Équations de Prandtl pour la couche limite

Les equations de Navier-Stokes adimensionnées (à l'aide d'une longueur caractéristique L et de la vitesse de l'écoulement incident U_∞) s'écrivent

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
\frac{\partial u^*}{\partial t^*} & + & u^* & \frac{\partial u^*}{\partial x^*} & + & v^* & \frac{\partial u^*}{\partial y^*} & = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + & \frac{1}{\mathrm{Re}} & (& \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} & + & \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} &), \\
1 & & 1 & 1 & & \delta^* & \frac{1}{\delta^*} & & \delta^{*2} & & 1 & & \frac{1}{\delta^{*2}} & \\
\frac{\partial v^*}{\partial t^*} & + & u^* & \frac{\partial v^*}{\partial x^*} & + & v^* & \frac{\partial v^*}{\partial y^*} & = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + & \frac{1}{\mathrm{Re}} & (& \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} & + & \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} &), \\
\delta^* & & 1 & \delta^* & & \delta^* & 1 & & \delta^{*2} & & \delta^* & & \frac{1}{\delta^*} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\frac{\partial u^*}{\partial x^*} & + & \frac{\partial v^*}{\partial y^*} & = 0. \\
1 & & 1 &
\end{array}
$$

(quantité de mouvement en x et y, puis conservation de la masse)

Sur ce système, la limite $\mathrm{Re} \to \infty$ donnerait juste les équations d'Euler pour les fluides parfaits, dont les solutions ne satisfont pas la condition de non-glissement à la paroi.

Les termes ne sont cependant pas tous du même ordre de grandeur. Les estimations indiquées en dessous des termes des équations sont obtenus par le raisonnement suivant : x^* et u^* sont $\mathcal{O}(1)$ par définition (des grandeurs de référence de l'adimensionnement). En y les variations se font en revanche sur une épaisseur $\delta^* \ll 1$, donc $\partial/\partial y^* = \mathcal{O}(1/\delta^*)$. Puisque l'équation de continuité doit rester valable dans la limite $\mathrm{Re} \to \infty$, $v^* = \mathcal{O}(\delta^*)$. On doit supposer que les accélérations locales $\partial u^*/\partial t^*$ sont du même ordre que les accélérations convectives $u^*\partial u^*/\partial x^*$, ce qui exclue des accélérations soudaines comme dans des ondes de pression. Finalement on constate que le facteur $1/\mathrm{Re}$ doit être d'ordre $\mathcal{O}(\delta^{*2})$ si on veut que le terme visqueux dominant soit du même ordre que les autres termes (on retrouve le résultat $\delta^* \sim 1/\sqrt{\mathrm{Re}}$).

La coordonnée $y^* = \mathcal{O}(\delta^*)$ n'est pas adaptée à la description de l'écoulement de la couche limite, puisqu'elle tend vers zéro dans la limite des grands nombres de Reynolds. On l'«étire» par la transformation de couche limite

$$\bar{y} = y^*\sqrt{\mathrm{Re}} \sim \frac{y^*}{\delta^*}, \quad \bar{v} = v^*\sqrt{\mathrm{Re}}.$$

Après substitution la limite $\mathrm{Re} \to \infty$ simplifie le système d'équations, à l'ordre le plus bas en δ^*, en

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \bar{v}\frac{\partial u^*}{\partial \bar{y}} &= -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \bar{y}^2}, && (1) \\
0 &= -\frac{\partial p^*}{\partial \bar{y}}, && (2) \\
\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0. && (3)
\end{aligned}
$$

La deuxième de ces équations signifie que la pression ne varie pas sur l'épaisseur de la couche limite : elle est égale à la pression au bord de la couche limite, donc imposée par l'écoulement extérieur. p^* peut donc être considérée comme fonction connue de x^* et t^*. Il ne reste plus que les deux inconnues u^* et $\bar{v}$. Sur le bord extérieur de la couche limite, la vitesse u^* doit tendre vers la vitesse de l'écoulement extérieur $U^*(x^*,t^*)$. L'équation 1 s'y simplifie en

$$\frac{\partial U^*}{\partial t^*} + U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*}.$$

On peut se servir de cette équation pour complètement éliminer p^* du système d'équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \bar{v} \frac{\partial u^*}{\partial \bar{y}} &= \frac{\partial U^*}{\partial t^*} + U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \bar{y}^2}, && (4) \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0. && (5) \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} \bar{y} = 0 : &\qquad u^* = 0, \quad \bar{v} = 0, && (6) \\ \bar{y} \to \infty &\qquad u* = U^*(x^*,t^*). && (7) \end{aligned}$$

Le problème des couches limites pour des écoulements plans et incompressibles consiste à résoudre ce système d'équations à écoulement extérieur $U^*(x^*,t^*)$. imposé.

Pour des écoulements *stationnaires* le système est encore plus simple :

$$\begin{aligned} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \bar{v} \frac{\partial u^*}{\partial \bar{y}} &= -\frac{\mathrm{d}p^*}{\mathrm{d}x^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \bar{y}^2}, && (8) \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0, && (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} = 0 : &\qquad u^* = 0, \quad \bar{v} = 0, && (10) \\ \bar{y} \to \infty &\qquad u* = U^*(x^*). && (11) \end{aligned}$$

(le gradient de pression peut de nouveau être éliminé : $\mathrm{d}p^*/\mathrm{d}x^* = -U^*\mathrm{d}U^*/\mathrm{d}x^*$)

Ces équations ne dépendent plus du nombre de Reynolds, la solution est valable pour tous les nombres de Reynolds suffisamment grands (mais d'une part le nombre de Reynolds réapparaît lorsqu'on revient vers des variables dimensionnées, et d'autre part il est possible que la solution ne soit pas physique pour tout Re, par exemple si l'approximation des couches limites n'est pas valable, ou que la couche limite elle-même devient turbulente ...).