrodynamique et des ondes de surface sont pilotées par la comparaison entre le temps caractéristique de l'écoulement et la période des ondes de surface, cette dernière dépendant des échelles spatiales et des énergies mises en jeu.

Dans la **première partie**, nous avons étudié la génération d'ondes de gravité à la surface d'un fluide par la déformation d'un fond mobile, liée au cas géophysique des tsunamis. Dans une expérience de laboratoire, nous avons mesuré simultanément la déformation de la surface libre et le champ de vitesses sous la surface. Nous mettons en évidence les différents régimes de déformation dits "rapide", "lent" et "intermédiaire" qui dépendent du rapport entre le temps caractéristique du mouvement du fond (et donc de l'écoulement) et la période d'oscillation de l'onde générée, fixée par la taille de la zone déformée et la profondeur d'eau. Nous montrons qu'une déformation du fond rapide induit un mouvement d'ensemble de la colonne d'eau au-dessus de la zone déformée, équivalent à une gravité nulle. Ainsi, lorsque le temps caractéristique de l'écoulement est faible, le caractère ondulatoire de la déformation de la surface libre n'intervient pas et les mouvements de l'écoulement et de la surface sont alors synchronisés. A la fin de la déformation du fond, le fluide devient immobile avant le début de la propagation de l'onde. Ainsi une séparation des temps caractéristiques de l'écoulement et de l'onde de surface introduit une séparation entre le processus de génération à temps courts et celui de propagation de l'onde de surface à temps longs. Dans le cas lent, la surface libre est faiblement déformée et la gravité peut être considérée comme infinie. La surface libre quasi-immobile impose alors au champ de vitesse une structure spatiale équivalente à celle qu'on obtient pour un jet face à une paroi solide. Les vitesses verticales de la déformation du fond sont redistribuées horizontalement à l'approche de la surface libre. Nous avons proposé une nouvelle approche théorique pour ces deux cas asymptotiques lent et rapide. Enfin, dans le régime intermédiaire, pour lequel les temps caractéristiques de l'écoulement et de l'onde de surface sont proches, on observe la coexistence de l'écoulement généré par le fond et celui lié à la propagation de l'onde.

Dans le cas d'un forçage périodique, un accord entre la fréquence des fluctuations de l'écoulement et celle de l'onde de surface peut produire des résonances. C'est le cas du phénomène étudié dans la **deuxième partie**. Nous nous sommes intéressés aux déformations d'une goutte liquide de ferrofluide, déposée sur un substrat superhydrophobe soumis à une vibration verticale en l'absence ou en présence d'un champ magnétique constant. Le ferrofluide est sensible au champ magnétique et son énergie magnétique dépend de la forme de la goutte. Le volume de la goutte est choisi suffisamment grand pour qu'elle soit aplatie par la gravité et adopte une forme quasi-cylindrique. La vibration verticale impose la fréquence des fluctuations de l'écoulement à l'intérieur de la goutte. Nous avons alors vu que la goutte présente des résonances de deux types, chacune apparaissant pour certaines fréquences. D'une part, des modes axisymétriques sont observés pour des mouvements du substrat de faibles amplitudes. Nous montrons qu'il s'agit de résonances linéaires liées à des ondes circulaires stationnaires gravito-capillaires présentes sur la surface supérieure de la goutte et qui provoquent des fluctuations du rayon. Pour de plus fortes amplitudes de vibration du substrat, des modes azimutaux apparaissent sous forme de lobes à la périphérie de la goutte. Il s'agit d'ondes stationnaires capillaires radiales issues d'une instabilité paramétrique et oscillant à la fréquence moitié de la fréquence de forçage. Dans les deux cas, les conditions aux limites et donc la géométrie de la goutte fixent les longueurs d'ondes discrètes des modes propres, définissant des fréquences propres. Pour les modes axisymétriques linéaires, les résonances ont lieu lorsque la fréquence d'excitation de la goutte est égale à une fréquence propre. Pour les modes azimutaux, c'est lorsque la fréquence d'excitation est égale au double de la fréquence propre (résonance paramétrique). Ainsi, nous observons des résonances lorsqu'il y a une concordance entre la fréquence des fluctuations de l'écoulement et une fréquence propre des ondes stationnaires. Avec un ferrofluide, nous montrons qu'il est possible de

modifier les fréquences propres de la goutte grâce au champ magnétique. En effet, si les ondes de surface gravito-capillaires sont le résultat d'un échange entre énergie cinétique énergie potentielle gravitationnelle et énergie capillaire, il est ici nécessaire d'inclure l'énergie magnétique. Dans le cas des modes azimutaux à la périphérie de la goutte, nous montrons par un modèle simple que l'effet du champ magnétique est équivalent à celui d'une tension de surface négative. Ce modèle est en très bon accord avec les fréquences propres mesurées expérimentalement.

Enfin, dans la **troisième partie**, nous avons observé les interactions entre la surface libre et une turbulence hydrodynamique générée par des jets sous la surface, qui met cette fois en jeu de nombreuses échelles spatiales et temporelles. Nous avons dans un premier temps étudié la modification de la turbulence hydrodynamique par la présence de la surface libre. Comme cela a été vu dans des études antérieures, nous observons à l'approche de la surface libre que les fluctuations turbulentes de vitesses verticales diminuent quand celles horizontales augmentent. Nous pouvons ici mettre ce résultat en relation avec ceux de la génération d'ondes de surface par un fond mobile étudié en première partie. En effet, cette redistribution de l'énergie cinétique verticale en énergie cinétique horizontale à l'approche de la surface libre est également trouvée dans le cas de déformations du fond lentes par rapport aux ondes de surface. Dans le cas de la turbulence, la fréquence des fluctuations turbulentes de vitesse semble donc faible devant la fréquence des oscillations ondulatoires de la surface. Nous retrouvons ce résultat par l'étude des déformations de la surface libre induites par la turbulence hydrodynamique. En effet, nous avons mis en évidence que les déformations de la surface libre sont dominées par la présence de structures oscillant à une fréquence faible devant celle des ondes de même échelle spatiale. Ces structures semblent être l'empreinte des fluctuations turbulentes de pression sous la surface libre.

Ces trois expériences apportent donc des éclairages complémentaires sur les interactions entre écoulements hydrodynamiques et surface libre. Elles mettent en avant le rôle joué par les caractéristiques temporelles des fluctuations de vitesse et de déformation de la surface libre. Les échelles spatiales ne peuvent bien sûr pas être négligées, d'abord car elles sont directement reliées aux échelles temporelles. C'est en particulier le cas pour les ondes surface via la relation de dispersion, mais aussi pour la turbulence dont les fluctuations temporelles résultent avant tout de l'advection des structures spatiales de l'écoulement. Nous avons également vu, dans la première partie sur la génération d'ondes de surface par un fond mobile, que le rapport entre profondeur d'eau et taille de la zone déformée avait son importance dans le rôle de filtre passe-bas que joue la colonne d'eau. Pour la goutte, les longueurs d'onde et donc les fréquences de résonance sont fixées par les conditions aux limites imposées par la géométrie de la goutte. Enfin, ce sont les échelles spatiales de la turbulence hydrodynamique qu'on retrouve à la surface libre lorsqu'on s'intéresse aux déformations induites par la turbulence. Un travail en cours sur les interactions entre un mélange d'ondes gravito-capillaires et la turbulence hydrodynamique a été abordé et reste à compléter car les échanges d'énergie entre les deux systèmes méritent une analyse approfondie. Ce projet permettrait peut-être de passer continûment d'un régime d'ondes, caractérisé par une relation de dispersion, à un régime d'advection des déformations de la surface libre.

# Bibliographie

- [1] L. Deike, B. Miquel, P. Gutiérrez-Matus, T. Jamin, B. Semin, M. Berhanu, E. Falcon, et F. Bonnefoy. Role of the basin boundary conditions in gravity wave turbulence. *J. Fluid Mech.*, 781 :196—225, 2015.
- [2] S. Merminod, T. Jamin, E. Falcon, et M. Berhanu. Transition to a labyrinthine phase in a driven granular medium. *Phys. Rev. E*, 92(6) :062205, 2015.
- [3] K. Kajiura. The leading wave of a tsunami. *Bull. Earthquake Res. Inst.*, 41 :535–571, 1963.
- [4] J. L. Hammack. *Tsunamis - A model of their generation and propagation*. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1972.
- [5] J. L. Hammack. A note on tsunamis : their generation and propagation in an ocean of uniform depth. *J. Fluid Mech.*, 60 :769–799, 1973.
- [6] D. Dutykh, F. Dias, et Y. Kervella. Linear theory of wave generation by a moving bottom. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 343(7) :499–504, 2006.
- [7] Y. Kervella, D. Dutykh, et F. Dias. Comparison between three-dimensional linear and nonlinear tsunami generation models. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 21(4) :245–269, 2007.
- [8] K. Kajiura. The directivity of energy radiation of the tsunami generated in the vicinity of a continental shelf. *J. Oceanogr. Soc. Japan*, 28(6) :260–277, 1972.
- [9] T. S. Stefanakis, F. Dias, et C. Synolakis. Tsunami generation above a sill. *Pure Appl. Geophys.*, 172(3-4) :985–1002, 2015.
- [10] D. Dutykh et F. Dias. Water waves generated by a moving bottom. In *Tsunami and Nonlinear waves*, pages 65–95. Springer, 2007.
- [11] D. Dutykh et F. Dias. Energy of tsunami waves generated by bottom motion. *Proc. R. Soc. A*, 465(2103) :725–744, 2009.
- [12] P. A. Tyvand et A. R. F. Storhaug. Green functions for impulsive free-surface flows due to bottom deflections in two-dimensional topographies. *Phys. Fluids*, 12(11) :2819–2833, 2000.
- [13] R. L. Wiegel. Laboratory studies of gravity waves generated by the movement of a submerged body. *Trans. Am. Geophys. Union*, 36(5) :759–774, 1955.
- [14] R. Takahasi et T. Hatori. A model experiment on the tsunami generation from a bottom deformation area of elliptic shape. *Bull. Earthquake Res. Inst.*, 40 :873–883, 1962.
- [15] F. Enet et S. T. Grilli. Experimental study of tsunami generation by three-dimensional rigid underwater landslides. *J. Waterway Port Coastal Ocean Eng.*, 133(6) :442–454, 2007.

- [16] S. Viroulet, A. Sauret, et O. Kimmoun. Tsunami generated by a granular collapse down a rough inclined plane. *Europhys. Lett.*, 105(3) :34004, 2014.
- [17] H. M. Fritz, W. H. Hager, et H.-E. Minor. Landslide generated impulse waves. 1. instantaneous flow fields. *Exp. Fluids*, 35(6) :505–519, 2003.
- [18] H. M. Fritz, W. H. Hager, et H.-E. Minor. Landslide generated impulse waves. 2. hydrodynamic impact craters. *Exp. Fluids*, 35(6) :520–532, 2003.
- [19] T. Jamin, L. Gordillo, G. Ruiz-Chavarría, M. Berhanu, et E. Falcon. Experiments on generation of surface waves by an underwater moving bottom. *Proc. R. Soc. A*, 471(2178) :20150069, 2015.
- [20] *Technical Review To Advances Techniques in Acoustical, Electrical and Mechanical Measurement - Dual Channel FFT Analysis*. Brüel & Kjaer, Nærum, Denmark, 1984.
- [21] L. Gordillo. *Non-Propagating Hydrodynamic Solitons in a Quasi-One-Dimensional Free Surface Subject to Vertical Vibrations*. PhD thesis, Universidad de Chile, Santiago, Chili, 2012.
- [22] J. Westerweel, D. Dabiri, et M. Gharib. The effect of a discrete window offset on the accuracy of cross-correlation analysis of digital piv recordings. *Exp. Fluids*, 23 :20–28, 1997.
- [23] L. J. D. Kervenoael. *Validation des mesures par vélocimétrie par image de particules dans une conduite de section rectangulaire*. PhD thesis, Université de Laval, Laval, Québec, Canada, 2009.
- [24] C. D. Meinhart, S. T. Wereley, et J. G. Santiago. A piv algorithm for estimating time-averaged velocity fields. *J. Fluids Eng.*, 122 :285–289, 2000.
- [25] A. Sanchis et A. Jensen. Dynamic masking of piv images using the radon transform in free surface flows. *Exp. Fluids*, 51 :871–880, 2011.
- [26] L. Yu, M. Huang, M. Chen, W. Huang, et Z. Zhu. Quasi-discrete hankel transform. *Opt. Lett.*, 23 :409–411, 1998.
- [27] M. Guizar-Sicairos et J. C. Gutiérrez-Vega. Computation of quasi-discrete hankel transforms of integer order for propagating optical wave fields. *JOSA A*, 21 :53–58, 2004.
- [28] R. H. Durisen, R. A. Gingold, J. E. Tohline, et A. P. Boss. Dynamic fission instabilities in rapidly rotating  $n = 3/2$  polytropes - a comparison of results from finite-difference and smoothed particle hydrodynamics codes. *Astrophys. J.*, 305 :281–308, 1986.
- [29] A. A. Amsden, G. F. Bertsch, F. H. Harlow, et J. R. Nix. Relativistic hydrodynamic theory of heavy-ion collisions. *Phys. Rev. Lett.*, 35 :905, 1975.
- [30] J. A. Zingman, T. L. McAbee, J. R. Wilson, et C. T. Alonso. Collective sow and pion production in a hydrodynamic model. *Phys. Rev. C*, 38 :760, 1988.
- [31] C. P. Brangwynne, T. J. Mitchison, et A. A. Hyman. Active liquid-like behavior of nucleoli determines their size and shape in xenopus laevis oocytes. *PNAS*, 108(11) :4334–4339, 2011.
- [32] M. Papoular et C. Parayre. Gas-film levitated liquids : Shape fluctuations of viscous drops. *Phys. Rev. Lett.*, 788 :2120–2123, 1997.



- [33] M. E. Fraser, W.-K. Lu, A. E. Hamielec, et R. Murarka. Surface tension measurements on pure liquid iron and nickel by an oscillating drop technique. *Metall. Trans.*, 2 :817, 1971.
- [34] M. Przyborowski, T. Hibiya, M. Eguchi, et I. Egry. Surface tension measurement of molten silicon by the oscillating drop method using electromagnetic levitation. *J. Cryst. Growth*, 151 :60–65, 1995.
- [35] J. M. Oh, D. Legendre, et F. Mugele. Shaken not stirred – on internal flow patterns in oscillating sessile drops. *EPL*, 98 :34003, 2012.
- [36] L. Rayleigh. On the Capillary Phenomena of Jets. *Proc. R. Soc. London*, 29 :71–97, 1879.
- [37] N. Yoshiyasu, K. Matsuda, et R. Takaki. Self-induced vibration of a water drop placed on an oscillating plate. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 65(7) :2068–2071, 1996.
- [38] M. Okada et M. Okada. Observation of the shape of a water drop on an oscillating Teflon plate. *Exp. Fluids*, 41(5) :789–802, 2006.
- [39] X. Noblin, A. Buguin, et F. Brochard-Wyart. Vibrations of sessile drops. *Eur. Phys. J. – Spec. Top.*, 166(1) :7–10, 2009.
- [40] P. Brunet et J. H. Snoeijer. Star-drops formed by periodic excitation and on an air cushion – A short review. *Eur. Phys. J. – Spec. Top.*, 192(1) :207–226, 2011.
- [41] S. Dorbolo, D. Terwagne, N. Vandewalle, et T. Gilet. Resonant and rolling droplet. *New J. Phys.*, 10 :113021, 2008.
- [42] R. E. Apfel, Y. Tian, J. Jankovsky, T. Shi, X. Chen, R. G. Holt, E. Trinh, A. Croonquist, K. C. Thornton, J. Albert Sacco, C. Coleman, F. W. Leslie, et D. H. Matthiesen. Free oscillations and surfactant studies of superdeformed drops in microgravity. *Phys. Rev. Lett.*, 78(10) :1912–1915, 1997.
- [43] C. L. Shen, W. J. Xie, et B. Wei. Parametrically excited sectorial oscillation of liquid drops floating in ultrasound. *Phys. Rev. E*, 81(4) :046305, 2010.
- [44] W. Bouwhuis, K. G. Winkels, I. R. Peters, P. Brunet, D. van der Meer, et J. H. Snoeijer. Oscillating and star-shaped drops levitated by an airflow. *Phys. Rev. E*, 88(2) :023017, 2013.
- [45] N. J. Holter et W. R. Glasscock. Vibrations of evaporating liquid drops. *J Acoust. Soc. Am.*, 24 :682, 1952.
- [46] A. Snezhko, E. B. Jacob, et I. S. Aranson. Pulsating–gliding transition in the dynamics of levitating liquid nitrogen droplets. *New J. Phys.*, 10 :043034, 2008.
- [47] K. Piroird, B. D. Texier, C. Clanet, et D. Quéré. Reshaping and capturing Leidenfrost drops with a magnet. *Phys. Fluids*, 25(3) :032108, 2013.
- [48] Y. Fautrelle, J. Etay, et S. Daugan. Free-surface horizontal waves generated by low-frequency alternating magnetic fields. *J. Fluid Mech.*, 527 :285–301, 2005.
- [49] V. Kocourek, C. Karcher, M. Conrath, et D. Schulze. Stability of liquid metal drops affected by a high-frequency magnetic field. *Phys. Rev. E*, 74 :026303, 2006.
- [50] R. E. Rosensweig. *Ferrohydrodynamics*. Dover, New York, 1997.

- [51] E. Blums, A. Cebers, et M. M. Maiorov. *Magnetic Fluids*. W. de Gruyter, Berlin, 1997.
- [52] E. Bormashenko, R. Pogreb, Y. Bormashenko, A. Musin, et T. Stein. New investigations on ferrofluidics : Ferrofluidic marbles and magnetic-field-driven drops on superhydrophobic surfaces. *Langmuir*, 24 :12119–12122, 2008.
- [53] V. Sterr, R. Krauß, K. I. Morozov, I. Rehberg, A. Engel, et R. Richter. Rolling ferrofluid drop on the surface of a liquid. *New J. Phys.*, 10 :063029, 2008.
- [54] N.-T. Nguyen, G. Zhu, Y.-C. Chua, V.-N. Phan, et S.-H. Tan. Magnetowetting and sliding motion of a sessile ferrofluid droplet in the presence of a permanent magnet. *Langmuir*, 26 :12553–12559, 2010.
- [55] J. V. I. Timonen, M. Latikka, L. Leibler, R. H. A. Ras, et O. Ikkala. Switchable static and dynamic self-assembly of magnetic droplets on superhydrophobic surfaces. *Science*, 341 :253, 2013.
- [56] T. Jamin, C. Py, et E. Falcon. Instability of the origami of a ferrofluid drop in a magnetic field. *Phys. Rev. Lett.*, 107 :204503, 2011.
- [57] E. Mathieu. Mémoire sur le mouvement vibratoire d’une membrane de forme elliptique. *J. Math. Pures Appl.*, 1 :137–203, 1868.
- [58] T. Insperger et G. Stépán. Stability of the damped mathieu equation with time delay. *J. Dyn. Sys., Meas., Control*, 125 :166–171, 2003.
- [59] M. Strani et F. Sabetta. Free vibrations of a drop in partial contact with a solid support. *J. Fluid Mech.*, 141 :233–247, 1984.
- [60] D. V. Lyubimov, T. P. Lyubimova, et S. V. Shklyaev. Behavior of a drop on an oscillating solid plate. *Phys. Fluids*, 18 :012101, 2006.
- [61] X. Noblin, A. Buguin, et F. Brochard-Wyart. Vibrated sessile drops : Transition between pinned and mobile contact line oscillations. *Eur. Phys. J. E*, 14(4) :395–404, 2004.
- [62] H. Lamb. *Hydrodynamics*. Dover, New York, 6th edition, 1932.
- [63] X. Noblin. *Mouillage et Démouillage Inertiels : Triplons, Flaques vibrées, Ondes de chocs*. PhD thesis, Université Paris 6, France, 2004.
- [64] J. Browaeys. *Les ferrofluides : ondes de surface, résistance de vague et simulation de la convection dans le manteau terrestre*. PhD thesis, Université Paris-Diderot, 2000.
- [65] C. G. Garton et Z. Krasucki. Bubbles in insulating liquids : Stability in an electric field. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 280(1381), 1964.
- [66] J.-C. Bacri et D. Salin. Instability of ferrofluid magnetic drops under magnetic field. *J. Phys. Lett.*, 43, 1982.
- [67] J. D. Stratton. *Electromagnetic theory*. McGraw-Hill Companies, New York, 1941.
- [68] R. E. Zelaco et J. R. Melcher. Dynamics and stability of ferrofluids : surface interactions. *J. Fluid Mech.*, 39 :1, 1969.
- [69] J. Browaeys, J.-C. Bacri, C. Flament, S. Neveu, et R. Perzynski. Surface waves in ferrofluids under vertical magnetic field. *Eur. Phys. J. B.*, 9 :335, 1999.

- [70] F. Boyer et E. Falcon. Wave turbulence on the surface of a ferrofluid in a magnetic field. *Phys. Rev. Lett.*, 101 :244502, 2008.
- [71] S. Dorbolo et E. Falcon. Wave turbulence on the surface of a ferrofluid in a horizontal magnetic field. *Phys. Rev. E*, 83 :046303, 2011.
- [72] B. Abou, G. Néron de Surgy, et J. E. Wesfreid. *J. Phys. II*, 7 :1159, 1997.
- [73] F. Celestini et R. Kofman. Vibration of submillimeter-size supported droplets. *Phys. Rev. E*, 73 :041602, 2006.
- [74] C.-T. Chang, J. B. Bostwick, P. H. Steen, et S. Daniel. Substrate constraint modifies the rayleigh spectrum of vibrating sessile drops. *Phys. Rev. E*, 88 :023015, 2013.
- [75] I. A. Larmour, S. E. J. Bell, et G. C. Saunders. Remarkably simple fabrication of superhydrophobic surfaces using electroless galvanic deposition. *Angew. Chem. Int. Ed.*, 46 :1710–1712, 2007.
- [76] Ultra Ever Dry<sup>®</sup> spray - See <http://ultraeverdry-tap.com/index.html>.
- [77] A. Technica. The internet-demanded, partially scientific testing of ultra-ever dry (in hd!) - <http://arstechnica.com/gadgets/2013/03/the-internet-demanded-partially-scientific-testing-of-ultraeverdry-in-hd/3/>, 2013.
- [78] P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, et D. Quéré. *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Belin, 2005.
- [79] T. Jamin, Y. Djama, J.-C. Bacri, et E. Falcon. Tuning the resonant frequencies of a drop by a magnetic field. *Phys. Rev. Fluids*, 1(2) :021901, 2016.
- [80] A. Aharoni. Demagnetizing factors for rectangular ferromagnetic prisms. *J. Appl. Phys.*, 83 :3432, 1998.
- [81] A. S. Arrott, B. Heinrich, T. L. Templeton, et A. Aharoni. Micromagnetics of curling configurations in magnetically soft cylinders. *J. Appl. Phys.*, 50 :2387, 1979.
- [82] E. Blums, A. Cebers, et M. M. Maiorov. *Magnetic Fluids*. Walter de Gruyter - Berlin - New York, 1997.
- [83] A. O. Tsebers. Virial method of investigation of statics and dynamics of drops of magnetizable liquids. *Magnetohydrodynamics*, 21(1), 1985.
- [84] J.-C. Bacri et D. Salin. Dynamics of the shape transition of a magnetic ferrofluid drop. *J. Phys. Lett.*, 44, 1983.
- [85] V. I. Arkhipenko, Y. D. Barkov, et V. G. Bashtovoi. Shape of a drop of magnetized fluid in a homogeneous magnetic field. *Magnitnaia Gidrodinamika*, 14 :131–134, 1979.
- [86] S. Nazarenko. *Wave turbulence*, volume 825. Springer Science & Business Media, 2011.
- [87] R. Savelsberg et W. van de Water. Experiments on free-surface turbulence. *J. Fluid Mech.*, 619 :95–125, 2009.
- [88] J. C. R. Hunt et J. M. R. Graham. Free-stream turbulence near plane boundaries. *J. Fluid Mech.*, 84 :209–235, 1978.

- [89] J. Hunt. *Turbulence Structure and Turbulent Diffusion Near Gas-Liquid Interfaces*, volume 2 of *Water Science and Technology Library*. Springer Netherlands, 1984.
- [90] M. A. C. Teixeira et S. E. Belcher. Dissipation of shear-free turbulence near boundaries. *J. Fluid Mech.*, 422 :167–191, 2000.
- [91] J. Magnaudet. High-Reynolds-number turbulence in a shear-free boundary layer : revisiting the HuntGraham theory. *J. Fluid Mech.*, 484 :S0022112003004245, 2003.
- [92] R. A. Handler, T. F. Swear, R. I. Leighton, et J. D. Swearingen. Length scales and the energy balance for turbulence near a free surface. *AIAA J.*, 31(11) :1998–2007, 1993.
- [93] Y. Pan et S. Banerjee. A numerical study of free-surface turbulence in channel flow. *Phys. Fluids*, 7(7) :1649–1664, 1995.
- [94] B. Perot et P. Moin. Shear-free turbulent boundary layers. part 1. physical insights into near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, 295 :199–227, 1995.
- [95] D. T. Walker, R. I. Leighton, et L. O. Garza-Rios. Shear-free turbulence near a flat free surface. *J. Fluid Mech.*, 320 :19–51, 1996.
- [96] R. Nagaosa. Direct numerical simulation of vortex structures and turbulent scalar transfer across a free surface in a fully developed turbulence. *Phys. Fluids*, 11(6) :1581–1595, 1999.
- [97] R. Nagaosa et R. A. Handler. Statistical analysis of coherent vortices near a free surface in a fully developed turbulence. *Phys. Fluids*, 15(2) :375–394, 2003.
- [98] I. Calmet et J. Maganaudet. Statistical structure of high-reynolds-number turbulence close to the free surface of an open-channel flow. *J. Fluid Mech.*, 474 :355–378, 2003.
- [99] C. Guo et L. Shen. Interaction of a deformable free surface with statistically steady homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, 658 :33–62, 2010.
- [100] S. Loewen, B. Ahlborn, et A. B. Filuk. Statistics of surface flow structures on decaying grid turbulence. *Phys. Fluids*, 29(8) :2388–2397, 1986.
- [101] M. Rashidi et S. Banerjee. Turbulence structure in free-surface channel flows. *Phys. Fluids*, 31(9) :2491–2503, 1988.
- [102] S. Kumar, R. Gupta, et S. Banerjee. An experimental investigation of the characteristics of free-surface turbulence in channel flow. *Phys. Fluids*, 10(2) :437–456, 1998.
- [103] B. H. Brumley et G. H. Jirka. Near-surface turbulence in a grid-stirred tank. *J. Fluid Mech.*, 183 :235–263, 1987.
- [104] E. A. Variano et E. A. Cowen. A random-jet-stirred turbulence tank. *J. Fluid Mech.*, 604 :1, 2008.
- [105] O. M. Phillips. The scattering of gravity waves by turbulence. *J. Fluid Mech.*, 5(02) :177–192, 1959.
- [106] A. L. Fabrikant et M. A. Raevsky. The influence of drift flow turbulence on surface gravity wave propagation. *J. Fluid Mech.*, 262 :141–156, 1994.
- [107] M. A. C. Teixeira et S. E. Belcher. On the distortion of turbulence by a progressive surface wave. *J. Fluid Mech.*, 458 :229–267, 2002.

- [108] T. Green, H. Medwin, et J. E. Paquin. Measurements of surface wave decay due to underwater turbulence. *Natural Physical Science*, 237 :115–117, 1972.
- [109] S. I. Badulin, S. I. Voropayev, A. V. Kulikov, et A. D. Rozenberg. Effect of turbulence on low-amplitude regular gravity waves. *Oceanology*, 28(4) :429–436, 1988.
- [110] H. S. Ölmöz et J. H. Milgram. An experimental study of attenuation of short water waves by turbulence. *J. Fluid Mech.*, 239 :133–156, 1992.
- [111] P. Gutiérrez et S. Aumaître. Surface waves propagation on a turbulent flow forced electromagnetically, publié sur arXiv. 2015.
- [112] C. Falcón et S. Fauve. Wave-vortex interaction. *Phys. Rev. E*, 80(5) :056213, 2009.
- [113] S. A. Ermakov, I. A. Kapustin, et O. V. Shomina. Laboratory investigation of damping of gravity-capillary waves on the surface of turbulized liquid. *Izv. Atmos. Ocean. Phys.*, 50(2) :204–212, 2014.
- [114] F. Vivanco et F. Melo. Experimental study of surface waves scattering by a single vortex and a vortex dipole. *Phys. Rev. E*, 69(2) :026307, 2004.
- [115] C. Coste, F. Lund, et M. Umeki. Scattering of dislocated wave fronts by vertical vorticity and the aharonov-bohm effect. i. shallow water. *Phys. Rev. E*, 60(4) :4908, 1999.
- [116] C. Coste et F. Lund. Scattering of dislocated wave fronts by vertical vorticity and the aharonov-bohm effect. ii. dispersive waves. *Phys. Rev. E*, 60(4) :4917, 1999.
- [117] M. Brocchini et D. H. Peregrine. The dynamics of strong turbulence at free surfaces. part 1. description. *J. Fluid Mech.*, 449 :225–254, 2001.
- [118] O. M. Phillips. On the generation of waves by turbulent wind. *J. Fluid Mech.*, 2 :417–445, 1957.
- [119] O. M. Phillips. *The Dynamics of the Upper Ocean*. Cambridge University Press, 2ème édition, Etats-Unis, 1977.
- [120] M. A. C. Teixeira et S. E. Belcher. On the initiation of surface waves by turbulent shear flow. *Dyn. Atmos. Oceans*, 41 :1–27, 2006.
- [121] S. Smolentsev et R. Miraghaie. Study of a free surface in open-channel water flows in the regime from “weak” to “strong” turbulence. *Intl J. Multiphase flow*, 31 :921–939, 2005.
- [122] L. Chiapponi, S. Longo, et M. Tonelli. Experimental study on oscillating grid turbulence and free surface fluctuation. *Exp. Fluids*, 53(5) :1515–1531, 2012.
- [123] P. Gutiérrez. *Effet induit en surface par un écoulement turbulent*. PhD thesis, CEA Saclay, France, 2013.
- [124] K. V. Horoshenkov, A. Nichols, S. J. Tait, et G. A. Maximov. The pattern of surface waves in a shallow free surface flow. *J. Geophys. Res. Earth Surf.*, 118(3) :1864–1876, 2013.
- [125] S. Douady, Y. Couder, et M. E. Brachet. Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 67(8) :983, 1991.
- [126] S. Fauve, C. Laroche, et B. Castaing. Pressure fluctuations in swirling turbulent flows. *J. Phys. II*, 3(3) :271–278, 1993.

- [127] S. M. Thompson et J. S. Turner. Mixing across an interface due to turbulence generated by an oscillating grid. *J. Fluid Mech.*, 67(02) :349–368, 1975.
- [128] S. P. McKenna. *Free-surface turbulence and air-water gas exchange*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Etats-Unis, 2000.
- [129] K. J. Aström et T. Hägglund. *PID Controllers : Theory, Design and Tuning, 2nd edition*. Instrument Society of America, Research Triangle Park, Norh Carolina, USA, 1995.
- [130] F. Mudry. *Ajustage des paramètres d'un régulateur PID - Note d'application*. Institut d'Automatisation Industrielle, Yverdon-les-Bains, Suisse, 2002.
- [131] A. Maurel, P. Cobelli, V. Pagneux, et P. Petitjeans. Experimental and theoretical inspection of the phase-to-height relation in fourier transform profilometry. *Appl. Opt.*, 48 :380–392, 2009.
- [132] P. Cobelli, A. Maurel, V. Pagneux, et P. Petitjeans. Global measurement of water waves by fourier transtorm profilometry. *Exp. Fluids*, 46 :1037–1047, 2009.
- [133] E. Herbert, N. Mordant, et E. Falcon. Observation of the nonlinear dispersion relation and spatial statistics of wave turbulence on the surface of a fluid. *Phys. Rev. Lett.*, 105 :144502, 2010.
- [134] L. Deike, J.-C. Bacri, et E. Falcon. Non linear waves on the surface of a fluid covered by an elastic sheet. *J. Fluid Mech.*, 733 :394–413, 2013.
- [135] A. Przadka, B. Cabane, V. Pagneux, A. Maurel, et P. Petitjeans. Fourier transform profilometry for water waves : how to achieve clean water attenuation with diffusive reflection at the water surface? *Exp. Fluids*, 52 :519–527, 2012.
- [136] F. Ravelet. *Bifurcations globales hydrodynamiques et magnetohydrodynamiques dans un ecoulement de von Karman turbulent*. PhD thesis, CEA Saclay, France, 2005.
- [137] S. P. McKenna et W. R. McGillis. The role of free-surface turbulence and surfactants in air–water gas transfer. *Intl J. Heat Mass Transfer*, 47 :539–553, 2004.
- [138] L. Shen, D. K. P. Yue, et G. Triantafyllou. Effect of surfactants on free-surface turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, 506 :79–115, 2004.
- [139] A. Benusiglio. *Indiscrétions aux interfaces*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, Paris, France, 2013.
- [140] W. G. Van Dorn. Boundary dissipation of oscillatory waves. *J. Fluid Mech.*, 24(04) :769–779, 1966.
- [141] J. W. Miles. Surface-wave damping in closed basins. *Proc. R. Soc. A*, 297(1451) :459–475, 1967.
- [142] D. M. Henderson et J. W. Miles. Single-mode faraday waves in small cylinders. *J. Fluid Mech.*, 213 :95–109, 1990.
- [143] J. L. Hammack et D. M. Henderson. Resonant interactions among surface water waves. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 25(1) :55–97, 1993.
- [144] N. M. Frew, E. J. Bock, U. Schimpf, T. Hara, H. Haußecker, J. B. Edson, W. R. McGillis, R. K. Nelson, S. P. McKenna, B. M. Uz, et B. Jähne. Air–sea gas transfer : Its dependence on wind stress, small–scale roughness, and surface films. *J. Geophys. Res.*, 109 :C08S17, 2004.

- [145] S. B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press., Etats-Unis.
- [146] H. Tennekes. Eulerian and lagrangian time microscales in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 67 :561–567, 1975.
- [147] B. R. Pearson, P.-. Krogstad, et W. van de Water. Measurements of the turbulent energy dissipation rate. *Phys. Fluids*, 14 :1288, 2002.
- [148] C. J. R. Garrett. On cross-waves. *J. Fluid Mech.*, 41(04) :837–849, 1970.
- [149] F. Moisy, G.-J. Michon, M. Rabaud, et E. Sultan. Cross-waves induced by the vertical oscillation of a fully immersed vertical plate. *Phys. Fluids*, 24(2) :022110, 2012.
- [150] B. R. Hodges et R. L. Street. On simulation of turbulent nonlinear free-surface flows. *J. Comput. Phys.*, 151 :425–457, 1999.
- [151] B. Miquel et N. Mordant. Nonlinear dynamics of flexural wave turbulence. *Phys. Rev. E*, 84(6) :066607, 2011.
- [152] R. Savelsberg. *Experiments on Free-Surface Turbulence*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, Pays-Bas, 2006.
- [153] V. E. Zakharov et N. N. Filonenko. Energy spectrum for stochastic oscillations of the surface of a liquid. *Sov. Phys. Dokl.*, 11 :881, 1967.
- [154] V. E. Zakharov et M. M. Zaslavskii. The kinetic equation and kolmogorov spectra in the weak turbulence theory of wind waves. *Izv. Atmos. Ocean. Phys.*, 18 :747–753, 1982.
- [155] V. E. Zakharov, V. S. L’Vov, et G. Falkovich. *Kolmogorov Spectra of Turbulence*. Springer, Berlin, Allemagne, 1992.
- [156] O. M. Phillips. Spectral and statistical properties of the equilibrium range in wind-generated gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 156 :505–531, 1985.
- [157] O. M. Phillips. The equilibrium range in the spectrum of wind-generated waves. *J. Fluid Mech.*, 4(04) :426–434, 1958.
- [158] T. Elfouhaily, B. Chapron, K. Katsaros, et D. Vandemark. A unified directional spectrum for long and short wind-driven waves. *J. Geophys. Res.*, 102 :15781–15796, 1987.
- [159] M. K. Ochi. *Ocean Waves*. Cambridge University Press, Etats-Unis, 1998.
- [160] L. Cavaleri, J.-H. G. M. Alves, F. Ardhuin, A. Babanin, M. Banner, K. Belibassakis, M. Benoit, M. Donelan, J. Groeneweg, T. H. C. Herbers, et T. W. Group. Wave modelling—the state of the art. *Prog. Oceanogr.*, 75(4) :603–674, 2007.
- [161] Y. Tsuji et T. Ishihara. Similarity scaling of pressure fluctuation in turbulence. *Phys. Rev. E*, 68 :026309, 2003.







# INTERACTIONS ENTRE ONDES DE SURFACE ET ÉCOULEMENTS HYDRODYNAMIQUES

## Résumé

L'énergie cinétique d'un liquide est mise en jeu à la fois dans les ondes à sa surface libre et dans les écoulements hydrodynamiques pouvant exister sous la surface. Ceci peut mener à des interactions spécifiques entre ondes et écoulements que nous étudions à travers trois expériences.

Dans une première expérience, nous étudions les ondes de type tsunami, engendrées à la surface d'un liquide par la déformation du fond. Nous examinons comment les déformations de la surface libre et le champ de vitesse dans le liquide sont influencés par les caractéristiques spatiales et temporelles de la déformation du fond, habituellement négligées dans les simulations de tsunamis. Nous mettons en évidence différents régimes et développons une nouvelle approche théorique.

Nous nous intéressons, dans une deuxième expérience, aux lobes oscillants apparaissant à la périphérie d'une goutte de liquide soumise à une vibration verticale et sensible au champ magnétique (ferrofluide). Nous montrons que les fréquences de résonance de ces ondes sont ajustables par un champ magnétique extérieur. Par un modèle capable de prédire l'évolution de ces fréquences propres, nous démontrons que le champ permet de contrôler la tension de surface effective de la goutte.

Enfin, la troisième expérience sonde les interactions entre une surface libre et une turbulence hydrodynamique. Nous étudions comment la turbulence hydrodynamique est modifiée par la présence d'une surface libre, mais aussi comment la surface révèle les empreintes de l'écoulement turbulent. Enfin, nous observons comment des ondes générées à la surface du liquide au moyen d'un batteur sont affectées par la présence de turbulence hydrodynamique.

---

# INTERACTIONS BETWEEN FREE-SURFACE WAVES AND HYDRODYNAMIC FLOWS

## Abstract

The kinetic energy of a liquid is involved both in the waves on the free surface and in hydrodynamic flows which may take place beneath the free surface. This can lead to specific interactions between waves and flows that we investigate through three experiments.

In a first experiment, we study tsunami-like waves generated on the surface of a liquid by the deformation of a bottom. We investigate how the free-surface deformations and the velocity field under the surface are affected by the spatial and temporal characteristics of the bottom deformation, usually overlooked in tsunami simulations. We highlight different regimes and develop a new theoretical approach.

A second experiment is focused on the oscillating lobes displayed at the periphery of a drop of liquid subjected to a vertical vibration and sensitive to a magnetic field (ferrofluid). We show that the resonant frequencies of these standing waves can be adjusted by an external magnetic field. By means of a model able to predict the evolution of these natural frequencies, we demonstrate that the magnetic field can control the effective surface tension of the drop.

Finally, the third experiment probes the interactions between a free surface and a hydrodynamic turbulence generated by jets under the surface. We study how hydrodynamic turbulence is modified by the presence of a free surface and, conversely, how the deformation of the free surface reveals the footprints of the turbulent flow under the surface. Finally, we see how waves generated by a wavemaker on the free surface are affected by the presence of hydrodynamic turbulence.