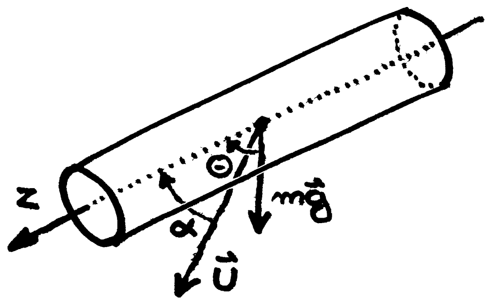
TD3 — Écoulements à faible nombre de Reynolds

M2 ICFP Physique des Liquides – Adrian Daerr*

1 Chute d'un bâtonnet

On cherche à déterminer la trajectoire que va prendre un bâtonnet chutant sous son propre poids dans un fluide visqueux et en régime stationnaire. On modélise le bâtonnet par un cylindre. On note θ l'angle du cylindre par rapport à la verticale.



1. En tenant compte des symétries du problème, que peut-on dire des tenseurs A, B, C et D reliant les forces et couples exercés aux vitesses de translation et de rotation ? En définissant les coefficients de frottements perpendiculaire $\lambda_\perp = A_{xx}$ et parallèle $\lambda_\parallel = A_{zz}$ à l'axe z, exprimez les tenseurs A, B et C. A-t-on besoin de connaître le tenseur D ?
2. Pour un cylindre de longueur L et de rayon R, on montre que

$$\lambda_\parallel = \frac{4\pi L}{\log(L/R) - 0,72} \quad \text{et} \quad \lambda_\perp = \frac{8\pi L}{\log(L/R) + 0,5}$$

   Que devient le rapport $\lambda_\perp/\lambda_\parallel$ lorsque le cylindre est très allongé ?
3. Pour un cylindre très allongé, déterminer la relation entre les angles θ et α, où α est l'angle entre la trajectoire et l'axe du cylindre. En déduire l'angle de déviation $\theta - \alpha$ en fonction de l'inclinaison θ du cylindre. Représentez-vous la trajectoire du cylindre lors de sa chute. Quelle est la valeur maximale possible de l'angle de déviation ? Pour quelle valeur de θ ? Pour ces deux dernières questions, on aura avantage à raisonner sur la fonction $\tan(\theta - \alpha)$.

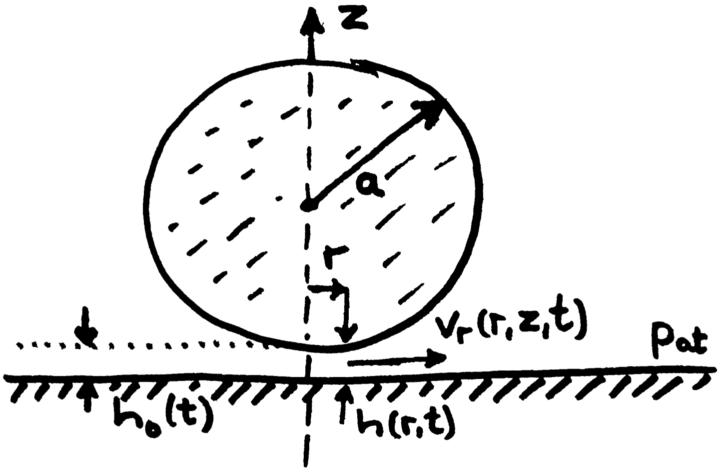
*La première version de l'exercice a été élaborée par Philippe Gondret.

2 Mouvement d'une sphère vers un plan

On analyse le mouvement d'une sphère solide indéformable de rayon a et de densité ρ_s descendant sous l'action de la pesanteur vers un plan horizontal solide infini dans un fluide newtonien incompressible de masse volumique ρ et de diffusivité visqueuse ν (viscosité dynamique η). On suppose que l'écoulement est toujours laminaire. On néglige enfin les forces telles que les forces de van der Waals ou les autres forces à courte portée.

2.1 Cas d'une sphère lisse

1. La sphère est d'abord supposée parfaitement lisse et située loin du plan. On suppose qu'elle se déplace assez lentement pour que le nombre de Reynolds de l'écoulement reste très inférieur à 1. On appelle U_∞ la vitesse de chute (verticale) de la sphère en régime stationnaire. Rappeler l'expression de la force résultante sur la sphère en mouvement et déterminer l'expression de U_∞ en fonction des paramètres du problème.
2. On suppose maintenant que la sphère est très proche du plan à une distance minimum h_0 très inférieure au rayon a. On suppose que les conditions d'application de l'approximation de lubrification sont vérifiées entre la sphère et le plan et que l'épaisseur locale $h(r,t)$ de la couche de fluide à une distance r de l'axe vertical de la sphère vérifie $h(r,t) = h_0(t) + (r^2/2a)$.



   a) Exprimer la relation exprimant la conservation de la masse de fluide située entre le plan et la sphère entre les distances r et $r + dr$ à l'axe vertical de la sphère. Démontrer qu'elle peut être écrite sous la forme

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rh\overline{V_r}\right),$$

   où $\overline{V_r}(r,t)$ est la moyenne sur l'épaisseur $h(r,t)$ de la couche de fluide de la composante radiale $V_r(r,z,t)$ de la vitesse en un point $M(r,z)$ donné: $\overline{V_r}(r,t) = [1/h(r,t)] \int_0^{h(r,t)} V_r(r,z,t)\mathrm{d}z$.

   b) Calculer l'expression de la vitesse radiale $V_r(r,t)$ en fonction du gradient de pression $\partial p/\partial r$. En déduire que l'équation précédente peut être récrite sous la forme

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{12\eta r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rh^3\frac{\partial p}{\partial r}\right),$$

c) Démontrer alors que si on appelle p_{at} la pression en dehors de la partie mince de la couche de fluide au niveau du plan, la pression p à une distance r où l'épaisseur de la couche de fluide est égale à h vérifie [1]

$$p = p_{\mathrm{at}} - \frac{3\eta a}{h^2}\frac{\partial h}{\partial t}$$

d) En déduire que la force F résultante des forces de pression sur la sphère (toujours quand h_0 est assez petit) vérifie

$$F = -6\pi\eta\frac{a^2}{h_0}\frac{dh_0}{dt}$$

Comparer cette valeur avec la force sur une sphère en mouvement loin de toute paroi.

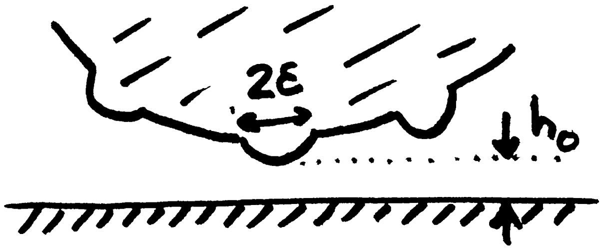
e) En déduire l'équation vérifiée par dh_0/dt si la sphère sédimente sous l'effet de son propre poids (à quelle condition le mouvement est-il quasi-statique ?) Calculer alors la valeur de h_0 au temps t connaissant la distance initiale h_{0i} au temps 0 (toujours avec h_0 et $h_{0i} \ll a$). Tracer $h_0(t)$. Quel est le temps caractéristique τ de variation de h_0 ? Quand la sphère touche-t-elle le plan ?

f) Il est possible (mais long et difficile) de montrer que pour une distance h_0 quelconque de la sphère au plan, la force sur la sphère vérifie avec une bonne approximation

$$F = -6\pi\eta\left(1 + \frac{a}{h_0}\right)\frac{dh_0}{dt}. \tag{1}$$

Indiquer pourquoi ce résultat est (au moins) cohérent avec ceux des parties précédentes (?? et ??).

2.2 Cas d'une sphere rugueuse



3. On veut s'inspirer de et généraliser ces résultats pour proposer un moyen simple d'estimer la rugosité d'une sphère rugueuse toujours plongée dans un liquide de viscosité η et en présence d'un plan horizontal. La rugosité de la sphère de rayon a est modélisée comme un ensemble de petites demi-sphères de rayon ε avec $\varepsilon \ll a$. La distance $h_0(t)$ est toujours définie comme la distance minimum entre le plan et la surface de la sphère (rugosités comprises) à un instant donné. On suppose que, lorsque la sphère arrive jusqu'au plan, le contact s'opère lorsqu'un nombre n des demi-sphères sont à une distance h_{0m} du plan de l'ordre d'une fraction de nanomètre.

---

1. Indice: on aura intérêt ici à utiliser la variable h au lieu de la variable r pour certains calculs.

a) Indiquer pourquoi $n = 3$ est une valeur raisonnable si la densité de rugosités est assez élevée. On utilisera cette valeur dans la suite.

b) Justifier en s'inspirant de l'équation (**??**) et de la réflexion précédente pourquoi on peut prendre comme expression approchée de la force F exercée par le fluide sur la sphère rugueuse descendant vers le plan:

$$F = -6\pi\eta \left(1 + \frac{a}{h_0 + \varepsilon} + \frac{3\varepsilon^2}{a h_0}\right) \frac{dh_0}{dt}.$$

4. On retourne le plan en maintenant la sphère rugueuse en contact avec celui-ci (toujours à l'intérieur du fluide). Au temps origine $t = 0$, on laisse la sphère libre de s'écarter du plan par en- dessous sous l'action de la pesanteur.

   a) Les résultats des parties précédentes (**??** à **??**) peuvent-ils servir pour résoudre ce problème ?

   b) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $h_0(t)$? Démontrer que $h_0(t)$ vérifie l'équation implicite

   $$h_0 - h_{0m} + a \log\left(\frac{h_0 + \varepsilon}{h_{0m} + \varepsilon}\right) + \frac{3\varepsilon^2}{a} \log\left(\frac{h_0}{h_{0m}}\right) = \frac{2(\rho_x - \rho) g a^2}{9\eta} t,$$

   où h_{0m} est la distance initiale plan-rugosités. Montrer en évaluant les différents termes que, pour des valeurs typiques de la rugosité (quelques microns) et des valeurs de h_{0m} de l'ordre des distances atomiques ($0.5 \cdot 10^{-9}$ m), l'influence de h_{0m} (ainsi que celle de n) sur les temps de trajet sera négligeable par rapport aux autres termes.

   c) La mesure d'un temps de chute depuis le plan permet alors d'estimer la rugosité relative ε/a en fonction des autres paramètres du problème, et la mesure de deux temps de chute successifs permet même de s'affranchir des autres paramètres du problème. Ainsi, montrer que la mesure des temps de chute t_a et t_{2a} nécessaires pour s'éloigner de la position de contact des distances respectives a et $2a$ permet d'estimer la rugosité relative suivant l'expression

   $$\frac{\varepsilon}{a} = 2 \exp\left(2 - \frac{t_{2a}(1 + \log 2)}{t_{2a} - t_a}\right).$$

   d) Evaluer les temps t_a et t_{2a} (et le rapport t_{2a}/t_a) pour des billes de diamètre $2a = 1\,\mathrm{mm}$ avec des rugosités ε de 1 ou 10 μm et une densité ρ_s de $1050\,\mathrm{kg/m^3}$. On prendra la viscosité η du fluide égale à 10^{-2} ou 10^{-1} Pa s, sa densité ρ de $1000\,\mathrm{kg/m^3}$, et $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.