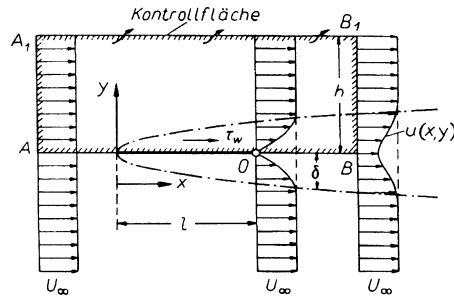


### Nachlauf hinter ebenen Körpern

Wie die Beispiele der Trennungsschicht und des Freistrahles zeigten, ist die Anwendung der Grenzschichtgleichungen nicht unbedingt an das Vorhandensein von festen Wänden gebunden. Sie können auch verwendet werden, wenn im Innern der Strömung eine Schicht mit überwiegender Reibungswirkung vorhanden ist.

Ein derartiges Beispiel ist auch die Nachlaufströmung hinter einem ebenen Körper nach Bild 7.9. Hier wurde als Körper die ebene Platte der Länge  $l$  gewählt. Die beiden



**Bild 7.9.** Nachlauf hinter einem ebenen Körper

Grenzschichten auf der Ober- bzw. Unterseite des Körpers wachsen an der Hinterkante zusammen und bilden weiter stromabwärts ein *Nachlaufprofil*, dessen Breite mit wachsendem Abstand zunimmt und dessen *Drelltiefe* abnimmt. Im übrigen ist aber, wie wir sehen werden, die Form der Geschwindigkeitsverteilung im Nachlauf, auch *Windschatten* genannt, für  $x \rightarrow \infty$  bis auf einen Maßstabsfaktor unabhängig von der Gestalt des Körpers. Die asymptotische Entwicklung für  $x \rightarrow \infty$  wurde von W. Tollmien (1931) angegeben. Da die Drelltiefe mit wachsendem  $x$  laufend abnimmt, kann für  $x \rightarrow \infty$  angenommen werden, daß der *Geschwindigkeitsdefekt*

$$u_1(x, y) = U_\infty - u(x, y) \quad (7.86)$$

klein ist im Vergleich zu  $U_\infty$ , so daß man quadratische Glieder von  $u_1$  und dem entsprechenden  $v_1$  vernachlässigen kann. Da weit stromabwärts der Druck konstant ist, erhält man aus der Grenzschichtgleichung (7.4) durch Einführen von Gl. (7.86) und Vernachlässigung der in  $u_1$  und  $v_1$  quadratischen Glieder

$$U_\infty \frac{\partial u_1}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \quad (7.87)$$

mit den Randbedingungen

$$y = 0 : \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0; \quad y \rightarrow \infty : u_1 = 0.$$

Es handelt sich jetzt um eine *lineare* partielle Differentialgleichung. Diese Linearität ist charakteristisch für die Berechnung *kleiner Störungen*. Die Differentialgleichung ist wie Gl. (7.80) wieder mit der instationären Wärmeleitungsgleichung identisch. Mit dem Ansatz

$$u_1 = U_\infty C \left( \frac{x}{l} \right)^{-m} F(\eta), \quad \eta = \frac{y}{2} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (7.88)$$

erhält man für die Funktion  $F(\eta)$  die Differentialgleichung

$$F'' + 2\eta F' + 4mF = 0 \quad (7.89)$$

mit den Randbedingungen

$$\eta = 0 : F' = 0; \quad \eta \rightarrow \infty : F = 0.$$

Der noch unbekannte Exponent  $m$  (*Eigenwert*) läßt sich aus einer globalen Impulsbilanz um den Körper nach Bild 7.9 bestimmen. Die rechteckige Kontrollfläche  $AA_1B_1B$  wird so weit entfernt vom Körper gelegt, daß auf ihr der ungestörte Druck herrscht und folglich Druckkräfte keinen Beitrag zur Impulsbilanz liefern. Bei der Berechnung des Impulsflusses durch die Kontrollfläche ist zu beachten, daß aus Kontinuitätsgründen Fluid oben und unten ausströmen muß, nämlich derjenige Volumenstrom, der durch den Querschnitt  $B_1B$  weniger fließt als durch Querschnitt  $A_1A$ . Die Impulsbilanz ist in Tabelle 7.2 angegeben, wobei eintretende Volumenströme positiv

**Tabelle 7.2.** Bilanz für Volumenstrom und  $x$ -Impuls zur Kontrollfläche nach Bild 7.9

Querschnitt	Volumenstrom	$x$ -Impuls
$A B$	0	0
$A A_1$	$b \int_0^h U_\infty dy$	$\rho b \int_0^h U_\infty^2 dy$
$B B_1$	$-b \int_0^h u dy$	$-\rho b \int_0^h u^2 dy$
$A_1 B_1$	$-b \int_0^h (U_\infty - u) dy$	$-\rho b \int_0^h U_\infty (U_\infty - u) dy$
$\Sigma =$ Kontrollfläche	$\Sigma$ Volumenstrom = 0	$\Sigma$ Impulsfluß = Widerstand

und austretende Volumenströme negativ gezählt werden. Dann entspricht der Widerstand gleich dem gesamten Impulsfluß. Damit ergibt sich

$$W = b\rho \int_{-\infty}^{+\infty} u(U_\infty - u) dy. \quad (7.90)$$

Dabei dürfen die Integrationsgrenzen statt  $y = \pm h$  auch  $y = \pm\infty$  gesetzt werden, da für  $|y| > h$  der Integrand in Gl.(7.90) verschwindet. Mit dem Ansatz (7.88) folgt aus Gl. (7.90)

$$W \approx b\rho \int_{-\infty}^{+\infty} U_\infty u_1 dy = 2b\rho U_\infty^2 C \left(\frac{x}{l}\right)^{-m} \sqrt{\frac{vx}{U_\infty}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\eta) d\eta. \quad (7.91)$$

Da diese Bilanz von  $x$  unabhängig sein muß, folgt  $m = 1/2$ . Die somit festgelegte Gl. (7.89)

$$F'' + 2\eta F' + 2F = 0 \quad (7.92)$$

ergibt nach einmaliger Integration

$$F' + 2\eta F = 0$$

mit der Lösung

$$F(\eta) = e^{-\eta^2}. \quad (7.93)$$

Mit dem Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\eta) d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \sqrt{\pi}$$

folgt aus Gl. (7.91) für den Widerstandsbeiwert

$$c_W = \frac{W}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2 b l} = \frac{4\sqrt{\pi} C}{\sqrt{\frac{U_\infty l}{v}}}. \quad (7.94)$$

Damit lautet die endgültige Lösung für die Defektgeschwindigkeit im Nachlauf eines Körpers mit dem Widerstandsbeiwert  $c_W$ :

$$\frac{u_1(x, y)}{U_\infty} = \frac{c_W}{4\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{U_\infty l}{v}} \left(\frac{x}{l}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y^2 U_\infty}{4xv}}. \quad (7.95)$$

Aus Gl. (7.88) folgt für die halbe Halbwertsbreite der Delle

$$y_{0,5} = 1,7 \sqrt{\frac{vx}{U_\infty}}, \quad (7.96)$$

d.h. auch hier ist die Breite der Reibungsschicht proportional zu  $\sqrt{v}$ .

Bemerkenswert ist, daß trotz der Verbreiterung der Nachlaufdelle der im Nachlauf fehlende Volumenstrom von  $x$  unabhängig ist, d.h. daß bei dieser Strömung kein seitlicher Einsaugeffekt (engl.: entrainment) auftritt. Der zur Kompensation seitlich aus der Kontrollfläche austretende Volumenstrom verläßt diese also bereits im *Nahfeld* des Körpers, jedenfalls nicht mehr im durch die Lösung (7.95) beschriebenen *Fernfeld*. Diese Lösung ist etwa für  $x > 3l$  gültig.

Für die Erweiterung dieser Lösung auf kleinere  $x$ -Werte vgl. S.A. Berger (1971), S. 237.

Die Nachlaufströmungen sind in den meisten praktischen Fällen turbulent, da die Geschwindigkeitsprofile im Nachlauf Wendepunkte besitzen, daher besonders instabil sind und infolgedessen schon bei verhältnismäßig kleinen Reynolds-Zahlen in den turbulenten Strömungszustand übergehen, vgl. Kap. 15.

**Anmerkung** (Strahl in Parallelströmung)

Die Nachlauf-Lösung gilt auch für das asymptotische Abklingen einer Freistrahlsströmung in einer gleichgerichteten Parallelströmung. Statt des Widerstandsbeiwertes  $c_W$  erscheint dann ein analog definierter *Strahlimpulsbeiwert*  $c_\mu$ , und  $u_1(x, y)$  hat die Bedeutung einer Übergeschwindigkeit.