4.7 Mathematisches Beispiel zum Grenzübergang Re $\to \infty$

Da die vorstehenden Überlegungen zu den wichtigsten Grundlagen der Grenzschicht-Theorie gehören, möge der ihnen zugrunde liegende Sachverhalt noch an einem sehr einfachen mathematischen Beispiel erläutert werden, das von L. Prandtl[1] angegeben wurde.

Wir betrachten die Schwingung eines Massenpunktes mit Dämpfung. Hierfür gilt die Differentialgleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + cx = 0\,. \tag{4.62}$$

Hierbei bedeuten m die schwingende Masse, k die Dämpfungskonstante, c die Federkonstante, x die Entfernung der Masse aus der Ruhelage und t die Zeit.

Als Anfangsbedingung sei vorgegeben

$$t = 0: \quad x = 0\,. \tag{4.63}$$

Analog zu den Navier-Stokes-Gleichungen mit sehr kleiner kinematischer Viskosität ν betrachten wir hier den Grenzfall sehr kleiner Masse m, da dann auch in Gl. (4.62) das Glied mit der höchsten Ordnung sehr klein wird.

Die vollständige Lösung von (4.62) mit der Anfangsbedingung (4.63) lautet

$$x = A[e^{-(ct/k)} - e^{-(kt/m)}] \qquad m \to 0\,, \tag{4.64}$$

wobei A eine freie Konstante ist, die noch durch eine zweite Anfangsbedingung festgelegt werden könnte.

Setzt man in Gl. (4.62) $m = 0$, erhält man die vereinfachte Differentialgleichung

$$k\frac{dx}{dt} + cx = 0\,, \tag{4.65}$$

die jetzt eine Differentialgleichung erster Ordnung ist mit der Lösung

$$x_\mathrm{a}(t) = Ae^{-(ct/k)}\,. \tag{4.66}$$

Durch die spezielle Wahl des zunächst beliebigen Faktors A stimmt diese Lösung mit dem ersten Glied der vollständigen Lösung überein. Sie kann jedoch nicht die Anfangsbedingung (4.63) erfüllen. Sie ist also eine Lösung für große Zeiten („äußere" Lösung).

Für die Lösung bei kleinen Zeiten („innere" Lösung) läßt sich aus Gl. (4.62) ebenfalls eine vereinfachte Differentialgleichung herleiten. Zu diesem Zweck wird durch „Streckung" der Zeitkoordinate t eine neue „innere" Variable

$$t^* = \frac{t}{m} \tag{4.67}$$

eingeführt. Mit dieser lautet Gl. (4.62)

$$\frac{d^2x}{dt^{*2}} + k\frac{dx}{dt^*} + m\,c\,x = 0\,. \tag{4.68}$$

Für $m = 0$ ergibt sich daraus die Differentialgleichung für die „Innenlösung"

$$\frac{d^2x}{dt^{*2}} + k\frac{dx}{dt^2} = 0 \tag{4.69}$$

---

[1] L. Prandtl, Anschauliche und nützliche Mathematik. Vorlesung Göttingen, WS 1931/32.

mit der Lösung

$$x_i(t^*) = A_1 e^{-kt^*} + A_2 \,. \tag{4.70}$$

Diese Differentialgleichung bleibt trotz der Vereinfachung von zweiter Ordnung. Sie kann die Anfangsbedingung (4.63) erfüllen. Es gilt dann

$$A_1 = -A_2 \,. \tag{4.71}$$

Die Bestimmung der Konstanten A_2 erfolgt durch Anpassung an die „Außenlösung" entsprechend Gl. (4.66). In einem Übergangsgebiet, d.h. für mittlere Zeiten, müssen die Lösungen nach Gl. (4.66) und (4.70) übereinstimmen. Es muß gelten:

$$\lim_{t^* \to \infty} x_i(t^*) = \lim_{t \to 0} x_a(t) \,. \tag{4.72}$$

In Worten besagt die Anpassungsbedingung: Der „äußere" Grenzwert der inneren Lösung ist gleich dem „inneren" Grenzwert der äußeren Lösung. Aus Gl. (4.72) folgt sofort

$$A_2 = A \tag{4.73}$$

und damit für die Innenlösung

$$x_i(t^*) = A(1 - e^{-kt^*}) \,. \tag{4.74}$$

Man erhält diese Lösung auch aus der vollständigen Lösung nach Gl. (4.64), wenn man in dieser das erste Glied für kleine t entwickelt und nur das erste Glied der Entwicklung berücksichtigt, also

$$\lim_{t \to 0} e^{-(ct/k)} = 1 \tag{4.75}$$

setzt. Die beiden Lösungen, Außenlösung nach Gl. (4.66) und Innenlösung nach Gl. (4.74), stellen die Gesamtlösung dar, wenn man jede in ihrem Gültigkeitsbereich verwendet.

Bei festem t geht Gl. (4.64) für $m \to 0$ in die Außenlösung über. Man erhält aus den Teillösungen die Gesamtlösung, die für den gesamten t-Bereich gilt (engl.: composite solution), indem man beide Lösungen addiert, wobei jedoch der gemeinsame Teil der Lösungen nach Gl. (4.72) nur einmal berücksichtigt werden darf, also wieder abgezogen werden muß:

$$x(t) = x_a(t) + x_i(t^*) - \lim_{t^* \to \infty} x_i(t^*) = x_a(t) + x_i(t^*) - \lim_{t \to 0} x_a(t) \,. \tag{4.76}$$

Nach dieser Vorschrift folgt aus den beiden Einzellösungen die Gesamtlösung nach Gl. (4.64).

Eine graphische Darstellung der Gesamtlösung nach Gl. (4.64) ist in Bild 4.2 für $A > 0$ gegeben. Kurve a entspricht der Außenlösung (4.66). Die Kurven b, c und d entsprechen der Gesamtlösung (4.64), wobei der Wert von m in Richtung von b nach d abnimmt.

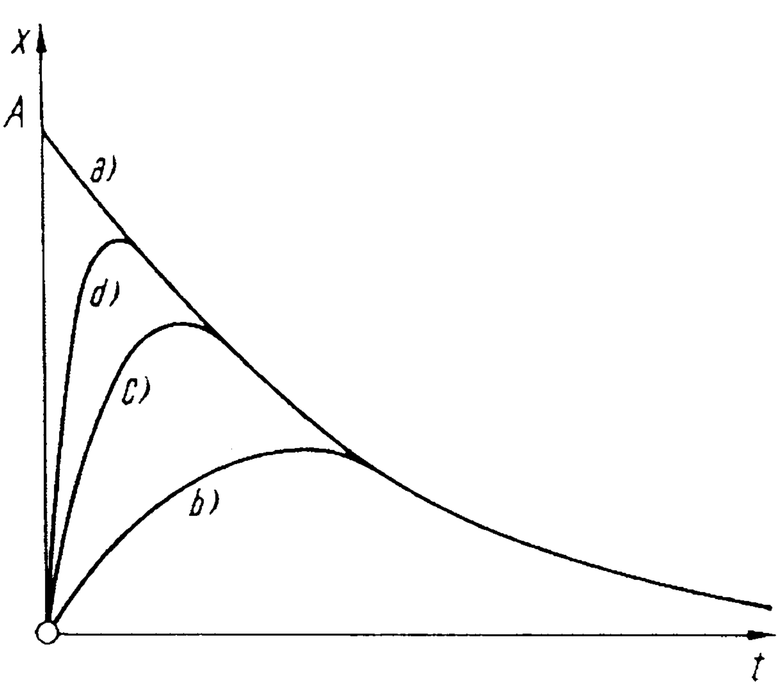

Bild 4.2. Lösung der Schwingungsgleichung (4.62) für $m \to 0$.
(a) Lösung der vereinfachten Differentialgleichung (4.65), $m = 0$;
(b) (c), (d) Lösungen der vollständigen Differentialgleichung (4.62) für verschiedene Werte m. Für kleine Werte m, Kurve (d), hat die Lösung „Grenzschichtcharakter".