

# Instabilité de méandrage d'un filet liquide

Stéphanie Couvreur<sup>1</sup>, Adrian Daerr<sup>1</sup>, Jens Eggers<sup>2</sup> & Laurent Limat<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Matière et Systèmes Complexes UMR 7057, Université Paris Diderot, F-75205 Paris cedex 13

<sup>2</sup> School of Mathematics, University of Bristol, Bristol BS8 1TW, United Kingdom

adrian.daerr@univ-paris-diderot.fr

**Résumé.** Un rivulet liquide sur un plan incliné cesse de s'écouler de façon rectiligne au-delà d'un débit seuil et adopte alors une trajectoire sinueuse qui rappelle les méandres de rivières. Dans certaines conditions expérimentales, cette instabilité est linéaire et convective. Nous avons montré que le substrat y joue un rôle clef, en ralentissant la perturbation de la trajectoire rectiligne par rapport à la vitesse moyenne de l'écoulement. Dans ces conditions, les forces inertielles sont déstabilisantes et provoquent l'instabilité lorsqu'elles dépassent les forces capillaires. Nous discutons brièvement pourquoi ce mécanisme constitue un cadre général qui s'applique à d'autres instabilités similaires d'écoulements minces, telles que le flambage de nappes liquides, et comment il est lié à l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Récemment, nous nous sommes intéressés aux effets non-linéaires, qui n'affectent pas seulement la saturation de l'instabilité et la sélection de longueurs d'onde, mais dont certains modifient fondamentalement la nature de l'instabilité. C'est le cas notamment des forces de piégage de la ligne de contact qui rendent l'expérience linéairement stable en mouillage partiel. Il existe alors toujours un seuil d'instabilité, mais celui-ci est maintenant fonction de l'état initial du système. On peut rendre compte de cette dépendance en mesurant directement la rugosité de la ligne de contact.

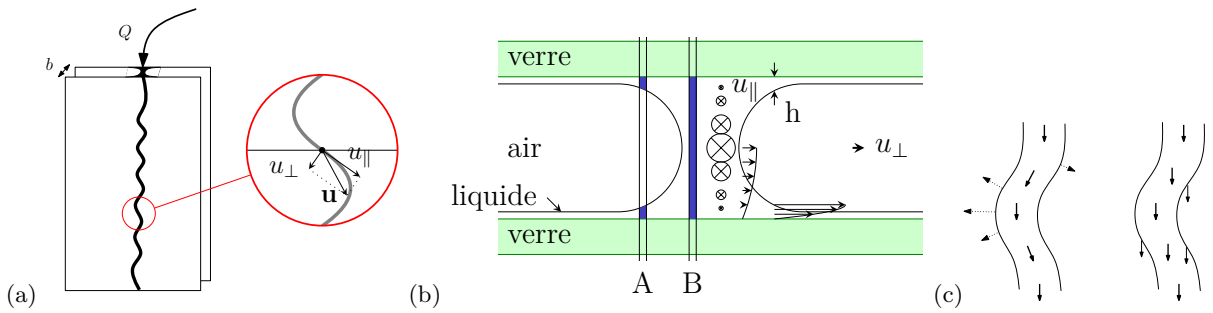
**Abstract.** For a range of flow rates, a liquid filament on an inclined plane may adopt a sinuous, meandering path instead of flowing straight downhill. We discuss the mechanism underlying the instability, and the growth and the saturation of the resulting meanders. An experiment in total wetting conditions greatly simplifies the understanding by avoiding the pinning of the rivulets, yet still exhibits the meandering instability. We show that the key ingredient lies in the anisotropic friction experienced by the rivulet. This anisotropy leads to a decoupling of material and wave velocities and allows inertial forces to increase the amplitude of perturbations once they overcome stabilizing capillary forces. Turning back to the case of partial wetting rivulets, we show how the linear instability is suppressed by contact line pinning, and how the instability threshold now depends on the initial geometry of the rivulet, namely its width and the amplitude of finite perturbations of its contact lines. Once meanders develop they evolve over long timescales towards stationary structures whose characteristic scales do no longer depend on the initial conditions.

## 1 Introduction : instabilités sinueuses

Il est assez courant de voir un filet liquide couler sur une surface solide, non pas en ligne droite selon la plus grande pente, mais en adoptant une trajectoire sinueuse. Curieusement le mécanisme qui conduit à cette trajectoire n'est pas évident. En effet, les principales forces en jeu que sont la pesanteur, la viscosité et les forces capillaires (tension de surface, accrochage des lignes de contact) semblent à première vue parfaitement s'accomoder d'une trajectoire rectiligne et même tendre à rectifier un filet qui s'en éloignerait. Les travaux expérimentaux à ce sujet sont peu diserts sur l'explication du phénomène [2, 6, 14, 16] et deux analyses théoriques [3, 12] passent à côté de l'ingrédient physique essentiel : le substrat. Pour constater le rôle clef de celui-ci il suffit de l'omettre : le même filet liquide sans le substrat, en chute libre, ne méandrera pas. Du coup, obtenant essentiellement la dynamique d'un filet libre, le premier travail théorique s'efforce aussitôt de réintroduire l'effet du substrat sous forme d'un forçage aléatoire. Or il y a bien du bruit sous forme d'hétérogénéités de mouillage du substrat, mais l'échelle caractéristique est bien plus petite que la taille des virages du filet. La trajectoire du méandre ne ressemble pas à la marche aléatoire que prédit Bruinsma (un autre modèle semblable avec du bruit phénoménologique a été publié plus récemment [2]). Le deuxième travail par Kim *et al.* tient compte du frottement avec l'air ambiant et retrouve l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Cette instabilité est effectivement observée sur des

jets ou des nappes liquides éjectées à grande vitesse dans l'air [5] mais n'est pas le mécanisme à l'œuvre ici. Les perturbations dans l'instabilité de Kelvin-Helmholtz devraient être advectées à des vitesses de l'ordre de la vitesse du fluide, nettement plus dense que l'air. L'observation montre que les perturbations croissent et se déplacent à des vitesses de l'ordre du cm/s, environ deux ordres de grandeur en dessous de la vitesse du liquide ( $\sim 1$  m/s). En dépit de leurs défauts, les modèles de Bruinsma et Kim *et al.* identifient correctement l'inertie comme origine de l'instabilité, en compétition avec les forces capillaires. Nous allons discuter de quelle manière le substrat rend l'inertie déstabilisante et voir que ce mécanisme implique que le rapport des forces inertielles et capillaires (le nombre de Weber) doit être évalué dans le référentiel advecté avec les perturbations.

## 2 Méandrage en mouillage parfait et mécanisme d'instabilité



**Figure 1.** Méandres en mouillage parfait. (a) Un liquide mouillant les deux parois en verre est injecté de manière à former un pont liquide d'une paroi à l'autre. Le tracé du filet n'est pas ancré comme en mouillage partiel, la vitesse du liquide n'est donc pas nécessairement tangente au tracé instantané. (b) Coupe transverse du filet liquide. Lors d'un mouvement latéral, les vitesses moyennes en A et B doivent être à peu près les mêmes, les gradients de vitesses donc plus élevés en A alors qu'un écoulement longitudinal aura une vitesse moyenne bien plus élevée en B. (c) Conséquence du frottement anisotrope. Si une perturbation dérive à une vitesse  $u_{\varphi}$  plus faible que la vitesse  $\bar{u}$  du liquide, ce dernier parcourt une trajectoire non rectiligne et subit des forces apparentes centrifuges (à gauche). Ces forces sont absentes si  $u_{\varphi} = \bar{u}$ , comme en chute libre (à droite).

Pour comprendre le rôle du substrat, il s'est avéré utile de passer à un système où le frottement entre celui-ci et le liquide est réduit : en mouillage parfait, où les lignes de contact ne sont plus ancrées. Dans ce système découvert par Drenckhan [9, 10], le filet de liquide forme un pont entre deux plaques à faible espacement qui sont mouillées d'un film de très faible épaisseur (Fig. 1 gauche). La courbure de l'interface est concave, ce qui stabilise le filet : la pression en son intérieur est plus faible que dans les films, ce qui l'empêche de s'étaler comme un filet en mouillage parfait le ferait sur un plan.

On peut moyenner l'équation de Navier-Stokes sur l'épaisseur de la cellule, on trouve [1]

$$\partial_t \mathbf{u} + \beta (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \underbrace{-k \mathbf{u}}_{\text{viscosité}} + \left( \underbrace{\Gamma \kappa}_{\text{capillarité}} - \underbrace{k_{cl} u_n}_{\text{ligne de contact}} \right) \mathbf{n} + \underbrace{g \mathbf{e}_x}_{\text{pesanteur}}. \quad (1)$$

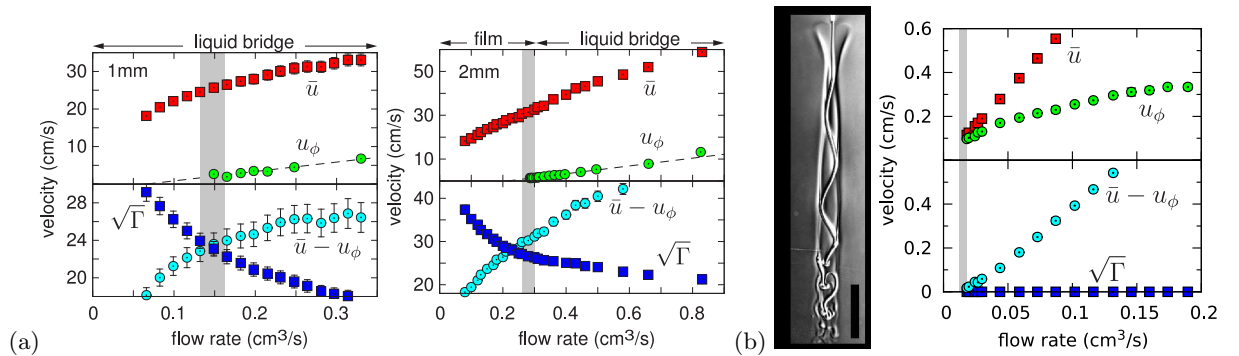
où  $\beta \simeq 1$ ,  $\Gamma$  est la tension de surface multipliée par la largeur du filet divisée par le produit de sa section et de sa densité,  $k$  et  $k_{cl}$  sont des coefficients de frottement visqueux, et  $g$  est la pesanteur. La particularité de cette équation, qui fait son originalité dynamique, tient dans la décomposition du frottement visqueux en un terme isotrope de *bulk* et un terme normal aux lignes de contact. Ce dernier s'oppose à un déplacement du tracé du filet et fait qu'une perturbation ne se comporte pas comme en l'absence de parois.

Le frottement visqueux que subit le filet n'est pas isotrope, car un mouvement longitudinal, c'est-à-dire le long du tracé, peut se faire principalement dans le pont liquide qui se tend d'une paroi vers l'autre (Fig. 1 milieu). À l'opposé, un mouvement transverse force le déplacement des bords de ménisque. Ce déplacement engendre un cisaillement sur une épaisseur faible de liquide et l'on retrouve, dans la mesure où le film sur les parois loin du filet devient mince, la divergence de la dissipation d'une ligne de contact en mouvement.

Le frottement supplémentaire pour un déplacement du tracé a pour conséquence qu'une perturbation ne pourra pas dériver à la même vitesse que l'écoulement, contrairement à ce qui se passe sur un jet en chute libre. La vitesse de phase  $u_\phi$  des perturbations est donc plus petite que la vitesse moyenne du liquide  $\bar{u}$ . Le liquide qui double une perturbation est contraint de suivre la trajectoire qu'elle dessine (Fig. 1 droite). Le liquide fera en particulier croître une perturbation si son inertie domine la tension de surface qui fournit une force centripète. Une analyse de stabilité de l'équation (1) donne le critère d'instabilité suivant [1] :

$$(\bar{u} - u_\phi)^2 > \Gamma. \quad (2)$$

Ici nous avons utilisé le fait que la vitesse d'advection des perturbations,  $u_\phi$ , est fonction des coefficients de frottement  $k$  et  $k_{cl}$ , pour éliminer ces derniers en faveur de grandeurs mesurables expérimentalement. Le résultat central de cette analyse est que la vitesse pertinente pour les forces centrifuges est la vitesse *relative* entre fluide et perturbation [1].



**Figure 2.** (a) Mesures de la vitesse matérielle et de la vitesse de phase de méandres en cellule de Hele-Shaw (espacements 1 mm et 2 mm) et comparaison du terme inertiel déstabilisant  $\bar{u} - u_\phi$  au terme capillaire stabilisant  $\Gamma$ . Selon l'équation (2) les deux termes devraient être égaux au seuil d'instabilité (bande grise : seuil expérimental) [1]. (b) Test du même critère sur un système différent [8] : un jet d'eau salée tombant dans de l'eau moins salée. La tension de surface est nulle et la vitesse de phase bien égale à la vitesse du jet au seuil.

La figure 2 montre qu'on vérifie bien ce critère expérimentalement. Dans le cas des méandres en cellule de Hele-Shaw, la vitesse de phase est très petite au seuil, ce qui fait qu'il est difficile d'apprécier la différence avec un critère où l'on négligerait l'advection des perturbation. Nous avons donc vérifié le critère (2) d'instabilité sur un système différent, en l'occurrence la chute d'un jet d'eau salée dans un bain stratifié moins salé [15]. Ici la vitesse de phase n'est pas négligeable. On constate (Fig. 2 droite) que l'instabilité a lieu dès que la vitesse du liquide dépasse la vitesse de phase, ce qui est bien en accord avec l'absence de terme stabilisant, puisque la tension de surface est nulle,  $\Gamma = 0$ .

### Jets inertiels et instabilité de Kelvin-Helmholtz

Partant du succès de l'application de notre critère d'instabilité à l'expérience de Dombrowski *et al.*, expérience dans laquelle il n'y a plus de tension de surface et qui entre dans la catégorie des instabilités de jet inertiel, il est tentant de voir quelles autres instabilités obéissent au même critère.

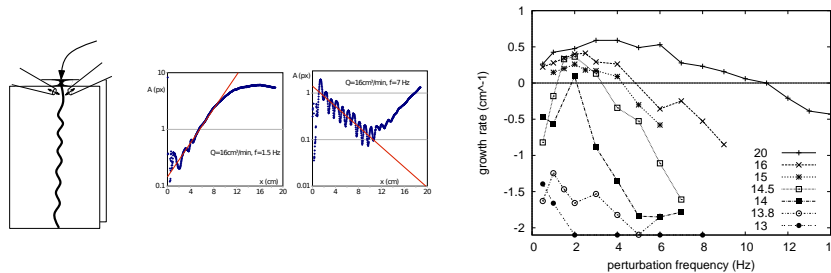
L'instabilité de Kelvin-Helmholtz étant également inertielle, son seuil s'écrit, de manière similaire à la condition de méandrage (2) dans nos expériences, comme une comparaison d'un terme inertiel avec un terme stabilisant [11] :

$$4\rho_1\rho_2 \left( \frac{U}{2(\rho_1 + \rho_2)} \right)^2 > c_0^2 = \frac{g}{k} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} + \frac{\gamma k}{\rho_2 + \rho_1}.$$

Ici  $U$  est le différentiel de vitesses des deux fluides,  $\rho_i$  leur densités respectives,  $g$  l'accélération gravitationnelle et  $k$  le vecteur d'onde considéré. La grandeur  $c_0$  est la vitesse des ondes (gravito-capillaires) entre les deux liquides en l'absence d'écoulement. Cette inégalité dit que l'interface devient instable lorsque le

terme inertiel en  $U^2$  dépasse les forces de rappel, responsables des ondes gravito-capillaires. En effet, en multipliant l'inégalité par  $(\rho_2 + \rho_1)k\epsilon$ , on retrouve à gauche la force centrifuge (la variation de pression) sur une perturbation d'amplitude  $\epsilon$  et longueur d'onde  $2\pi/k$  et à droite la force de rappel.

La même inégalité peut aussi être lue comme une comparaison de vitesses, où la dispersion d'une perturbation par les ondes est en compétition avec son amplification. Lorsque le différentiel de vitesse des fluides, pondéré par un facteur sans dimension qui dépend des densités, dépasse la vitesse de phase des ondes interfaciales  $c_0$ , alors le système devient instable. Si l'on admet que la vitesse des ondes interfaciales joue ici le rôle de la vitesse de phase de nos méandres, à savoir celle de vitesse de référentiel pour l'évaluation du terme inertiel centrifuge, alors les deux types d'instabilités (Kelvin-Helmholtz et frottement visqueux anisotrope) s'expriment de la même manière. Notons qu'il n'est pas étonnant en soi que le méandrage et Kelvin-Helmholtz se ramènent tous deux, du moins si l'on néglige l'effet de la pesanteur, au nombre de Weber. En revanche il nous semble intéressant que leur description devient particulièrement simple si le nombre de Weber est évalué dans le bon référentiel, à savoir celui qui suit les perturbations advectées. Dans des expériences comme celles de Pesci *et al.* et Dombrowski *et al.*, la vitesse de phase des perturbations n'a bien évidemment pas la même origine que dans nos méandres. En revanche, une fois cette vitesse calculée avec la physique propre à l'expérience, c'est le même critère que pour les méandres qui s'applique pour identifier le seuil.

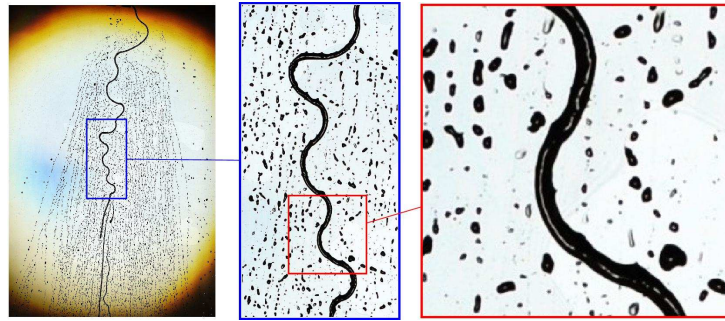


**Figure 3.** Perturbation contrôlée de méandres en mouillage parfait. (gauche) Deux buses soufflent et aspirent en opposition de phase, à quelques centimètres de l'injecteur, et forcent le filet à se déplacer latéralement. (milieu) L'enveloppe du tracé du filet croît ou décroît, selon que la perturbation est amplifiée ou atténuée, initialement exponentiellement. Ceci définit une longueur d'amplification ou d'atténuation, dont l'inverse est reporté dans le graphe à droite. (droite) Taux de croissance d'une perturbation de fréquence donnée à différents débits. À un débit de 14 ml/min seule une perturbation de 4 Hz a un taux de croissance positif, les perturbations aux autres fréquences sont atténuées. Le taux d'amplification des modes instables et la gamme de fréquences instables sont d'autant plus grands que le débit est au-dessus du débit seuil.

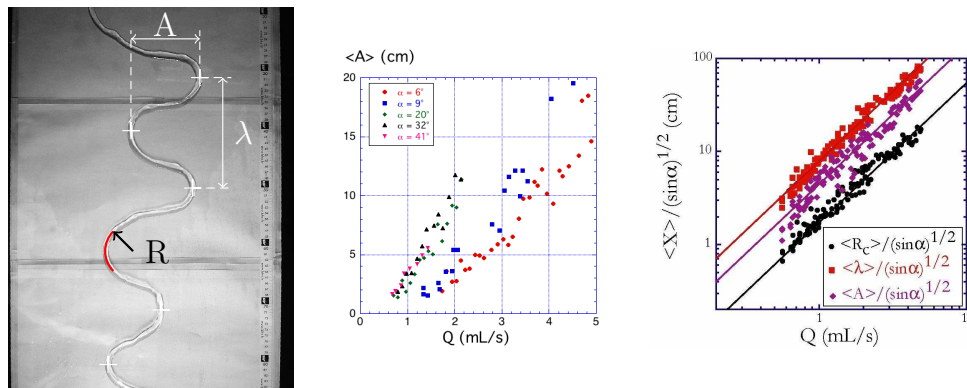
Curieusement le modèle ne prédit aucune sélection de longueur d'onde. Une expérience de perturbation contrôlée (Fig. 3) montre bien une signature d'instabilité linéaire et convective et révèle en plus une sélection de longueur d'onde. Notre modèle ne tient pas compte de la largeur finie du filet, dont on conçoit facilement qu'elle puisse introduire une coupure aux petites longueurs d'onde. L'existence d'une coupure aux grandes longueurs d'onde n'apparaît pas clairement dans les mesures, sauf pour les deux courbes les plus proches du seuil de la Fig. 3 droite.

### 3 Méandrage en mouillage partiel

Dans le méandrage en mouillage partiel (Fig. 4), ce n'est curieusement pas le début de l'instabilité, mais le régime pleinement développé qui est le plus facile à comprendre (Fig. 5). Pendant sa thèse Nolwenn Le Grand a montré que le méandre finit par figer son tracé, dans une certaine gamme de débits, et parfois sur un temps étonnamment long devant les autres temps caractéristiques. Il est courant que le méandre ne se fige qu'au bout d'environ 30 min alors que le liquide met à peine plus d'une seconde pour parcourir la longueur du plan incliné. Cette forme finale est caractérisée par des virages de courbure, d'amplitude et de longueur d'onde bien définies. On voit bien dans l'agrandissement Fig. 4 que le méandre est déformé



**Figure 4.** Images prises avec la pupille d'entrée de l'appareil photo au point conjugué d'une source lumineuse de petite taille. Cette configuration maximise le contraste : toute goutte ou impureté qui dévie la lumière de plus d'environ  $1,5^\circ$  apparaît noire car la lumière n'atteint plus le diaphragme de l'appareil photo. À fort grossissement on voit qu'un trait blanc marque les maxima et les points cols du méandre, ce qui nous permet de mesurer sa déformation (au premier ordre vers l'extérieur du virage). La planche de gauche fait environ 1 m de long.



**Figure 5.** Caractérisation de méandres stationnaires en mouillage partiel.

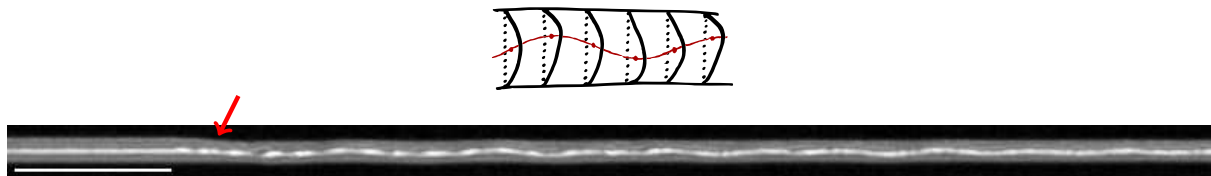
par inertie vers l'extérieur des virages, dont la croissance s'arrête précisément quand les forces inertielles ont atteint le niveau des forces d'accrochage de la ligne de contact sur le substrat. La loi d'échelle qui découle de cet équilibre des forces regroupe bien les mesures à différents débits et inclinaisons sur une même droite (Fig. 5) [13].

L'apparition de l'instabilité est plus difficile à saisir, car l'hystérèse de mouillage supprime le mécanisme d'instabilité linéaire à l'œuvre en mouillage parfait. En effet, à lignes de contact fixées, de petites perturbations font juste osciller le filet autour de sa position d'équilibre (Fig. 6) [7]. Le seuil de méandrage dépend alors de la géométrie initiale du filet : s'il est plus large, le débit peut augmenter davantage avant que l'angle de contact n'atteigne sa valeur statique limite et que la ligne de contact ne devienne mobile. Si le filet initial est plus rugueux, si donc ses lignes de contact sont moins rectilignes, alors l'angle de contact limite sera plus rapidement atteint sur ces perturbations. Pour la figure 7 gauche, nous avons préparé des filets droits à différents débits et mesuré leur courbure moyenne (losanges bleus), avant d'augmenter le débit jusqu'à formation de méandres (ronds rouges). La courbe de droite (axes intervertis!) montre qu'un scaling prenant en compte le débit de préparation et la courbure moyenne du filet initial, suffit à saisir le débit critique de déstabilisation [4].

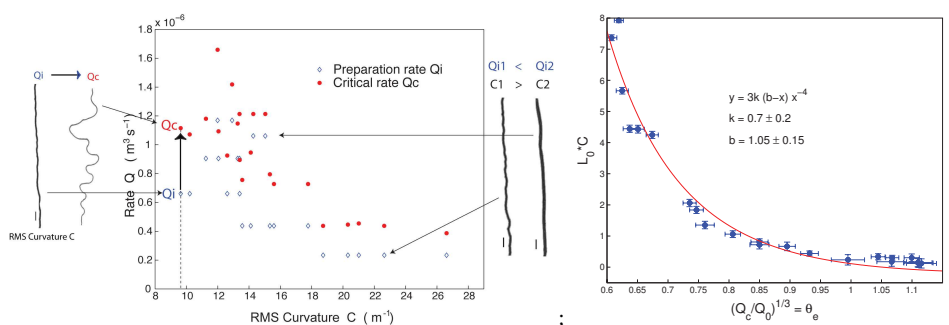
## 4 Résumé

Le passage par une expérience de méandrage en mouillage parfait a permis de montrer comment le frottement anisotrope sur le filet liquide rend l'inertie déstabilisante. Le critère d'instabilité (2) s'avère relativement générique, reliant avec succès des grandeurs directement observables, la stabilité et les vitesses matérielle et de phase, dans deux systèmes complètement différents physiquement (nos filets liquides

dans une cellule de Hele-Shaw, et des jets salins dans un bain, loin des parois et sans tension de surface). L'hystérèse de mouillage vient cependant compliquer la donne : puisque la force d'accrochage est réactive, sa mobilisation dans l'état initial détermine le seuil d'instabilité, qui dépend donc de la préparation. Seules les échelles des méandres stationnaires en mouillage partiel dépendent encore de manière simple des propriétés de mouillage du substrat.



**Figure 6.** (haut) Une déformation de la section d'un filet provoque un différentiel de pression de Laplace, qui fait osciller le liquide autour de sa position d'équilibre. L'oscillation est atténuée par la viscosité. (bas) Effet d'une perturbation contrôlée sur la section du méandre. Un substrat avec des bandes moins mouillantes (noires) canalise le filet en ancrant les lignes de contact sur leurs bords. Le canal rétrécit par élargissement de la bande noire supérieure, au niveau de la flèche. En aval de la perturbation, on voit la section du méandre osciller (les points blancs marquent les points de hauteur maximale).



**Figure 7.** Caractérisation de méandres stationnaires en mouillage partiel.

## Références

1. A. DAERR, J. EGGERS, L. LIMAT & N. VALADE, *Phys. Rev. Lett.*, **106**, 184501 (2011).
2. B. BIRNIR, K. MERTENS, V. PUTKARADZE & P. VOROBIEFF, *J. Fluid Mech.*, **607**, 401–411 (2008).
3. R. BRUINSMAN, *J. Phys. France*, **51**, 829–845 (1990).
4. S. COUVREUR & A. DAERR, *Europhys. Lett.*, **29**, 24004 (2012).
5. G. CRAPPER, N. DOMBROWSKI, W. JEPSON & G. PYOTT, *J. Fluid Mech.*, **57**, 671–672 (1973).
6. J. B. CULKIN & S. H. DAVIS, *AIChE J.*, **30**, 263–267 (1984).
7. S. DAVIS, *J. Fluid Mech.*, **98**, 225–242 (1980).
8. C. DOMBROWSKI, B. LEWELLYN, A. I. PESCI, J. M. RESTREPO, J. O. KESSLER & R. E. GOLDSTEIN, *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 184501 (2005).
9. W. DRENCKHAN, S. GATZ & D. WEAIRE. *Phys. Fluids*, **16**, 3115 (2004).
10. W. DRENCKHAN, H. RITACCO, A. SAINT-JALMES, A. SAUGEY, P. MCGUINNESS, A. VAN DER NET, D. LANGEVIN & D. WEAIRE, *Phys. Fluids*, **19**, 102101 (2007).
11. É. GUYON, J.-P. HULIN & L. PETIT, *Hydrodynamique physique*, EDP Sciences (2001).
12. H.-Y. KIM, J.-H. KIM & B. H. KANG, *J. Fluid Mech.*, **498**, 245–256 (2004).
13. N. LE GRAND-PITEIRA, A. DAERR & L. LIMAT, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 254503 (2006).
14. T. NAKAGAWA & J. C. SCOTT, *J. Fluid Mech.*, **149**, 89–99 (1984).
15. A. PESCI, M. PORTER & R. GOLDSTEIN, *Phys. Rev. E*, **68**, 056305 (2003).
16. P. SCHMUKI & M. LASO, *J. Fluid Mech.*, **215**, 125–143 (1990).