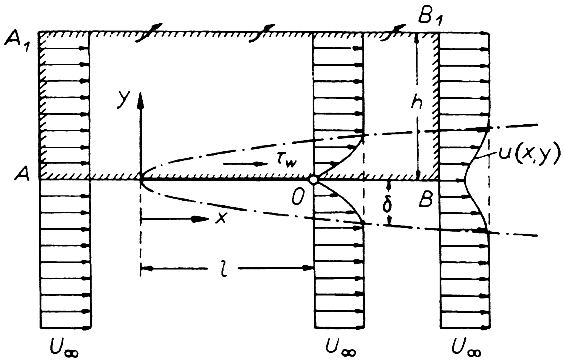
Sillage laminaire d'un corps mince

M2 liquides

16 décembre 2012

Le sillage laminaire d'une plaque de longueur finie l à incidence nulle dans un écoulement uniforme est constitué du fluide qui a été ralenti dans les couches limites qui se développent le long de la plaque. De ce fait, le sillage est de faible dimension transverse, et la viscosité continue à y jouer un rôle important. L'écoulement est incompressible et quasi-parallèle.



Le profil de vitesse immédiatement à l'arrière de la plaque (en O sur la figure ci-dessus) est constitué des deux profils des couches limites du dessus et du dessous de la plaque. Plus en aval, le liquide proche du plan de symétrie a été accéléré. Le creux du profil de vitesse s'élargit dans la direction transverse à l'écoulement, tandis que sa profondeur diminue. Nous nous intéressons à l'évolution asymptotique du profil de vitesse dans le sillage, en régime stationnaire.

1. En faisant l'hypothèse que la viscosité est le mécanisme dominant de transport de quantité de mouvement, estimer l'évolution de la largeur du sillage avec la distance x en aval de la plaque.
2. Que peut-on dire sur la pression loin de la plaque et du sillage ?
3. Le déficit de vitesse horizontale $u_1(x,y) = U_\infty - u(x,y)$ diminue pour $x \to \infty$. En supposant u_1 et la composante verticale de la vitesse v_1 petits devant U_∞, faire un développement des équations de couche limite,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{1}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

en négligeant les termes quadratiques en u_1, v_1. Quelles sont les conditions aux limites ?

4. L'équation aux dérivées partielles obtenue est linéaire et correspond à l'équation de la chaleur non-stationnaire. Montrer que l'Ansatz

$$u_1 = U_\infty C \left(\frac{x}{l}\right)^{-m} F(\zeta), \qquad \zeta = \frac{y}{2}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$$

conduit à l'équation différentielle ordinaire

$$F'' + 2\zeta F' + 4mF = 0$$

avec les conditions aux limites $F'(\zeta = 0) = 0$ et $F(\zeta \to \infty) = 0$.

Pour déterminer la valeur de m pour laquelle cette équation possède une solution non-triviale, il convient de faire un bilan du flux de quantité de mouvement global. Nous prenons un volume de contrôle AA_1B_1B (voir schéma) suffisamment grand pour que la pression sur son bord soit égale à la pression non perturbée, et que par conséquent la contribution de la pression au flux de quantité de mouvement soit négligeable. On notera b la largeur du volume AA_1B_1B / de la plaque (selon la direction Oz transverse à l'écoulement).

5. Pourquoi peut-on affirmer qu'une partie du liquide quitte le volume de contrôle par le haut (A_1B_1) ?
6. Compléter le tableau suivant des flux entrants dans le volume :

segment de contour	flux volumique	flux de quantité de mouvement selon x
AB	?	?
AA_1	?	?
BB_1	?	?
A_1B_1	?	?
contour entier	$\sum$ flux vol. $= 0$	$\sum$ flux $\mathrm{q}^{\mathrm{té}}$ $\mathrm{mouv}^{\mathrm{t}}$ = trainée

7. Montrer en éloignant les parois du volume AA_1B_1B de la plaque, que la traînée s'écrit approximativement

$$F_T \approx b\rho \int_{-\infty}^{+\infty} U_\infty u_1 \,\mathrm{d}y$$

8. En y substituant l'Ansatz pour u_1 de la question 4, montrer qu'on doit imposer $m = 1/2$ parce que cette résistance ne peut pas dépendre de la position x de la paroi BB_1.

L'équation différentielle résultante pour F,

$$F'' + 2\zeta F' + 2F = 0$$

s'intègre une fois pour donner l'équation

$$F' + 2\zeta F = 0,$$

dont la solution est $F(\zeta) = \exp(-\zeta^2)$.

9. Déduire[1] de l'expression pour la résistance démontrée précédemment que le coefficient de trainée vaut

$$c_T = \frac{F_T}{\frac{\varrho}{2}U_\infty^2 bl} = \frac{4\sqrt{\pi}C}{\sqrt{U_\infty l/\nu}}.$$

10. Écrire l'expression du défaut de vitesse $u_1(x, y)$ dans le sillage d'un corps mince dont le coefficient de traînée est c_T.
11. Comment la largeur du sillage augmente-t-elle avec la distance x ?
12. Calculer le flux de liquide traversant A_1B_1 dans la limite où cette face tend vers $y \to \infty$. En déduire si, loin en aval de la plaque ($x \gg l$), l'allure des lignes de courant de l'écoulement extérieur au sillage. S'écartent-elles, se resserrent-elles ? Rappeler ce qui se passe dans la région où se trouve la plaque ($x \approx l$). Est-ce différent ?

1. On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\zeta^2)\, \mathrm{d}\zeta = \sqrt{\pi}$.