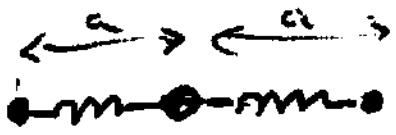
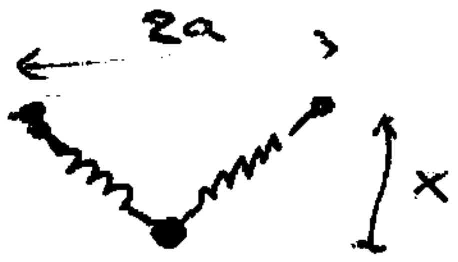
1 Solution d'une équ. en $\mathbb{R}^n$

remarque : $f(x) = a \Leftrightarrow \tilde{f}(x) = 0$

$f(x) = 0$ pour l'instant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n=1)$

exemple : 

+ gravité ⇝ 

$$mg = +2k(\ell - \ell^*)\cos\Theta \qquad \ell^* = \text{long. à vide} = a$$

$$= +2k\,x\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) \qquad x = \underbrace{\frac{mg}{k}}_{L}\hat{x}\ ,\ a = L\hat{a}$$

$$\leadsto\ 0 = 1 - x\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) =: f(x)$$

⇝ racine d'un polynôme d'ordre 4

$$\left.\begin{array}{lll} x = 0 & \leadsto & f(x) = 1 > 0 \\ x \to \infty & \leadsto & f(x) \to 1 - x < 0 \end{array}\right) \leadsto \exists \text{ zéro}$$

$$x = a \leadsto f(x) = 1 - a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \overset{a=1}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{3a}{4} \leadsto f(x) = 1 - a\left(1 - \frac{4}{5}\right) = 1 - \frac{a}{5}$$

$\frac{4}{3}a$ $\qquad 1 - \frac{2a}{5}$

$$G = \frac{1}{100} \leadsto f(a) < 0$$

A dichotomie

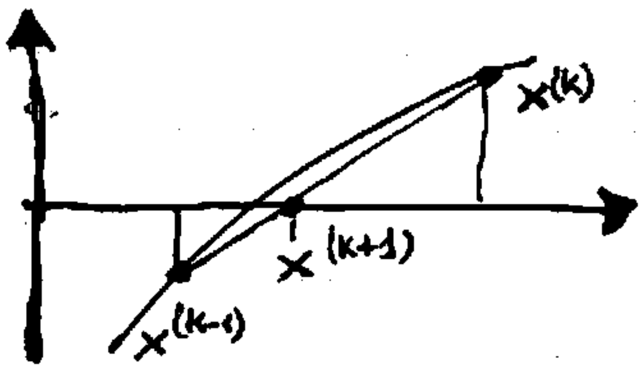
idée : réduire success. la taille de l'intervalle.

$$f(x) = 0.01 - x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

a	$\frac{a+b}{2}$	b	$f(a)$	$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$	$f(b)$
0	0.5	1	0.01	−0.043	−0.28
0	0.25	0.5	0.01	0.0025	−0.043
0.25	0.375	0.5	0.0025	−0.014	−0.043
	0.3125			−0.0042	
	0.28125			−0.0005	
0.25		0.28125			

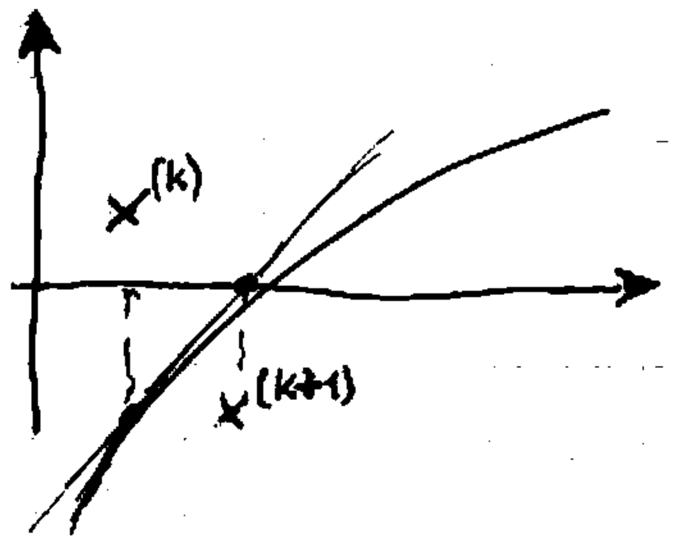
c.f. TD

B interpolation linéaire



$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} f(x^{(k)})$$

C méthode de Newton-Raphson



$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

exemple : calculer $\sqrt{a}$: solut° de $f(x) = x^2 - a \stackrel{!}{=} 0$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)2} - a}{2x^{(k)}} = \frac{1}{2}\left(x^{(k)} + \frac{a}{x^{(k)}}\right)$$

A.N. : $\sqrt{10}$

convergence : $x^{(k+1)} - \sqrt{a} = \cdots = \frac{1}{2x^{(k)}}\left(x^{(k)} - \sqrt{a}\right)^2$ quadratique retour sur la convergence, Newton-Raphson

convergence $\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \xi \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \delta^{(k)} \to 0$, $\delta^{(k)} = x^{(k)} - \xi$

$\delta^{(k+1)} = O(|\delta^{(k)}|)$ conv. linéaire

$O(|\delta^{(k)}|^2)$ quadratique.

($f(x) = O(|g(x)|) \Leftrightarrow |f| < A|g|$ dans la limite considérée, A indép^t de x)

convergence Newton-Raphson (cas $f'(\xi) \neq 0$, $f \in C_2$)

calculer $\xi - x^{(k+1)} = \xi - x^{(k)} + \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$, $0 < \Theta < 1$

en utilisant dev^t Taylor $f(\xi) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(\xi - x^{(k)}) + \frac{1}{2} f''(x^{(k)} + \Theta(\xi - x^{(k)}))(\xi - x^{(k)})^2$

remarque N-R : si zéro multiple ($f'(\xi) = 0 \cdots f^{(\ell-1)}(\xi) = 0$, $f^{(\ell)}(\xi) \neq 0$),

convergence o.k. $\left(x^{(k+1)} = \begin{cases} x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} & \text{si } f(x^{(k)}) \neq 0 \\ x^{(k)} & \text{sinon} \end{cases} \right.$ attention arrêt ds progr. !)

mais linéaire. Superlinéarité : $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \ell \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$

Pb. : multiplicité rarement connue d'avance

remarque bis : il est possible de définir des méthodes à la Newton (sécantes) aux dérivées + élevées.

remarque B : méthode de la mauvaise position : variantes $\left\{ \begin{array}{l} \text{méthodes des sécantes} \\ \text{Bus \& Dekker} \end{array} \right.$

résumé :

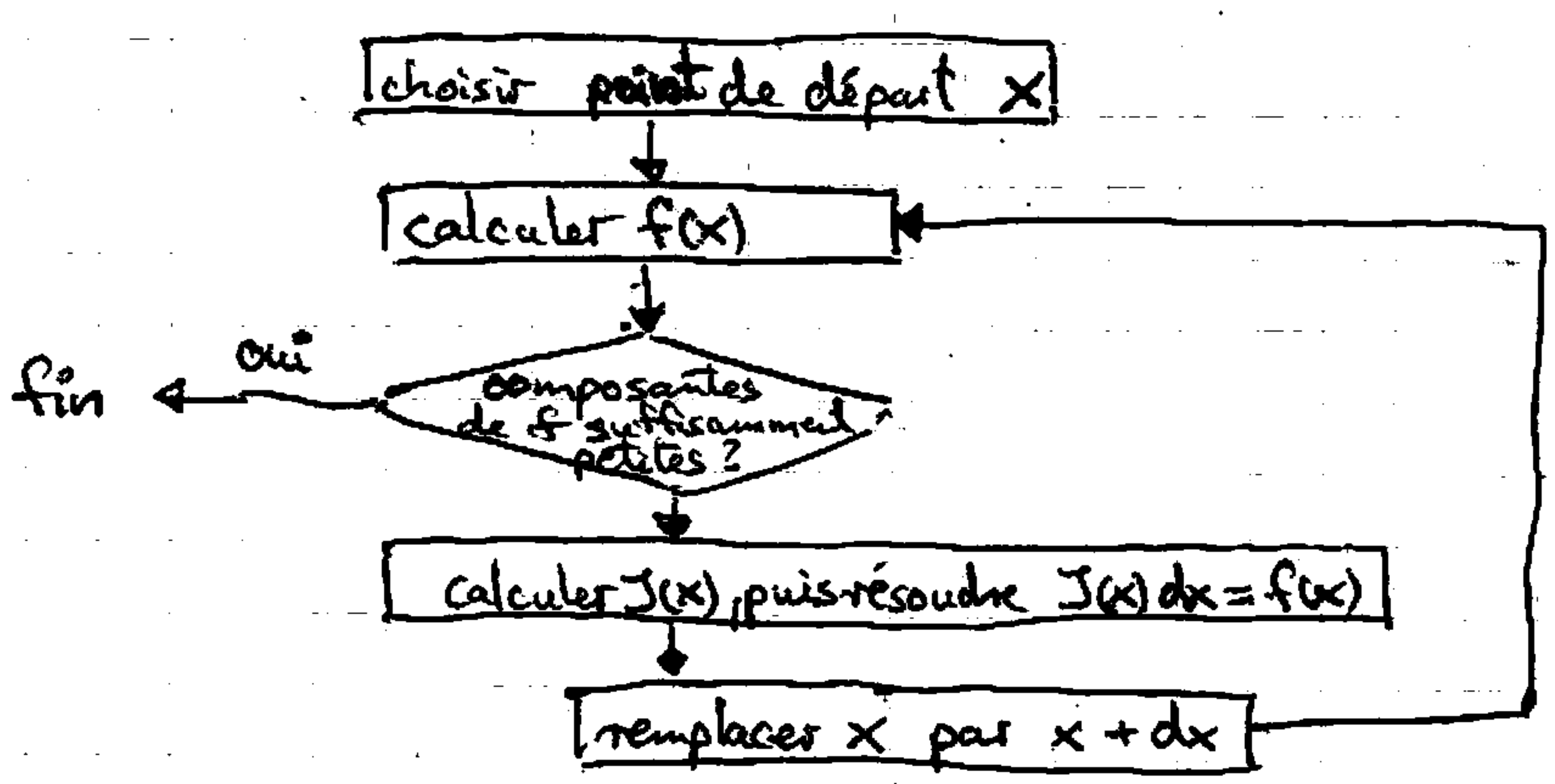
	interval init ?	trouve t^j 1 zéro ?	ordre de conv.	coût
dichotomie :	oui	oui	1	1
mauvaisepos :	oui	oui	entre 1 et 1,62	1
Newton-Raphson :	non	seul^t p^r «bon» point de départ	2	2/3
sécantes + dichotomie :	oui	oui	1 - 1,62	1

D méthode de Newton-Raphson en dim. $n > 1$

en principe : dévelop^t linéaire : $y = f(x^{(k)}) + J_f(x^{(k)})(x - x^{(k)})$; $J_f(x^{(k)}) = \left(\frac{\partial f_\mu(x^{(k)})}{\partial x_\nu} \right)_{\mu,\nu = 1..n}$

$\overset{y=0}{\leadsto} \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} - J_f^{-1}(x^{(k)}) f(x^{(k)})$

en pratique on préfère résoudre directement $J_f(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = f(x^{(k)})$



sécantes + dichotomie

+ rapide, mais peut partir ds le décor

garde-fou, lent mais inexorable