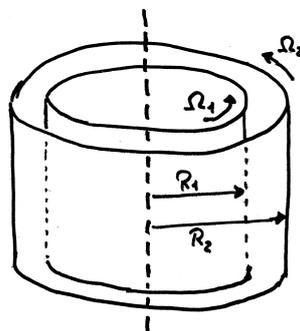


# TD1 — Écoulements parallèles en géométries courbes

M2 ICFP Physique des Liquides – Adrian Daerr\*

## 1 Écoulement et viscosimètre de Couette



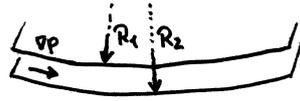
Un dispositif de Couette<sup>1</sup> cylindrique est composé de deux cylindres concentriques de longueur  $L$ , de rayons intérieur  $R_1$  et extérieur  $R_2$  ( $L \gg R_2 - R_1$ ). On place dans l'entrefer un fluide incompressible de masse volumique  $\rho$  et de viscosité dynamique  $\eta$  et on impose une rotation uniforme à chacun des cylindres. On s'intéresse au régime stationnaire.

1. Quelles sont les symétries du système ? Que peut-on en déduire pour l'écoulement ? Dans quelles limites ? Avec l'hypothèse d'incompressibilité du fluide, en déduire de quelle forme est la vitesse.
2. Écrire les équations du mouvement et en déduire l'expression de la vitesse dans l'entrefer pour un écoulement stationnaire, lorsqu'on impose les vitesses de rotation  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  constantes aux cylindres intérieur et extérieur. La viscosité intervient-elle ? Pourquoi ?
3. Quelle est la vorticité de cet écoulement ? Quelle partie du champ de vitesse y contribue ?
4. Déterminer les couples s'exerçant sur les cylindres intérieur et extérieur. Que peut-on en dire ? Comment agit le couple sur le cylindre intérieur quand  $\Omega_1 = 0$  et  $\Omega_2 > 0$  ? Et quand  $\Omega_1 > 0$  et  $\Omega_2 = 0$  ? Et pour le cylindre externe ?

\*La première version de l'exercice a été élaborée par Philippe Gondret.

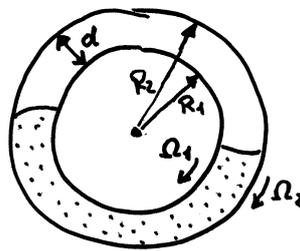
1. Maurice Couette (1858–1943) réalisa sa thèse théorique et expérimentale sur ce dispositif en 1888. Son appareil, construit par Eugène Ducretet (qui construisit aussi le premier télégraphe sans fil), était très ingénieux et lui permit de mesurer avec une grande précision la viscosité de l'eau et de l'air. En 1923, G.I. Taylor (1866–1975) montra à la fois théoriquement et expérimentalement la déstabilisation de l'écoulement de Couette en tourbillons annulaires contrarotatifs dans le cas où le cylindre intérieur tourne tandis que le cylindre extérieur est fixe.

## 2 Écoulement de Poiseuille courbe



On considère maintenant l'écoulement entre deux plaques de rayons de courbure  $R_1$  et  $R_2$  et d'extension transverse  $L \gg R_2 - R_1$  (cf. figure). L'écoulement de fluide est induit par un gradient de pression constant appliqué suivant la direction azimuthale (orthoradiale) et indépendant de  $\theta$ . On s'intéresse au régime stationnaire. Partant des équations de Navier-Stokes, procéder aux simplifications adéquates et établir les équations du mouvement. En déduire le profil de vitesse de l'écoulement stationnaire.

## 3 Écoulement de Taylor–Dean



On considère désormais un dispositif analogue à un viscosimètre de Couette cylindrique, placé horizontalement et partiellement rempli de fluide (cf. figure). On suppose que l'entrefer  $d = R_2 - R_1$  est petit devant la longueur  $L$  du cylindre et que la cellule est à moitié remplie. On s'intéresse encore une fois au régime stationnaire.

1. Comment le système atteint-il le régime stationnaire ? En quoi le problème est-il lié aux deux précédents ? Loin des surfaces libres, que peut-on dire des composantes  $u_r$  et  $u_\theta$  ? Y dessiner qualitativement champ de vitesse et lignes de courant. Mêmes choses au voisinage des deux surfaces libres. Avec la relation d'incompressibilité, y estimer l'ordre de grandeur des zones perturbées.
2. En se servant des résultats des deux problèmes précédents, exprimer sans calcul la forme du champ de vitesse loin des surfaces libres. Donner les conditions aux limites et la condition supplémentaire qui permettent de résoudre le problème.
3. Pour simplifier les calculs, on se place dans l'hypothèse de faible entrefer et faible courbure ( $d \ll R_1, R_2$ ). On considérera alors que l'écoulement est la superposition d'un écoulement de Couette plan et de Poiseuille plan. Dans ces conditions, en introduisant le rapport des vitesses de rotation  $\mu = \Omega_2/\Omega_1$  et la position adimensionnée dans le gap  $y = (r - R_1)/d$ , montrer que le champ de vitesse s'écrit

$$u_\theta(y) = \Omega_1 R_1 [1 - 2(2 + \mu)y + 3(1 + \mu)y^2]$$

4. Exprimer la différence de niveau liquide  $\Delta h$  qui apparaît en fonction des différents paramètres.
5. Dessiner le champ de vitesse pour quelques rapports de rotation, par exemple  $\mu = 1, 0$  et  $-1$ .