TD Analyse dimensionnelle et ordres de grandeur

Adimensionnement de l'équation de diffusion

On considère un colorant diffusant dans un milieu à une dimension de taille L, injecté dans la boite à $t = 0$ en $x = 0$; la masse linéique (concentration) c obéit à l'équation :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

avec les conditions $c(x \neq 0, t = 0) = 0$ et $\int_{x=0}^{L} c(x,t)dx = m_0$. Interprêter physiquement ces deux conditions. Réécrire l'équation et les conditions aux limites à l'aide de variables adimensionnées. Quelle est la signification du paramètre homogène à un temps qui apparaît ? Comparer le nombre de grandeurs caractéristiques qui interviennent dans les deux systèmes d'équations.

Théorème π et applications

Théorème

Toute loi physique s'écrit sous la forme $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, où les $(a_i)_{i=1\ldots n}$ sont n grandeurs du système qui font intervenir k dimensions indépendantes. On démontre qu'on peut écrire cette loi sous la forme $f(\pi_1, \ldots, \pi_{n-k}) = 0$, où les $(\pi_i)_{i=1\ldots n-k}$ sont $(n-k)$ grandeurs sans dimension.

Force de traînée turbulente

Un objet de taille caractéristique L traverse un liquide au repos à la vitesse U. Sachant qu'à grande vitesse l'effet de la viscosité du fluide est négligeable, établir la manière dont la force de traînée F dépend de U et L.

Force de traînée visqueuse

Un objet de taille caractéristique L traverse un liquide au repos à la vitesse U supposée petite. Que peut-on dire dimensionnellement sur la force de traînée ? Et si on admet de plus que la trainée est proportionnelle à la viscosité ? Comment dépend-elle alors de la vitesse U ?

Écoulement turbulent dans un tube

On observe que le gradient de pression à travers une conduite est proportionnel à $Q^{7/4}$ lorsque l'écoulement est turbulent (Q est le débit volumétrique). En déduire comment le gradient de pression varierait avec la viscosité ou la densité du fluide (à Q fixé).

Écoulement laminaire dans un tube

À de faibles débits (plus précisément à de faibles nombres de Reynolds, $\mathrm{Re} = U\sqrt{S}/\nu < 30$; régime laminaire), on observe plutôt une proportionnalité simple entre le gradient de pression à travers une conduite et le débit volumétrique Q. Comment est-ce que le débit augmente lorsqu'on change le diamètre de la conduite, à gradient de pression constant ? Pour une conduite circulaire cette loi à été étudiée expérimentalement par Hagen et Poiseuille.

Épaisseur d'une flaque d'eau

Déterminer dimensionnellement la hauteur maximale d'une flaque d'un liquide de tension de surface γ qui mouille un substrat avec un angle de mouillage θ.

Taille maximale des gouttes de pluie

Une goutte d'eau de diamètre d en chute dans l'atmosphère se brise en gouttes plus petites lorsque la pression aérodynamique à l'avant dépasse la pression de Laplace γ/d due à la tension de surface. En supposant grande l'altitude des nuages, en déduire la loi d'échelle qui lie le diamètre maximal de gouttes de pluie à leur densité et tension de surface.

Vaguelettes à la surface d'un lac

Lorsqu'on jette une pierre dans un lac à la surface initialement plane, on observe des ondes concentriques s'éloigner de la petite zone où la pierre a communiqué à l'eau une impulsion verticale qu'on caractérisera par la quantité $P =$ (vitesse finale du caillou) $\cdot$ (section du caillou). Montrer à l'aide de considérations dimensionnelles et de raisonnements physiques simples que la forme générale de l'onde s'écrit

$$\zeta(r,t) = \frac{Pt}{r^2} f\left(\frac{gt^2}{r}\right)$$

à la distance r de l'impact et un temps t après celui-ci. ζ mesure la hauteur de la surface d'eau par rapport à sa position de repos.

Analyser les conséquences (« de l'action de la pesanteur dans la direction horizontale ») : soit $r = R(t)$ la position d'une vaguelette (repérée par exemple par son sommet). Quelle est « l'accélération » d^2R/dt^2 de la vaguelette ? Comment varie la hauteur $Z(t) = \zeta(R(t), t)$ de la vaguelette avec le temps ?

Orbites circulaires

Soit P un point matériel de masse m qui décrit une orbite circulaire de rayon a et de période T dans un champ de forces central dérivant de l'énergie potentielle $V(r) = \alpha r^k$. Par des arguments dimensionnels élémentaires, montrer que la quantité $C = T^2/a^{2+k}$ ne dépend pas de l'orbite considérée. Qu'en déduit-on dans le cas d'un potentiel harmonique ? Retrouver la troisième loi de Kepler.