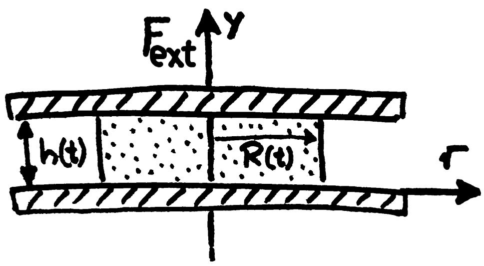
TD2 — Écoulements quasi-parallèles et lubrification

M2 ICFP Physique des Liquides – Adrian Daerr*

1 Adhésion hydrodynamique

On considère une goutte de liquide visqueux confinée entre deux plaques parallèles proches l'une de l'autre: la distance de séparation h est très petite devant l'extension radiale R de la goutte ($h \ll R$). On souhaite calculer la dynamique de séparation des plaques dans la configuration où on tire à force constante F_{ext} sur une plaque perpendiculairement à celle-ci. Cette force peut être le poids de la plaque si la configuration est horizontale. On négligera ici tout phénomène de tension superficielle et problèmes de mouillage.



1. Compte tenu de la symétrie du problème, de quelle forme sera le champ de vitesse ?
2. Ecrire les équations du mouvement du fluide.
3. En intégrant ces équations compte tenu des conditions aux limites, calculer le champ de vitesse $u_r(y)$. Commenter. Calculer ensuite le débit radial $Q(r)$.
4. En faisant un bilan de matière entre deux rayons voisins r et $r + dr$ pendant le temps dt, montrer que l'on aboutit à l'équation de Reynolds suivante:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rh^3\frac{\partial p}{\partial r}\right) = 12\eta\frac{\partial h}{\partial t}$$

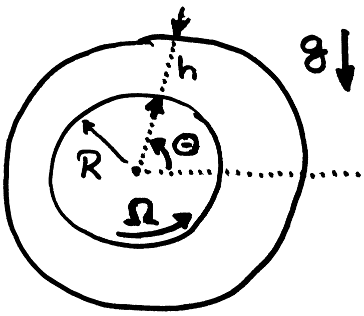
5. Intégrer l'équation de Reynolds en tenant compte des conditions aux limites (on tiendra compte du fait que la pression ne peut pas devenir infinie) pour obtenir le champ de pression. Réexprimer la vitesse. Dépend-elle de la viscosité ? Comment dépend-elle de r ?

*La première version de l'exercice a été élaborée par Philippe Gondret.

6. En considérant le mouvement de la plaque comme quasi-stationnaire, en déduire l'évolution temporelle de l'écartement $h(t)$ entre plaques sous l'action de la force extérieure supposée constante F_{ext}, à partir de l'écartement initial h_0 au temps initial. On précisera ce que vaut le temps caractéristique d'évolution τ.
7. On souhaite maintenant descendre la plaque supérieure à la vitesse V. Calculer la force extérieure qu'il faut appliquer en fonction de la distance h et des paramètres du problème.
8. Vérifier *a posteriori* s'il était justifié de négliger les différents termes de l'équation de Navier-Stokes.

2 Manchon de miel

Quand on prend du miel pour l'étaler sur une tranche de pain, il vaut mieux tourner la cuillère ou le couteau pour en prendre le plus possible et éviter d'en faire tomber. De même, quand on fait cuire une viande au tourne-broche, la quantité de jus qui tombera dépendra de la vitesse de rotation. Dans l'optique de mieux comprendre cette problématique, nous nous proposons ici de résoudre le problème modèle d'un cylindre tournant entouré d'un manchon de liquide[1].



Considérons un cylindre de rayon R tournant horizontalement à la vitesse angulaire Ω et entouré d'une couche d'épaisseur h(θ,t) d'un fluide de diffusivité visqueuse $\nu = \eta/\rho$. On cherche à étudier le régime stationnaire où l'épaisseur h du film liquide ne dépend plus que de l'angle θ par rapport à l'horizontale. On se place dans l'approximation de lubrification où les effets d'inertie de rotation seront considérés faibles devant les effets visqueux, l'épaisseur du film h faible par rapport au rayon R du cylindre et les déformations du film faibles devant son épaisseur. On négligera par ailleurs les effets de la viscosité de l'air ambiant, ainsi que ceux liés à la tension de surface du film. On note g l'accélération de la pesanteur.

1. Écrire les équations du mouvement. Quels termes sont négligeables ? A quelles conditions ?
2. Déterminer le champ de vitesse dans le fluide (on pose $y = r - R$ pour simplifier les notations). Tracer ce champ de vitesse en $\theta = 0$, $\pi/2$, π et $3\pi/2$.
3. En déduire le débit $Q(\theta)$ par unité de longueur de cylindre.

1. Problème proposé et résolu par H.K. Moffatt dans les années 1970 : "Behaviour of a viscous film on the outer surface of a rotating cylinder," Journal de Mécanique **16**(5), pp. 651–673 (1977).

4. En écrivant la conservation de la masse dans une tranche de fluide, montrer qu'on obtient dans le régime général (faiblement) instationnaire:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{g}{3\nu R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \cos\theta \right).$$

5. Montrer que, dans le cas stationnaire, on a la relation suivante entre l'épaisseur h et l'angle θ:

$$F(h) = \frac{g}{3\nu} h^3 \cos\theta - \Omega R h + Q = 0.$$

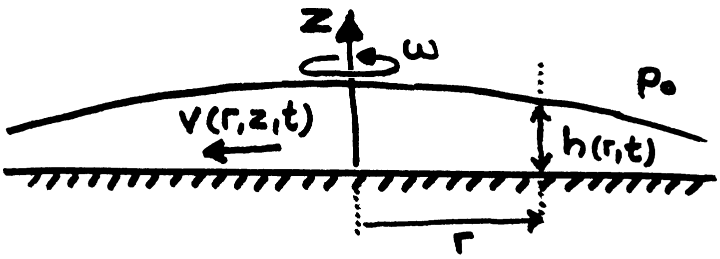
6. Montrer qu'on ne peut avoir de film discontinu en régime stationnaire. Analyser graphiquement $F(h)$ en quelques orientations ($\theta = \pm\pi/2,\ 0,\ \pi$). Montrer que la condition pour avoir une solution $h(\theta)$ continue stationnaire s'écrit pour le débit:

$$Q \leq \frac{2}{3} \Omega R \sqrt{\frac{\Omega R \nu}{g}}.$$

7. En déduire l'ordre de grandeur (à un coefficient numérique près) de la quantité maximale de liquide qu'il est possible de maintenir ainsi autour du cylindre (par unité de longueur) en fonction des paramètres R, Ω, η, ρ et g du problème.

3 Spin-coating

La technique du «spin coating» est très utilisée dans l'industrie électronique: elle consiste à déposer sur un disque (un substrat ou «wafer» de silicium par exemple) une couche épaisse d'un liquide qu'on veut étaler avec une épaisseur fine bien contrôlée. Pour cela, on met le disque en rotation à une grande vitesse angulaire Ω. Le fluide est mis en mouvement sous l'effet de la force centrifuge et est éjectée sur le pourtour du disque. On arrête le processus lorsque la couche de fluide a atteint l'épaisseur souhaitée.



On modélise ici le problème en supposant qu'on peut localement considérer l'écoulement comme formé d'une composante radiale de vitesse $u_r(r, z, t)$ et d'une composante orthoradiale $u_\theta(r)$ égale à la vitesse locale de la surface du disque. On suppose que la pente de la surface de la couche est faible ou nulle. On appelle p_0 la pression atmosphérique à l'extérieur du fluide. La couche fluide est par ailleurs supposée avoir une symétrie de révolution autour de l'axe de $r = 0$. Le fluide est supposé newtonien, incompressible, de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η (diffusivité ν). On néglige les forces de gravité et de capillarité et on suppose enfin l'écoulement quasi-stationnaire.

1. Quelle est la distribution de pression à l'intérieur de la couche compte tenu des hypothèses précédentes ? Quelle est la composante orthoradiale $u_\theta(r)$ de la vitesse dans le référentiel fixe du laboratoire ?

2. En considérant que l'écoulement satisfait aux approximations de lubrification, écrire les équations du mouvement dans le référentiel fixe du laboratoire. Déterminer le profil de vitesse radiale $u_r(z)$ après avoir explicité les conditions aux limites.
3. Montrer que le débit local radial $q(r)$ vérifie:
$$q = \frac{2\pi\Omega^2 r^2 h^3}{3\nu}$$
4. Montrer que la prise en compte de la conservation de la masse conduit à la relation
$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\Omega^2}{\nu}\left(\frac{2}{3}h^3 + rh^2\frac{\partial h}{\partial r}\right). \tag{1}$$
5. Supposons l'épaisseur h constante et égale à une valeur h_0 à l'instant initial $t = 0$. Que devient l'équation (**??**) ? Montrer qu'on obtient alors en intégrant cette équation la relation
$$h(t) = h_0\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{-1/2},$$
où on précisera ce que vaut la constante de temps τ. Que devient $h(t)$ pour $t \gg \tau$?
6. On suppose une vitesse de rotation de 30 tours/s et un fluide de viscosité $0,01$ Pa s et de masse volumique 10^3 kg/m^3 avec une épaisseur initiale de $0,5$ mm. Quelle est la valeur du temps τ ? Quelle est l'épaisseur du film au bout de 10 s et 100 s de rotation ?
7. Calculer *a posteriori* à quelle condition sur le temps le terme non linéaire $u_r\partial u_r/\partial r$ et le terme instationnaire $\partial u_r/\partial t$ sont effectivement négligeables devant le terme visqueux $\nu\,\partial^2 u_r/\partial z^2$.