Illustration simple du raccordement asymptotique *

cours d'hydrodynamique, M2IPE, Adrian Daerr

Considérons une equation plus simple que celle de Navier-Stokes, en l'occurrence celle d'un oscillateur harmonique amorti :

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0$$

m est la masse, μ le coefficient d'amortissement, k la raideur du ressort, x l'écart à la position d'équilibre, et t le temps. Nous cherchons la solution satifaisant la condition initiale $x(t=0) = 0$ et $\dot{x}(t=0) = v_0$, dans la limite où la masse devient très petite. Comme dans le cas de faible viscosité ν de l'équation de Navier-Stokes, ceci affecte le terme d'ordre le plus élevé de l'équation différentielle.

1. Trouver la solution de l'équation respectant la condition initiale donnée.
2. Montrer que dans la limite $m \to 0$, cette solution devient approximativement

$$x \overset{m\to 0}{\simeq} A\left[\exp(-kt/\mu) - \exp(-\mu t/m)\right]$$

Par analogie au traitement séparé de la couche limite d'une part et de l'écoulement lointain comme fluide parfait d'autre part, considérons maintenant deux simplifications de notre équation d'oscillateur. Si on pose $m = 0$ (analogue donc à $\nu = 0$), l'équation se réduit à l'équation du premier ordre

$$\mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0$$

dont la solution est

$$x_{\mathrm{ext}} = A_{\mathrm{ext}}e^{-kt/\mu} \tag{1}$$

* due à Ludwig Prandtl, «Anschauliche und nützliche Mathematik», Cours donnés à l'Université de Göttingen au premier semestre 1931/32 ; l'exemple est repris par Hermann Schlichting dans son livre «Boundary Layer Theory» («Grenzschichttheorie», H. Schlichting, K. Gersten, 10ème édition (2006), Springer Berlin Heidelberg New York, ISBN-13 978-3-540-23004-5).

3. Est-il possible de satisfaire la condition initiale ? Quel problème analogue rencontre-t-on avec l'équation d'Euler pour les fluides parfaits ?

Cette solution ressemble au premier terme de la solution exacte, celui qui survit aux temps longs. C'est notre solution « extérieure ».

4. Calculons maintenant la solution aux temps courts (solution 'intérieure'), à partir d'une autre équation qu'on peut dériver de l'équation complète. Pour cela, posons $t^* = t/m$ (quelle est l'opération analogue pour Navier-Stokes ?). Que devient l'équation différentielle dans ce « temps étiré » pour $m = 0$? Vérifier que la solution générale de cette équation s'écrit

$$x_{\mathrm{int}} = A_{\mathrm{int},1} \exp(-\mu t^*) + A_{\mathrm{int},2} \tag{2}$$

Peut-on satisfaire la condition initiale ?

L'idée du raccordement asymptotique est que la limite « intérieure » ($t \to 0$) de la solution « extérieure » (1) doit correspondre à la limite « extérieure » ($t^* \to \infty$) de la solution « intérieure » (2), ce qui donnera une relation supplémentaire entre les constantes des solutions x_{int} et x_{ext} :

$$\lim_{t^* \to \infty} x_{\mathrm{int}}(t^*) = \lim_{t \to 0} x_{\mathrm{ext}}(t)$$

5. Écrire la relation résultante.

Les deux solutions ont leur domaine de validité et constituent ensemble la solution complète. En l'occurrence, on peut l'écrire en faisant la somme des deux solutions et en pensant à soustraire une fois la limite commune pour ne pas la comptabiliser deux fois :

$$x(t) = x_{int}(t^*) + x_{ext}(t) - \lim_{t \to 0} x_{ext}(t)$$

6. Représenter graphiquement les deux solutions partielles et la solution complète.