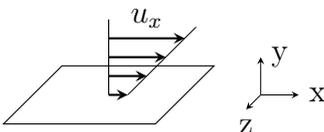


1 Écoulements parallèles

Dans un écoulement laminaire parallèle, le profil de vitesse ne s'établit que par l'action de la viscosité, autrement dit par la diffusion de quantité de mouvement (ici transverse à l'écoulement). Ce cours fait un tour d'horizon de cas simples dans lequel on peut explicitement calculer le profil de vitesse, dans le but d'une part de donner un aperçu de l'effet de la viscosité, et d'autre part d'établir un ensemble de solutions de base qui serviront à écrire les solutions de configurations plus complexes en exploitant la linéarité de l'équation de Stokes.

1.1 Rappels sur la viscosité

Dans un écoulement cisailé une couche de liquide exerce sur les couches voisines une contrainte proportionnelle au taux de cisaillement¹. Le coefficient de proportionnalité est la viscosité (dynamique) du liquide.

$$\tau_{xy} = \eta \frac{\partial u_x}{\partial y}$$


Quelle est la dynamique résultante d'une couche de fluide dans un écoulement parallèle de cisaillement ($U = (u_x(y, t), 0, 0)$) ?

$$\begin{aligned} \text{force:} \quad & F_+ + F_- = \eta S \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_y^{y+dy} \\ \text{accélération:} \quad & \rho S dy \left. \frac{\partial u_x}{\partial t} \right|_{y^* \in [y, y+dy]} \end{aligned}$$

Dans la limite $dy \rightarrow 0$ le principe fondamental de la dynamique donne une équation de transport diffusif pour la quantité de mouvement (équation de Stokes):

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}; \tag{1}$$

Le coefficient $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ a bien les dimensions d'un coefficient de diffusion: $[\nu] = \frac{L^2}{T}$.

1.2 Écoulement de démarrage au voisinage d'une plaque plane

Démarrage soudain d'une plaque au repos dans un fluide, parallèlement à elle-même:

1. Cette linéarité est caractéristique des liquides dits *Newtoniens*, par exemple de l'eau ou un gaz.

$$U = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ U_0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Ce problème n'a pas d'échelle spatiale caractéristique, plus précisément pas d'échelle spatiale géométrique. Nous pouvons cependant construire une longueur caractéristique visqueuse $\delta = \sqrt{\nu t}$, de sorte que nous pouvons chercher une solution invariante d'échelle de la forme suivante:

$$u_x = U_0 f(r), \quad r = \frac{y}{\sqrt{\nu t}} = \frac{y}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\nu t}$$

L'équation (??) devient après substitution de cet *Ansatz* une équation différentielle ordinaire:

$$-\frac{1}{2} r f' = f''$$

La solution par séparation des variables pour $F = f'$ est $F = F_0 \exp(-r^2/4)$, soit

$$f = A \operatorname{erf}\left(\frac{r}{2}\right) + B \quad \text{avec} \quad \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\zeta^2} d\zeta.$$

A et B sont déterminés par les conditions aux limites $f(y=0) \stackrel{!}{=} 1$ et $f(y \rightarrow \infty) \stackrel{!}{=} 0$, de sorte que

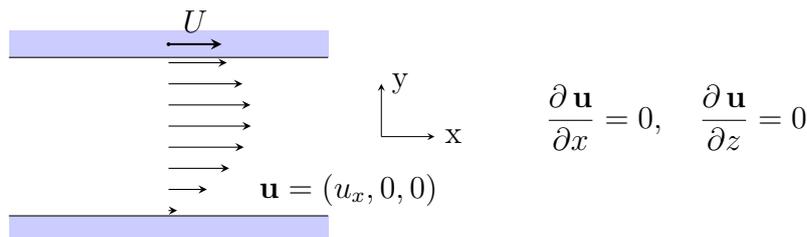
$$u_x = U_0 \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) \right] = U_0 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi \nu t}} \int_0^y \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4\nu t}\right) d\zeta \right].$$

Notons que nous aurions pu considérer la vorticité $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{rot} \mathbf{u}$ à la place de la vitesse. En dérivant l'équation de Stokes (??) on voit que la vorticité obéit à une équation de la même forme: $\partial \Omega_z / \partial t = \nu \partial^2 \Omega_z / \partial y^2$. La solution s'obtient directement à partir de f' : $\Omega_z = \partial u_x / \partial y = U f' / \delta = -\frac{U_0}{\sqrt{\pi} \delta} \exp\left(-\frac{y^2}{4\delta^2}\right)$.

On voit bien dans la solution que la viscosité met le liquide en mouvement sur une échelle caractéristique 2δ . On appelle cette zone la *couche limite visqueuse*.

1.3 Écoulement de cisaillement de Couette-Poiseuille plan

On considère un écoulement stationnaire entre deux plaques infinies, dont l'une est immobile tandis que l'autre est animée d'une vitesse constante U .



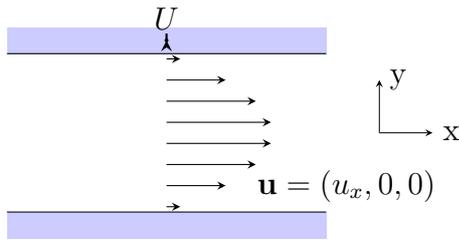
Les symmétries du problème simplifient grandement les équations de Navier-Stokes. La seule équation non triviale, pour u_x , se simplifie ainsi:

$$\underbrace{\frac{\partial u_x}{\partial t}}_{=0} + u_x \underbrace{\frac{\partial u_x}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{u_y}_{=0} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \underbrace{u_z}_{=0} \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}}_{=0} \right)$$

et la solution s'écrit immédiatement: $u_x = \frac{\nabla p}{2\eta}(y^2 + By + C)$. En dérivant l'équation précédente selon x on voit bien que le gradient de pression $\nabla p = \partial p / \partial x$ doit être constant. Les conditions de non-glissement aux parois, $u_x(y = 0) = 0$ et $u_x(y = d) = U$, fixent les constantes d'intégration pour donner

$$u_x = -\frac{\nabla p}{2\eta} y(d - y) + U \frac{y}{d} \quad (2)$$

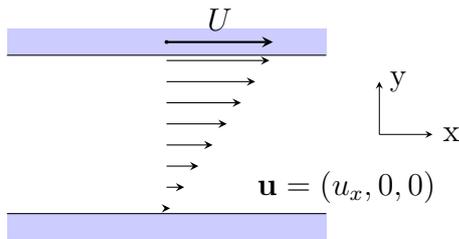
cas $U = 0$: écoulement de Poiseuille plan



L'écoulement a un profil caractéristique parabolique. À gradient de pression imposé la vitesse maximale augmente en d^2 :

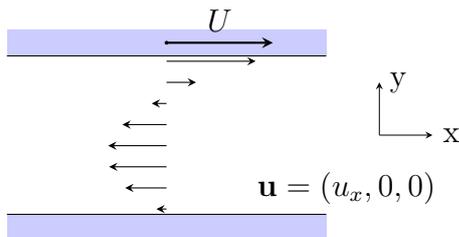
$$\langle u_x \rangle = \frac{1}{d} \int_0^d u_x dy = \frac{\nabla p}{12\eta} d^2$$

cas $\nabla p = 0$: écoulement de Couette plan



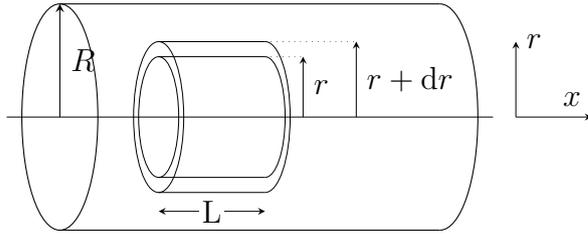
La plaque du haut est une source de quantité de mouvement, la paroi inférieure un puits: entre les deux la contrainte doit être partout pareille en régime stationnaire, y compris à la paroi, $\tau_{xy} = \eta \frac{\partial u_x}{\partial y} = \eta U / d$.

cas mixte (ici: $\nabla p > 0$)



On voit bien sur l'expression (??) que l'écoulement est la superposition d'un écoulement de Poiseuille (au profil parabolique) et d'un cisaillement pur (linéaire).

1.4 Écoulement en tube de Poiseuille (stationnaire)



Considérons les forces subies par le fluide contenu dans le cylindre creux esquissé ci-dessus. Sur les parois intérieure et extérieure les forces de pression se compensent par symétrie. La contrainte visqueuse est responsable d'une force d'entraînement vers la droite de

$$\left(2\pi r L \eta \frac{\partial u_x}{\partial r}\right)_{r+dr} - \left(2\pi r L \eta \frac{\partial u_x}{\partial r}\right)_r = 2\pi \eta L \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_x}{\partial r}\right) dr.$$

À l'inverse le bilan des forces de pression est non-nul sur les faces du cylindre alors que la contrainte visqueuse ne contribue pas:

$$-(2\pi r dr p)_{x+L} + (2\pi r dr p)_x = -2\pi r L \frac{\partial p}{\partial x} dr.$$

À l'état stationnaire ces forces doivent être en équilibre:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_x}{\partial r}\right)$$

Cette équation de conservation de la quantité de mouvement selon x n'est évidemment rien d'autre que l'équation de Stokes (selon x , en coordonnées cylindriques).

L'intégration avec la condition de non-glissement $u_x(r = R) = 0$ conduit au profil de vitesse

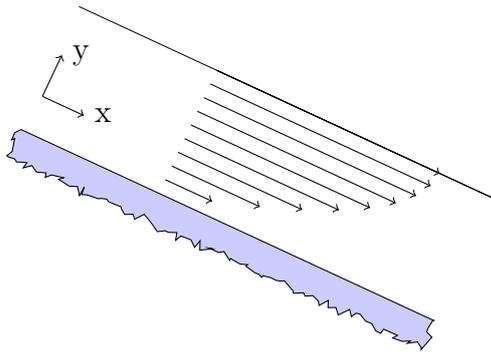
$$u_x = \frac{-1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (R^2 - r^2)$$

De manière un peu surprenante on retrouve un profil parabolique comme en géométrie plane. À gradient de pression imposé, le débit dépend très fortement du diamètre R du conduit, comme le montre la loi de Hagen-Poiseuille²:

$$Q = \int_0^R u_x(r) 2\pi r dr = \frac{\pi}{8} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{R^4}{\eta}$$

2. D'après l'ingénieur Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen (1797–1884) et le médecin et physicien Jean-Léonard-Marie Poiseuille (1797–1869).

1.5 Écoulement en couche mince sur plan incliné



Ici l'équation de Navier-Stokes stationnaire se réduit à

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} - g \sin \alpha$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \cos \alpha$$

Sachant que la pression est égale à la pression atmosphérique à la surface libre et donc constante, le terme de pression disparaît dans la première équation. La deuxième équation donne un profil de pression hydrostatique. La seule véritable nouveauté est la condition imposée à la surface libre: la viscosité de l'air étant supposée très faible par rapport à celle du liquide, on a pas de flux de quantité de mouvement à travers la surface libre de l'écoulement, en d'autres mots la contrainte visqueuse y est nulle: $\frac{\partial u_x}{\partial y}(y = h) = 0$. Avec la condition de non-glissement habituelle $u_x(y = 0) = 0$ on obtient un profil en demie-parabole:

$$u_x = \frac{g \sin \alpha}{2\nu} y(2h - y)$$

$$\langle u_x \rangle = \frac{g \sin \alpha}{3\nu} h^2$$

1.6 Écoulement au voisinage d'une plaque oscillante

Pour résoudre l'équation de Stokes (non-stationnaire) pour u_x ,

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

nous cherchons une solution de la forme $u_x \propto e^{i(ky - \omega t)}$. L'équation caractéristique

$$-i\omega = \nu (-k^2) \quad \rightsquigarrow \quad k = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = \pm \frac{1+i}{\delta}, \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

a deux solutions, dont une seulement est compatible avec les conditions aux limites:

$$\begin{aligned}
 u_x(y=0) &= U_0 e^{-i\omega t} && \text{(non-glissement)} \\
 u_x(y \rightarrow +\infty) &= 0 && \text{(liquide au repos loin de la perturbation)} \\
 \Rightarrow u_x &= U_0 \exp \left\{ (-1+i) \frac{y}{\delta} - i\omega t \right\}
 \end{aligned}$$

La longueur caractéristique $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ décrit à la fois la longueur d'onde spatiale des inversions de direction d'écoulement, et la longueur caractéristique d'atténuation de cette vitesse à mesure qu'on s'éloigne de la paroi.

Il est intéressant d'un point de vue physique de calculer la contrainte sur la plaque (qui mesure la force que doit fournir le mécanisme qui l'actionne):

$$\eta \frac{\partial u_x}{\partial y} = (-1+i) \frac{\eta U}{\delta} = -\frac{\eta U}{\delta} - \frac{1}{2} \rho \delta \frac{\partial U}{\partial t}.$$

La contrainte se décompose en deux termes. L'un est proportionnel à U et peut donc être interprété comme dissipation visqueuse, pour un taux de cisaillement U/δ . L'autre est proportionnel à l'accélération de la plaque et correspond donc à une force inertielle. Le préfacteur $\rho\delta/2$ se lit alors comme une masse (par unité de surface): l'inertie effective de la plaque est augmentée d'une couche de fluide d'épaisseur $\delta/2$.

1.7 Conditions aux limites

En résumé, l'équation de Stokes décrit la diffusion de quantité de mouvement. Sa solution dépend des conditions aux limites. En plus de la continuité des contraintes tangentielles (de cisaillement), on constate expérimentalement qu'on a également continuité des vitesses³.

Non-glissement $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$

Cisaillement à l'interface fluide/fluide $\eta_1 \frac{\partial u_{x,1}}{\partial y} \Big|_{\text{interf.}} = \eta_2 \frac{\partial u_{x,2}}{\partial y} \Big|_{\text{interf.}}$

Cisaillement à l'interface fluide/gaz Quand le contraste des densités est très élevé ($\eta_{\text{gaz}} \ll \eta_{\text{fluide}}$), l'expression précédente se simplifie en une condition de cisaillement nul: $\partial u_{x,\text{fluide}}/\partial y = 0$.

Attention cependant à la discontinuité de la contrainte normale à des interfaces courbes: la tension de surface y engendre un saut de pression (*cf* suite du cours par David Quéré).

3. Ce n'est pas complètement vrai, il pourrait y avoir de faibles glissements sur des parois (Joseph, P. & Tabeling, P. *Direct measurement of the apparent slip length* Phys. Rev. E **71** (2005), 035303). La longueur caractéristique de glissement, définie comme $b = [u_x/(\partial u_x/\partial y)]_{y \rightarrow 0}$, est toutefois de l'ordre de la taille moléculaire. La condition de non-glissement reste donc une très bonne approximation pour des écoulement macroscopiques.