Électronique numérique

1A (L3) EIDD

2018 / 2019

Enseignants

Cours	Adrian Daerr ⟨adrian.daerr@univ-paris-diderot.fr⟩
TD, TP	Clément Barraud, Kevin Dalla Francesca, Denis Perret, Iännis Roland, Philippe Schwemling

Aujourd'hui (cours 1):

- Détails organisationnels
- Introduction
- Algèbre de Boole

Organisation — Électronique 1

- Les cours, TDs et TPs ont lieu le mardi matin (sauf 1 et 8 octobre).
- 3 groupes séparés en TD/TP, cours en commun

	Groupe 1			Groupe 2			Groupe 3		
Date	Heure	Salle		Heure	Salle		Heure	Salle	
lundi (période harmonisation: sem. 37-41)									
1 oct.	8h30-10h30	471E HaF	C1						
8 oct.	8h30-10h30	202 OdG	TD1	8h30-10h30	203 OdG	TD1	8h30-10h30	2012 SG	TD1
mardi (période tronc commun: sem. 42-51)									
16 oct.	9h-11h	Amphi 2 OdG	C2						
	11h-13h	580F HaF	TD2	11h-13h	2016 SG	TD2	11h-13h	378 OdG	TD2
23 oct.	9h--12h30	Amphi 2 OdG	C3						
30 oct.	férié								
6 nov.	9h--13h	193A/322A	TP 1	9h--12h30	273B Lamarck	TD 3			
13 nov.				9h--13h	193A/322A	TP 1	9h--12h30	378F OdG	TD 3
20 nov.	9h--12h30	302A Condorcet	TD 3				9h--13h	193A/322A	TP 1
27nov.	9h--12h30	Amphi 2 OdG	C4						
4 déc.	9h--13h	193A/322A	TP 2	9h--12h30	302A Condorcet	TD 4			
11 déc.				9h--13h	193A/322A	TP 2	9h--12h30	302A Condorcet	TD 4
18 déc.	9h--12h30	302A Condorcet	TD 4				9h--13h	193A/322A	TP 2

Enseignants

Cours	Adrian Daerr ⟨adrian.daerr@univ-paris-diderot.fr⟩
TD / TP	Clément Barraud, Kevin Dalla Francesca, Denis Perret, Iännis Roland, Philippe Schwemling

Organisation (suite)

Travaux Pratiques

- 4 h en binôme
- Sujets:
  1. Circuits combinatoires
  2. Systèmes séquentiels
- Préparation des TPs à faire à l'avance
- Compte-rendu à rendre en fin de séance avec la préparation
- Notes des TPs comptent pour 30% de la note finale

Contrôle des connaissances – notation

- 70% max[examen,moyenne(partiel,examen)]
- 30% TPs

Moodle (nécessite un compte étudiant dans l'ENT)

`http://moodle.script.univ-paris-diderot.fr/`

Plan du cours

1. Algèbre de Boole, fonctions logiques, simplification par Karnaugh
   $\rightsquigarrow$ *Formalisme pour concevoir* un circuit logique
2. Circuits logiques de base
   Des portes logiques élémentaires aux Field Programmable Gate Arrays (FPGA)
   $\rightsquigarrow$ *Concevoir des circuits* de complexité croissante
3. Caractéristiques générales des *circuits intégrés*
   Temps de propagation, comportement électrique, ...
   $\rightsquigarrow$ Comprendre les contraintes supplémentaires lors de la *réalisation électronique* d'un circuit logique
4. Systèmes et circuits séquentiels
   Analyse, synthèse; verrous, bascules, et applications
   $\rightsquigarrow$ Comment réaliser des mémoires, des compteurs, des registres *et cætera*

Quelques références

- R. J. Tocci, *Circuits numériques*, Dunod
- J.-M. Bernard, J. Hugon, *Pratique des circuits logiques*, Eyrolles
- P. Horowitz, W. Hill, *The art of electronics*, Cambridge University Press

L'électronique numérique, qu'est-ce ?

- Électronique pour le traitement de données numériques.

Signal analogique: continu

Exemples: température, force, son, image:

↑ variations / nuances continues en espace / couleur / intensité

Donnée numérique: discrète

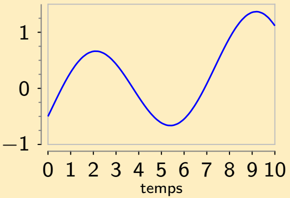
Exemples: habitants d'un ville, morceau mp3, photo numérique:

↑ constituée d'éléments distincts: pixels. Intensité prend nombre fini de valeurs

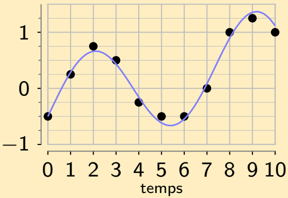
Échantillonnage

Signal analogique $\xrightarrow{\text{Conversion Analogique Numérique}}$ Signal numérisé $\xrightarrow{\text{Conversion Numérique Analogique}}$ Signal reconstitué

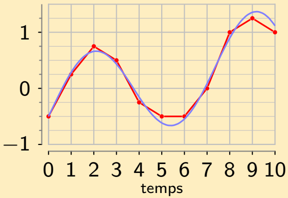
Exemple: son (signal $\propto$ pression)



Microphone



Discrétisation en temps et en intensité $\rightsquigarrow$ liste d'échantillons -0.5, 0.25, 0.75, 0.5, -0.25, ...
Exemple CD audio:
44100 éch./s
65536 niveaux de pression acoustique



Restitution par la chaîne HiFi. Interpolation plus ou moins lissée

Si mal fait $\rightsquigarrow$ perte d'information non rattrapable

Échantillonnage

Signal analogique $\xrightarrow{\text{Conversion Analogique Numérique}}$ Signal numérisé $\xrightarrow{\text{Conversion Numérique Analogique}}$ Signal reconstitué

Exemple: image

Scène vue par l'objectif

Discrétisation dans l'espace et en intensité.
Exemple capteur APN:
4000x3000 pixels,
256 niveaux par couleur primaire (Rouge Vert Bleu)

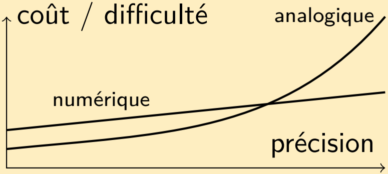
Interpolation chez l'imprimeur

Si mal fait $\leadsto$ perte d'information non rattrapable

Avantages du numérique

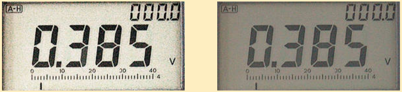
Analogique

- Sensible au bruit
- Précision de la chaîne de traitement (amplificateurs, filtres, ...) facilement affectée par des dérives matérielles (vieillissement, changement de température, etc)
- Coût croît vite en fonction de la précision demandée



Numérique

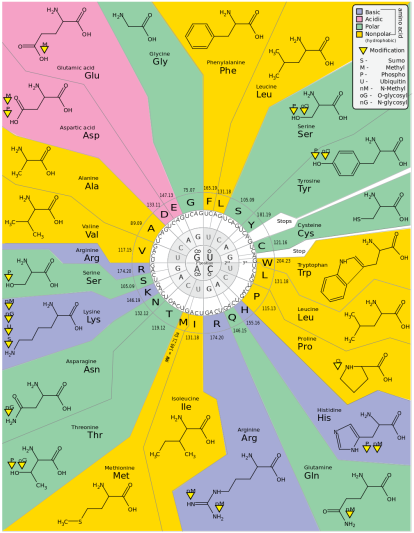
- Robuste (surtout en discrétisant à deux niveaux!)



contraste dégradé: information intacte ↑

- Exigence plus faible quant à la qualité des circuits électroniques $\rightsquigarrow$ extrême intégration ($> 10^9$ transistors / puce !) et rapidité (10^{10} opérations/s) !
- Coût $\sim$ linéaire en précision
- Traitement: filtrage acausal facile

Vivant numérique



traduction code génétique → acide aminé

Vivant sur terre:
code génétique à 4 «lettres» AGCT

Décrit tant d’organismes différents!
S’hérite de manière robuste: facile à copier

Électronique numérique

Choix extrême: discrétisation à deux niveaux

tension maximale	$\leftrightarrow$	tension nulle
H (high)	$\leftrightarrow$	L (low)
vrai	$\leftrightarrow$	faux
1	$\leftrightarrow$	0

$\rightsquigarrow$ unité d'information élémentaire 1 bit (**bi**nary digi**t**)

Plus de valeurs en regroupant plusieurs bits.

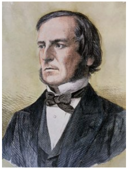
2 bit: 4 valeurs possibles (00, 01, 10, 11)
8 bit (1 octet): 256 valeurs possibles (00000000, 00000001, . . ., 11111111)
N bit: 2^N valeurs possibles

L'électronique numérique est à la base des ordinateurs, des télécommunications, de l'électronique de loisir, . . .

Chapître 1: Algèbre de Boole, fonctions logiques

Conception de circuits logiques combinatoires

Calcul avec seulement deux états logiques:
$\{0, 1\}$, ou $\{faux, vrai\}$.



George Boole,
1815-1864

Simple: fonction logique de n variables entièrement caractérisée par sa valeur (0 ou 1) pour les 2^n entrées possibles.

Exemple: fonction F de deux variables (a, b)

notation «table de vérité»

a	b	F(a,b)
0	0	F(0,0)
0	1	F(0,1)
1	0	F(1,0)
1	1	F(1,1)

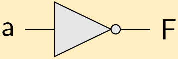
notation «tableau de Karnaugh»

a \ b	0	1
0	F(0,0)	F(0,1)
1	F(1,0)	F(1,1)

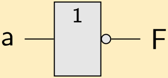
notations équivalentes

Fonction logiques élémentaires (penser: $\begin{matrix} 0 \rightarrow \text{faux} \\ 1 \rightarrow \text{vrai} \end{matrix}$)

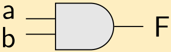
Opérateur NOT (non, complément, inverseur)



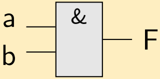
a	$F = \overline{a}$
0	1
1	0



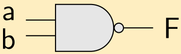
Opérateur AND (et, conjonction, intersection)



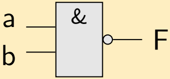
a	b	$F = a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Opérateur NAND (et-non)

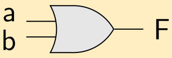


a	b	$F = \overline{a \cdot b}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

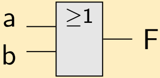


Fonction logiques élémentaires (suite)

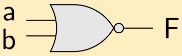
Opérateur OR (ou, disjonction, réunion)



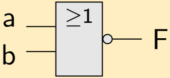
a	b	$F = a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



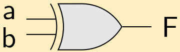
Opérateur NOR (ou-non)



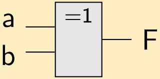
a	b	$F = \overline{a + b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



Opérateur XOR (ou exclusif)



a	b	$F = a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Algèbre de Boole: règles de calcul

notation: $+ =$ ou, $\cdot =$ et $\rightsquigarrow$ attention: $1 + 1 = 1$ en algèbre de Boole

commutativité

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ a \cdot b &= b \cdot a \end{aligned}$$

associativité

$$\begin{aligned} a + b + c &= (a + b) + c = a + (b + c) \\ a \cdot b \cdot c &= (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \end{aligned}$$

distributivité

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c) = a \cdot c + b \cdot c \\ a + (b \cdot c) &= (a + b) \cdot (a + c) \leftarrow \text{remarquable!} \end{aligned}$$

élements neutres

$$\begin{aligned} 1 \cdot a &= a \quad \text{(1 élément neutre du «et»)} \\ 0 + a &= a \quad \text{(0 élément neutre du «ou»)} \end{aligned}$$

éléments absorbants

$$\begin{aligned} 0 \cdot a &= 0 \\ 1 + a &= 1 \end{aligned}$$

idempotence

$$\begin{aligned} a \cdot a &= a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a \quad \text{(pas d'exposant)} \\ a + a &= a + a + \ldots + a = a \quad \text{(pas de coefficient)} \end{aligned}$$

Algèbre de Boole: règles de calcul avec $\overline{\text{négation}}$

propriétés de la négation

$$\begin{aligned}\overline{0} &= 1\\ \overline{1} &= 0\\ \overline{\overline{a}} &= a\end{aligned}$$

complémentarité

$$\begin{aligned}a \cdot \overline{a} &= 0\\ a + \overline{a} &= 1\end{aligned}$$

théorème de De Morgan

$$\begin{aligned}\overline{a \cdot b} &= \overline{a} + \overline{b}\\ \overline{a + b} &= \overline{a} \cdot \overline{b}\\ \overline{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \ldots \cdot n} &= \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d} + \cdots + \overline{n}\\ \overline{a + b + c + d + \cdots + n} &= \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} \cdot \ldots \cdot \overline{n}\end{aligned}$$

Algèbre de Boole

Corollaires des règles précédentes

absorption

$$\begin{aligned} a + (a \cdot b) &= a \\ a \cdot (a + b) &= a \end{aligned}$$

pas d'inverses

$$\begin{array}{lclcll} a \cdot b & = & x \cdot y & \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} & a \cdot b \cdot c & = & x \cdot y \cdot c \\ a + b & = & x + y & \Rightarrow & a + b + c & = & x + y + c \end{array}$$

On peut ajouter un terme dans les deux membres d'une égalité, mais pas en supprimer!

principe de dualité Toute expression logique demeure vraie si l'on remplace $+$ par $\cdot$ (et réciproquement) et 0 par 1 (et réciproquement).

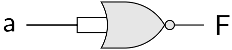
théorème du consensus

$$\begin{aligned} a \cdot x + b \cdot \overline{x} + a \cdot b &= a \cdot x + b \cdot \overline{x} \\ (a + x) \cdot (b + \overline{x}) \cdot (a + b) &= (a + x) \cdot (b + \overline{x}) \end{aligned}$$

Qualité de générateur de la fonction NOR

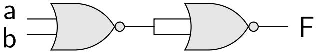
Toutes les fonctions logiques peuvent être exprimées en utilisant la fonction NOR, $F = \overline{a+b}$, elle constitue à elle seule une base complète:

NOT $F = \overline{a+a} = \overline{a}$

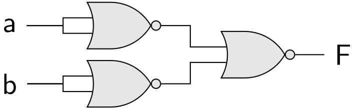


OR deux NOR, dont un fonctionnant en NOT:

$F = \overline{\overline{a+b}+\overline{a+b}} = \overline{\overline{a+b}} = a+b$



AND trois NOR, dont deux agissant en NOT sur les entrées du troisième: $F = \overline{\overline{a+a}+\overline{b+b}} = \overline{\overline{a}} \cdot \overline{\overline{b}} = a \cdot b$



et cætera

Autres bases: {NAND} (cf. TD), ou {NOT, AND}, ...

Démonstration d'égalités logiques

- Méthode algébrique: transformer un membre de l'égalité à l'aide des règles de l'algèbre de Boole jusqu'à retrouver l'autre.
- Comparaison de la valeur des deux côtés pour toutes les valeurs possibles des variables.
  C'est possible, il n'y en a qu'un nombre fini!
  (tables de vérité ou tableaux de Karnaugh).

Simplification de fonctions logiques

Question pratique: Parmi toutes les formes équivalentes d'une fonction logique, laquelle produit un circuit avec un minimum de composants ?

(NB: plutôt qu'un minimum de composants, on peut parfois vouloir minimiser la latence, utiliser préférentiellement des portes d'un certain type, ou autre chose — c'est l'application qui définit le cahier des charges)

$\rightsquigarrow$ Besoin de stratégies pour simplifier des fonctions.

Fonctions logiques: quelques définitions

Fonction logique association de sommes et de produits logiques

Forme disjonctive une somme de produits

Forme conjonctive un produit de sommes

Forme normale chaque terme contient l'ensemble des variables, p.ex.

$$f(x,y,z) = xyz + xy\overline{z} + \overline{x}yz$$
$$g(x,y,z) = (x+y+z)\cdot(x+\overline{y}+z)\cdot(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})$$

Fonction simplifiée fonction qui n'est pas sous forme normale

Rappel: «somme» et «produit» ne sont pas à prendre au sens arithmétique, mais désignent les opérations Booléennes «ou» et «et» (encore appelées «disjonction» et «conjonction»).

Du tableau de vérité à la fonction Booléenne

Point de départ: tableau de vérité
Première étape: écrire la fonction correspondante
Ensuite: la simplifier

Tableau de vérité → fonction Booléenne

Ligne	a	b	c	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Exemple: fonction $F(a, b, c)$ de trois variables
(valeurs de F choisies au hasard)

Expression de $F = \ldots$?

Observation: *si* on peut trouver F_3 tq.

$$F_3(a, b, c) = \begin{cases} 1 & \text{pour les entrées de la ligne 3:} \quad (a, b, c) = (0, 1, 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et F_4, F_6, F_7 analogues,
alors on peut écrire $F = F_3(a, b, c) + F_4(a, b, c) + F_6(a, b, c) + F_7(a, b, c)$
⇝ forme disjonctive normale

Tableau de vérité → fonction Booléenne

Ligne	a	b	c	F	Mintermes associés
0	0	0	0	0	$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$
1	0	0	1	0	$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c$
2	0	1	0	0	$\overline{a} \cdot b \cdot \overline{c}$
3	0	1	1	1	$\overline{a} \cdot b \cdot c$
4	1	0	0	1	$a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$
5	1	0	1	0	$a \cdot \overline{b} \cdot c$
6	1	1	0	1	$a \cdot b \cdot \overline{c}$
7	1	1	1	1	$a \cdot b \cdot c$

← Même exemple: fonction $F(a, b, c)$ de trois variables

Minterme: Produit qui est **vrai** dans une ligne & **faux** pour toutes les autres

Forme disjonctive normale

Somme des mintermes pour lesquels $F = 1$:
$F = \overline{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot c$

Tableau de vérité → fonction Booléenne

Ligne	a	b	c	F	Mintermes	Maxtermes
0	0	0	0	0	$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$	$a + b + c$
1	0	0	1	0	$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c$	$a + b + \overline{c}$
2	0	1	0	0	$\overline{a} \cdot b \cdot \overline{c}$	$a + \overline{b} + c$
3	0	1	1	1	$\overline{a} \cdot b \cdot c$	$a + \overline{b} + \overline{c}$
4	1	0	0	1	$a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$	$\overline{a} + b + c$
5	1	0	1	0	$a \cdot \overline{b} \cdot c$	$\overline{a} + b + \overline{c}$
6	1	1	0	1	$a \cdot b \cdot \overline{c}$	$\overline{a} + \overline{b} + c$
7	1	1	1	1	$a \cdot b \cdot c$	$\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$

← Même exemple: fonction $F(a, b, c)$ de trois variables

Minterme: Produit qui est **vrai** dans une ligne & **faux** pour toutes les autres

Maxterme: Somme qui est **fausse** dans une ligne & **vraie** dans toutes les autres

Forme disjonctive normale

Somme des mintermes pour lesquels $F = 1$:

$F = \overline{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot c$

Forme conjonctive normale

Produit des maxtermes pour lesquels $F = 0$:

$F = (a + b + c) \cdot (a + b + \overline{c}) \cdot (a + \overline{b} + c) \cdot (\overline{a} + b + \overline{c})$

Application concrète: arrondi d'un nombre décimal

Chiffre	a	b	c	d	F	Mintermes	Maxtermes
0	0	0	0	0	0	$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d}$	$a + b + c + d$
1	0	0	0	1	0	$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot d$	$a + b + c + \overline{d}$
2	0	0	1	0	0	$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c \cdot \overline{d}$	$a + b + \overline{c} + d$
3	0	0	1	1	0	$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c \cdot d$	$a + b + \overline{c} + \overline{d}$
4	0	1	0	0	0	$\overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} \cdot \overline{d}$	$a + \overline{b} + c + d$
5	0	1	0	1	1	$\overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} \cdot d$	$a + \overline{b} + c + \overline{d}$
6	0	1	1	0	1	$\overline{a} \cdot b \cdot c \cdot \overline{d}$	$a + \overline{b} + \overline{c} + d$
7	0	1	1	1	1	$\overline{a} \cdot b \cdot c \cdot d$	$a + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d}$
8	1	0	0	0	1	$a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d}$	$\overline{a} + b + c + d$
9	1	0	0	1	1	$a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot d$	$\overline{a} + b + c + \overline{d}$

Le chiffre à arrondir codé par les variables a, b, c, d.

$F = 0$ (arrondi vers le bas) pour un chiffre < 5,
$F = 1$ (arrondi vers le haut) pour un chiffre ≥ 5.

Forme disjonctive normale

Somme des mintermes pour lesquels $F = 1$:

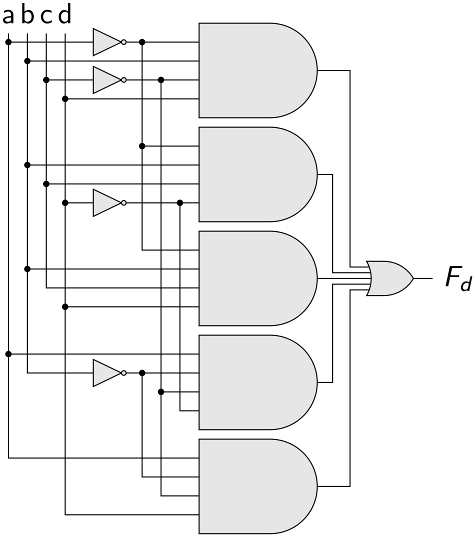
$$F_d = \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} \cdot d + \overline{a} \cdot b \cdot c \cdot \overline{d} + \overline{a} \cdot b \cdot c \cdot d + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot d$$

Forme conjonctive normale

Produit des maxtermes pour lesquels $F = 0$:

$$F_c = (a+b+c+d)\cdot(a+b+c+\overline{d})\cdot(a+b+\overline{c}+d)\cdot(a+b+\overline{c}+\overline{d})\cdot(a+\overline{b}+c+d)$$

Réalisation directe de F_d pour l'exemple de l'arrondi



Rappel:

$$
\begin{aligned}
F_d = {} & \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} \cdot d + \\
& \overline{a} \cdot b \cdot c \cdot \overline{d} + \\
& \overline{a} \cdot b \cdot c \cdot d + \\
& a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + \\
& a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot d
\end{aligned}
$$

Peut-on simplifier ce circuit ?

Récapitulatif: forme disjonctive normale d'une fonction

1. Pour chaque entrée pour laquelle la fonction logique vaut 1, former le minterme (produit de toutes les variables d'entrée), en affectant d'une négation les variables qui valent 0. Exemple:
   $F = 1$ pour $a = 0, b = 1, c = 1 \rightsquigarrow$ minterme $\overline{a} \cdot b \cdot c$
2. La forme disjonctive normale de la fonction logique est la somme (disjonction) de tous ces mintermes. Exemple
   $F = \overline{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot c$

Pas du tout la forme la plus compacte, mais sert de point de départ aux simplifications.

Simplification d'une fonction logique

Objectif: forme minimale (minimum de termes, minimum de variables dans chaque terme) $\rightsquigarrow$ réalisation simple, rapide, fiable, à moindre coût.

Il peut exister plusieurs formes minimales équivalentes.

- Méthodes algébriques.
  - Intuition: rapide pour des problèmes simples, efficacité selon l'expérience...
  - Algorithmes (exemple: Quine-McCluskey); pas discutés ici car assez techniques, avantage principal: complexité ne dépend pas beaucoup du nombre de variables, automatisable.
- Méthodes graphiques. Avantage: rapide et efficace pour des problèmes pas trop complexes (max. cinq six variables).
  - methode de Karnaugh (parfois aussi appelée Veitch-Karnaugh)

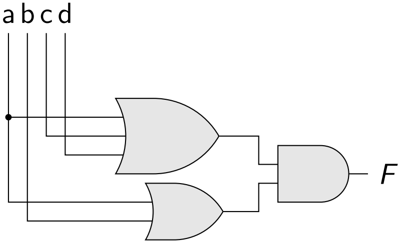
Simplification algébrique

Reprenons notre exemple d'une fonction d'arrondi:

$$
\begin{aligned}
F_d &= \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} \cdot d + \overline{a} \cdot b \cdot c \cdot \overline{d} + \overline{a} \cdot b \cdot c \cdot d + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot d \quad \text{forme disj. normale} \\
&= \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} \cdot d + \overline{a} \cdot b \cdot c \cdot d + \overline{a} \cdot b \cdot c \cdot \overline{d} + \overline{a} \cdot b \cdot c \cdot d + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot d \\
&= \overline{a} \cdot b \cdot d \cdot (\overline{c} + c) + \overline{a} \cdot b \cdot c \cdot (\overline{d} + d) + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot (\overline{d} + d) \\
&= \overline{a} \cdot b \cdot d + \overline{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_c &= (a + b + c + d) \cdot (a + b + c + \overline{d}) \cdot (a + b + \overline{c} + d) \cdot (a + b + \overline{c} + \overline{d}) \cdot (a + \overline{b} + c + d) \\
&= (a + b + c + d) \cdot (a + b + c + \overline{d}) \cdot (a + b + \overline{c} + d) \cdot (a + b + \overline{c} + \overline{d}) \\
&\qquad \cdot (a + b + c + d) \cdot (a + \overline{b} + c + d) \\
&= ((a + b + c) + (d \cdot \overline{d})) \cdot ((a + b + \overline{c}) + (d \cdot \overline{d})) \cdot ((a + c + d) + (b \cdot \overline{b})) \\
&= (a + b + c) \cdot (a + b + \overline{c}) \cdot (a + c + d) \\
&= ((a + b) + (c \cdot \overline{c})) \cdot (a + c + d) \\
&= (a + b) \cdot (a + c + d)
\end{aligned}
$$

Nouvelle réalisation: $F = (a + b) \cdot (a + c + d)$



Circuit déjà bien plus compact.
Peut-on faire encore mieux ?

Méthode de Karnaugh pour simplifier une fonction logique

d'après E.W. Veitch 1952, M. Karnaugh 1953

Tableaux carrés ou rectangulaires avec 2^n cases:
une pour chaque entrée possible du circuit.

Deux cases voisines se distinguent par le changement de valeur
d'une seule variable.

Principe: mise en évidence graphique de la simplification $a \cdot b + a \cdot \overline{b} = a$
(deux 1 voisins dans le tableau).

Tableaux de Karnaugh

pour une variable

a→	0	1
	1	0

Dans cet exemple: $F = \overline{a}$

$\rightsquigarrow$ la valeur 1 est inscrite à gauche (0 est omis).

pour deux variables

	0	1
0	1	1
1		

$F = \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot \overline{b} = (a + \overline{a}) \cdot \overline{b} = \overline{b}$

regroupement $\Rightarrow$ simplification

tableau de vérité:

$b \downarrow \; a \rightarrow$	0	1
0	$F(0,0)$	$F(1,0)$
1	$F(0,1)$	$F(1,1)$

mintermes associés:

	$\overline{a}$	a
$\overline{b}$	$\overline{a} \cdot \overline{b}$	$a \cdot \overline{b}$
b	$\overline{a} \cdot b$	$a \cdot b$

Tableaux de Karnaugh

pour une variable

a→	0	1
	1	0

Dans cet exemple: $F = \overline{a}$

$\rightsquigarrow$ la valeur 1 est inscrite à gauche (0 est omis).

pour deux variables

tableau de vérité:

$b \downarrow$ $a \rightarrow$	0	1
0	$F(0,0)$	$F(1,0)$
1	$F(0,1)$	$F(1,1)$

mintermes associés:

	$\overline{a}$	a
$\overline{b}$	$\overline{a} \cdot \overline{b}$	$a \cdot \overline{b}$
b	$\overline{a} \cdot b$	$a \cdot b$

	0	1
0	1	1
1		

$F = \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot \overline{b} = (a + \overline{a}) \cdot \overline{b} = \overline{b}$

regroupement $\Rightarrow$ simplification

	0	1
0	1	1
1		1

$$\begin{aligned} F &= \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot \overline{b} + a \cdot b \\ &= \color{red}{\overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot \overline{b}} + \color{blue}{a \cdot \overline{b} + a \cdot b} \\ &= \color{red}{\overline{b}} + \color{blue}{a} \end{aligned}$$

Case peut figurer dans plusieurs regroupements

Tableaux de Karnaugh

pour une variable

a→	0	1
	1	0

Dans cet exemple: $F = \overline{a}$

$\rightsquigarrow$ la valeur 1 est inscrite à gauche (0 est omis).

pour deux variables

tableau de vérité:

$b \downarrow$ $a \rightarrow$	0	1
0	$F(0,0)$	$F(1,0)$
1	$F(0,1)$	$F(1,1)$

mintermes associés:

	$\overline{a}$	a
$\overline{b}$	$\overline{a} \cdot \overline{b}$	$a \cdot \overline{b}$
b	$\overline{a} \cdot b$	$a \cdot b$

	0	1
0	1	1
1		

$F = \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot \overline{b} = (a + \overline{a}) \cdot \overline{b} = \overline{b}$

regroupement $\Rightarrow$ simplification

	0	1
0	1	1
1		1

$$
\begin{aligned}
F &= \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot \overline{b} + a \cdot b \\
&= \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot \overline{b} + a \cdot \overline{b} + a \cdot b \\
&= \overline{b} + a
\end{aligned}
$$

Case peut figurer dans plusieurs regroupements

	0	1
0		1
1	1	

$F = \overline{a} \cdot b + a \cdot \overline{b}$

	0	1
0	1	1
1	1	1

$F = 1$

	0	1
0		
1		

$F = 0$

Tableaux de Karnaugh: règles

1. Inscrire 1 dans les cases dans lesquelles $F = 1$.
2. Inscrire X dans les cases dont l'entrée n'existe pas (où F peut prendre une valeur quelconque).
3. Associer toutes les cases de 1 en rectangles
   - chaque 1 doit être dans au moins un rectangle
   - un rectangle peut contenir des 1 ou des X, mais pas de cases vides
   - seuls rectangles avec 2^n cases autorisés (1,2,4,8,...)
   - un rectangle peut sortir du tableau pour pénétrer du côté opposé
   - pas de diagonales ou autres formes
4. Un groupement de 2^k cases donne lieu à un terme de $n - k$ variables (celles dont l'opposé apparaît également dans le groupe sont rayées).
5. La fonction simplifiée est la somme de ces termes.

Pour une expression minimale il importe de trouver les regroupements les plus grands. Commencer par les 1 qui n'ont qu'une façon de se grouper.

Méthode de Karnaugh (mintermes)

Tableau de Karnaugh pour trois variables

$b \downarrow \; ac \rightarrow$	10	11	01	00
1	$ab\overline{c}$	abc	$\overline{a}bc$	$\overline{a}b\overline{c}$
0	$a\overline{b}\overline{c}$	$a\overline{b}c$	$\overline{a}\overline{b}c$	$\overline{a}\overline{b}\overline{c}$

	10	11	01	00
1				1
0	1			1

$F = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$

	10	11	01	00
1				
0	1	1	1	

$F = a \cdot \overline{b} + c \cdot \overline{b} =$
$(a + c) \cdot \overline{b}$

	10	11	01	00
1	1	1	1	1
0	1	1		

$F = a + b$

	10	11	01	00
1	1	1	1	
0			1	

$F = a \cdot b + \overline{a} \cdot c$

Méthode de Karnaugh (mintermes)

Tableau de Karnaugh pour quatre variables

$bd \downarrow \; ac \rightarrow$	10	11	01	00
10	$ab\overline{c}\overline{d}$	$abc\overline{d}$	$\overline{a}bc\overline{d}$	$\overline{a}b\overline{c}\overline{d}$
11	$ab\overline{c}d$	$abcd$	$\overline{a}bcd$	$\overline{a}b\overline{c}d$
01	$a\overline{b}\overline{c}d$	$a\overline{b}cd$	$\overline{a}\overline{b}cd$	$\overline{a}\overline{b}\overline{c}d$
00	$a\overline{b}\overline{c}\overline{d}$	$a\overline{b}c\overline{d}$	$\overline{a}\overline{b}c\overline{d}$	$\overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}$

	10	11	01	00
10	1			1
11		1		
01		1	1	
00	1			1

$$F = \overline{c} \cdot \overline{d} + a \cdot c \cdot d + \overline{b} \cdot c \cdot d$$

Pour notre exemple d'arrondissement:

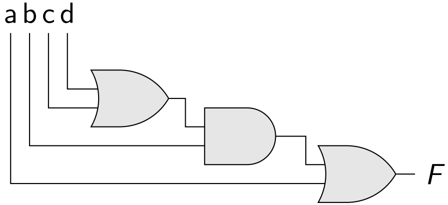
$$F_d = \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} \cdot d + \overline{a} \cdot b \cdot c \cdot \overline{d} + \overline{a} \cdot b \cdot c \cdot d + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot d$$

	10	11	01	00
10	X	X	1	
11	X	X	1	1
01	1	X		
00	1	X		

$$F = a + b \cdot d + b \cdot c$$

Réalisation de la fonction d'arrondi minimisée par Karnaugh

$$F = a + b \cdot d + b \cdot c = a + b \cdot (c + d)$$



Méthode de Karnaugh (mintermes)

Pour plus de 4 variables il faut juxtaposer plusieurs tableaux: même principe mais de plus en plus fastidieux. . . .

Tableaux de Karnaugh: règles

1. Inscrire 1 dans les cases dans lesquelles $F = 1$.
2. Inscrire X dans les cases dont l'entrée n'existe pas (où F peut prendre une valeur quelconque).
3. Associer toutes les cases de 1 en rectangles
   - chaque 1 doit être dans au moins un rectangle
   - un rectangle peut contenir des 1 ou des X, mais pas de cases vides
   - seuls rectangles avec 2^n cases autorisés (1,2,4,8,...)
   - un rectangle peut sortir du tableau pour pénétrer du côté opposé
   - pas de diagonales ou autres formes
4. Un groupement de 2^k cases donne lieu à un terme de $n - k$ variables (celles dont l'opposé apparaît également dans le groupe sont rayées).
5. La fonction simplifiée est la somme de ces termes.

Pour une expression minimale il importe de trouver les regroupements les plus grands. Commencer par les 1 qui n'ont qu'une façon de se grouper.

Fin du premier cours

TD en trois groupes lundi prochain (8 octobre).

Prochain cours le mardi 16 octobre!