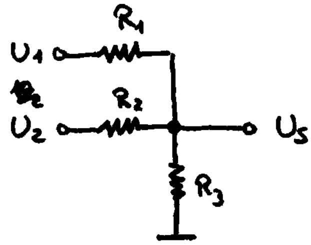
cours PH332 17/10/2005

3 équ. linéaires

A Intro

exemples



$U_s = f(U_1, U_2) = ?$

$U_s = I_3 R_3$

$\leadsto$ déterminer $U_s \Leftrightarrow$ déterminer I_3

3équ.: $U_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3$ « boucle »

$U_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3$ « boucle »

$0 = I_1 + I_2 - I_3$ noeud

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & R_3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$ écriture compacte

$R_1 = R_2 = R_3 = R$, $c_1 = \frac{U_1}{R}$, $c_2 = \frac{U_2}{R}$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} I_1 \quad\quad + I_3 &= c_1 \\ I_2 + I_3 &= c_2 \\ I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \end{aligned}$$

encore + compact : $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 1 & 1 & c_2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$III' = III - I$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 1 & 1 & c_2 \\ 0 & 1 & -2 & -c_1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} I_1 \quad + I_3 &= c_1 \\ I_2 + I_3 &= c_2 \\ I_2 - 2I_3 &= -c_1 \end{aligned}$$

$III'' = III' - II$

matrice triangulaire $\rightarrow$ $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 1 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & -3 & -c_1 - c_2 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} I_1 \quad + I_3 &= c_1 \\ I_2 + I_3 &= c_2 \\ -3I_3 &= -c_1 - c_2 \end{aligned}$$

$$\leadsto I_3 = \frac{c_1 + c_2}{3} = \frac{U_1 + U_2}{3R} \quad \leadsto U_s = \frac{U_1 + U_2}{3}$$

$$\left(I_2 = c_2 - I_3 = \frac{2c_2 - c_1}{3} = \frac{2U_2 - U_1}{3R} \; , \; I_1 = c_1 - I_3 = \frac{2U_1 - U_2}{3R} \right)$$

substitution

[stratégie générale : ① produire matrice triangulaire

② remonter à la sol° par substitution]

- beaucoup de modèles linéaires en physique
- non-linéaire souvent linéarisé, ex. Newton en $\mathbb{R}^n$: $0 \stackrel{!}{=} f(x^{(k+1)}) \simeq f(x^{(k)}) + J_f(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) + \ldots$

$\Leftrightarrow \boxed{Ax = b}$ avec $A = J_f(x^{(k)})$, $x = x^{(k+1)} - x^{(k)}$, $b = -f(x^{(k)})$

B nombre de solutions (petits rappels d'algèbre lin.)

~~remarque générale~~

- $Ax = 0$: 1 solution ($x = 0$) ssi $\det A \neq 0$

  ou ∞-té de solutions formant un SEV : $\ker(A)$

- $Ax = b$ 3 cas : 0, 1 ou ∞-té de solutions

  pas de sol° ssi $b \notin \text{Image}(A)$

  sinon $\{y = x_0 + z \mid x_0 \text{ sol° particulière de } Ax_0 = b,\ z \in \ker(A) = \{z : Az = 0\}\}$

C schéma d'élimination de Gauss

ex :

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1\\
x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 2\\
4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 2\\
3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 5
\end{aligned}$$

$\downarrow$

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1 \quad \leftarrow \text{ignorer à partir d'ici}\\
-\tfrac{7}{2}x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= \tfrac{3}{2}\\
-3x_2 - 9x_3 + 5x_4 &= 0\\
-\tfrac{17}{2}x_2 - 4x_3 + x_4 &= \tfrac{7}{2}
\end{aligned}$$

$\downarrow$

$\vdots$

$$\begin{aligned}
-\tfrac{75}{7}x_3 + \tfrac{47}{7}x_4 &= -\tfrac{9}{7}\\
\tfrac{161}{525}x_4 &= -\tfrac{483}{525} \quad \rightarrow \quad x_4 = 3
\end{aligned}$$

$x_1 = 1$
$\uparrow$
$x_2 = -1$
$\uparrow$
$x_3 = 2$
$\uparrow$
$x_4 = 3$

$\rightsquigarrow$ stratégie facile à généraliser à des ~~grands~~ systèmes

mais :

$$\begin{aligned}
2x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 8\\
x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 6\\
4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 3\\
x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 9
\end{aligned}$$

pivot

$\downarrow$

II' $\quad 2x_3 + 4x_4 = 2 \quad \rightarrow$ plus de x_2 !

pb du pivot nul

$\rightsquigarrow$ echange de lignes (p.ex. II' et III') ne change pas la solution

$\vdots$

$\downarrow$

$x_4 = 1,\ x_3 = -1,\ x_2 = -2,\ x_1 = 1$

observations : ∃ 3 transf° neutres

- échange de 2 lignes
- " " 2 colonnes
- ~~remplacement d'une ligne par une comb. linéaire de deux~~
- ~~s~~addition d'un multiple d'une ligne à une autre

algor. de Gauss

① triang. de la matrice $A_b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & - & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & & & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$:

(1a) tous les a_{ij} nuls ? ⇒ stop

(1b) permuter colonnes et lignes pour que $a_{11} \neq 0$

(1c) soustraire multiple de ligne L_1 à L_j pour annuler a_{j1}, $j>1$

$$\leadsto \quad Ab' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & -- & & b_1 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} a_{22}' & a_{23}' & - & b_2' \\ a_{32}' & \ddots & & \vdots \\ | & & & b_m' \end{matrix}} \\ | & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

(1d) répéter (itérer) ⓐ-ⓒ sur $\square$

Quand ① s'arrête, on a

$$\tilde{Ab} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \ddots & & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \tilde{a}_{rr} \cdots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ \vdots & \vdots & & 0 & 0 & \tilde{b}_m \end{pmatrix}$$

remarque : possible que $r=n$, possible que $m=r$

* un des $\tilde{b}_{r+1} \cdots \tilde{b}_m \neq 0$ ⇒ pas de solution
* tous les $\tilde{b}_{r+1} \cdots \tilde{b}_m$ nuls ⇒ ~~solution~~ :

② solution par substitution

(2a) $x^p_{r+1} \cdots x^p_n$ qcq. (p.ex. nuls)

$$x^p_r = -\frac{1}{\tilde{a}_{rr}} (\tilde{a}_{r\,r+1} x^p_{r+1} + \cdots \tilde{a}_{rn} x^p_n - \tilde{b}_r) \left(= \frac{b_r}{\tilde{a}_{rr}}\right)$$

$$x^p_{r-1} = -\frac{1}{a_{r-1,r-1}} (\tilde{a}_{r-1,r} x^p_r + \cdots \qquad - \tilde{b}_{r-1})$$

$$\vdots$$

$$x^p_1 = -\frac{1}{\tilde{a}_{11}} (a_{12} x^p_2 + \cdots \qquad - \tilde{b}_1)$$

(2b) si $r<n$, espace des solutions de dim $(n-r)$:

$\{x = x^p + z,\ z = \lambda_1 e_{r+1} + \cdots \lambda_{n-r} e_n,\ \lambda_i \in \mathbb{R}\}$

D aspects numériques de l'algo de Gauss

a) observation : erreur absolue F de x_i ⇒ erreur abs. $\Sigma\left|\frac{\tilde{a}_{ji}}{\tilde{a}_{ii}}\right| F$ de x_j, $j<i$
(lors de la subst. ②, mais m̂ pb en (1c) !)

⇝ intérêt à choisir pivots (a_{ii}) grand en (1a), pas premier venu

- le plus grand en valeur abs. dans la colonne (« pivot partiel » « recherche du pivot partielle »)
- l'élément le plus grand de la matrice (« pivot total »)

* important surtout pour grandes matrices ($n>10$)

* équilibrer les lignes auparavant ($\sum_j |a_{ij}|$ du même ordre de grandeur)

ex : (Woodford p.44)

$$0.124\,x_1 + 0.537\,x_2 = 0.661$$
$$0.234\,x_1 + 0.996\,x_2 = 1.23$$

(solution $x_1 = x_2 = 1$)

$II' = II - 1.89\,I$: $-0.014\,x_2 = -0.020$ → $x_2 = 1.43$ → $x_1 = -0.863$

comparer avec

$$0.234\,x_1 + 0.996\,x_2 = 1.23$$
$$0.124\,x_1 + 0.537\,x_2 = 0.661$$

(lignes échangées)

$II' = II - 0.530\,I$: $0.009\,x_2 = 0.009$ → $x_2 = 1.00$ → $x_1 = 1.00$

* matrices symétriques ~~p~~ définies positives : inutile de chercher pivot en dehors de la diagonale

b) Si on cherche plusieurs solutions $Ax^{(1)} = b^{(1)}$, $Ax^{(2)} = b^{(2)}$, $Ax^{(3)} = b^{(3)}$,
on a intérêt à faire le calcul en 1 fois en considérant la matrice

$$(A \mid b_{(1)} \mid b_{(2)} \mid b_{(3)}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b^{(1)}_1 & b^{(2)}_1 & b^{(3)}_1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & & & b^{(1)}_m & b^{(2)}_m & b^{(3)}_m \end{pmatrix}$$

mais si on ~~cherche beau~~ veut calculer beaucoup de solutions,
avantageux de faire décomposition L-R (c.f. suite)

c) ~~particuli~~ matrices tri-diagonales
élimination Gauss (algo Thomas) particulièrement efficace

$$\text{soit } A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & \\ & b_3 & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & b_n & a_n \end{pmatrix} =: \text{tridiag}(b_\mu, a_\mu, c_\mu)$$

si A et diag^t dominante $\Big(|a_1| > |c_1| > 0,$
$|a_\mu| > |b_\mu| + |c_\mu|$; $b_\mu = 0, c_\mu \neq 0, \quad 2 \le \mu \le n-1$
$|a_n| \ge |b_n| > 0 \Big)$

alors $A = L \cdot R$ avec

$$L = \text{tridiag.}(b_\mu, \alpha_\mu, 0) \quad \text{et} \quad R = \text{tridiag}(0, 1, \gamma_\mu)$$

où $\alpha_1 = a_1$, $\gamma_1 = c_1 a_1^{-1}$ et

$$\alpha_\mu = a_\mu - b_\mu \gamma_{\mu-1} \qquad (2 \le \mu \le n)$$

$$\gamma_\mu = c_\mu a_\mu^{-1} \qquad (2 \le \mu \le n-1)$$

(A et régulière, le schéma est num^t stable)

E décomposition $\overset{L-U}{L-R}$ d'une matrice carré de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

observations : étape (1b) de Gauss équiv^t à multipl^o de A par

$$P_{1\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & & \\ \vdots & 1 & \vdots & & \\ & \ddots & 1 & & \\ 1 & \cdots & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$ permutat^o des lignes 1 et μ,

(autres éléments nuls) $\qquad P_{1\mu}^{-1} = P_{1\mu}$

étape (1c) $\Leftrightarrow$ $A \to G_\mu A$ avec

$$G_\mu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & -l_{\mu+1,\mu} & \ddots \\ & & \vdots & \\ & & -l_{n\mu} & & 1 \end{pmatrix}, \quad G_\mu^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & l_{\mu+1,\mu} & \ddots \\ & & \vdots & \\ & & l_{n\mu} & & 1 \end{pmatrix}$$

$l_{\nu\mu} = \frac{a_{\nu\mu}}{a_{\mu\mu}}$, $L'_\nu = L_\nu - l_{\nu\mu} L_\mu$,

$\leadsto$ Gauss $\Leftrightarrow$ $G_{n-1} P_{n-1,\mu_{n-1}} \cdots G_2 P_{2\mu_2} \cdot G_1 P_{1\mu_1} \cdot A = R = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & t_{nn} \end{pmatrix}$

triangulaire sup. droite
("Right")
"Upper"

* ~~P et G commutent~~ $P_{i\mu_i} G_j = \tilde{G}_j P_{i\mu_i}$

si $j < i$

* G_i : triang. inférieure-gauche ("Left" "Lower")
* produit de $G_i G_j \cdots$ aussi "
* inverse d'une matrice triang inf-gauche toujours triang inf-gauche

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{G_{n-1}\tilde G_{n-2}\cdots\tilde G_2\,\tilde G_1}_{L^{-1}}\;\underbrace{P_{n-1}P_{n-2}\cdots P_1}_{=:P}\cdot A = R$$

$$\Leftrightarrow \quad PA = L\cdot R$$

en pratique :

⓪ $T^{(0)} = A$, $P^{(0)} = 1$, $\mu = 1$ $\qquad T^{(\mu)}$ à pour élements $(t^{(\mu)}_{\kappa\nu})$

~~① recherche de pivot dans colonne μ~~

après étape μ :
$$T^{(\mu)} = \begin{pmatrix} r_{11} \cdots & r_{1\mu} \cdots & & \cdots & r_{1n} & c_1 \\ \lambda_{21} \ddots & r_{\mu\mu} & r_{\mu,\mu+1} & \cdots & r_{\mu n} & c_\mu \\ \vdots & \lambda_{\mu+1,\mu} & a^{(\mu+1)}_{\mu+1,\mu+1} & \cdots & a^{(\mu+1)}_{\mu+1,n} & b^{(\mu+1)}_{\mu+1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n,\mu} & a^{(\mu+1)}_{n,\mu+1} & & a^{(\mu+1)}_{nn} & b^{(\mu+1)}_{n} \end{pmatrix}$$

① recherche de pivot dans colonne μ :

chercher $r_\mu \in \{\mu,\mu+1,\dots,n\}$ tel que $|t^{(\mu-1)}_{r_\mu,\mu}| = \max_{\mu\le\kappa\le n} |t^{(\mu-1)}_{\kappa,\mu}|$

② permutat° : échange des lignes r_μ et μ , la nouvelle matrice $\hat T^{(\mu-1)}$ a pour élements $(\hat t^{(\mu-1)}_{\kappa\nu})$

$P^{(\mu)} = P_{\mu r_\mu}\cdot P^{(\mu-1)}$

③ élimination : poser $t^{(\mu)}_{\kappa\mu} = \hat t^{(\mu-1)}_{\kappa\mu} / \hat t^{(\mu-1)}_{\mu\mu}$, $\mu+1 \le \kappa \le n$

stockage compact

$\rightsquigarrow \; t^{(\mu)}_{\kappa\nu} = \hat t^{(\mu-1)}_{\kappa\nu} - t^{(\mu)}_{\kappa\mu}\,\hat t^{(\mu-1)}_{\mu\nu}$, $\mu+1 \le \kappa,\nu \le n$

$t^{(\mu)}_{\kappa\nu} = \hat t^{(\mu-1)}_{\kappa\nu}$ tous les autres élements recopiés tels quels

$\Rightarrow$ $PA = L\cdot R$ avec $L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ t_{21} & \ddots & \\ \vdots & & \\ t_{n1} & \cdots\; t_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & t_{nn} \end{pmatrix}$

$(T^{(n-1)} = (t_{ij}))$

$(P = P^{(n-1)})$

remarques :

a) résoudre équ lin. $Ax=b$:

poser $c=Pb$, résoudre $Lu=c$ puis $Rx=u$

facile car L et R sont mat. triang., donc par substitution

b) calculer A^{-1} : la colonne no. ν de A^{-1}, x^ν, satisfait

$$Ax^\nu = e^\nu \qquad \left(e^\nu = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow \text{ligne } \nu\right)$$

⇝ n systèmes à résoudre par substitut° (voir a))

c) complexité : Gauss ou décomposition L-R :

$$\sim \underset{\substack{\uparrow\\ \text{colonnes}}}{n} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{lignes}}}{n} \cdot \underset{\substack{\nwarrow\\ \text{soustraction}\\ \text{d'une ligne}}}{n} \qquad \text{opérations (additions/multipl,..)}$$

résolut° de $Ax=b$ comme dans a) par substitution : $\sim n^2$ opérations

⇝ une fois qu'on a L et R, solut° peu coûteuses

d) (détail) $\det P = \pm 1$, $\det L = 1$, $\det R = \prod_i t_{ii}$

$\Rightarrow \det A = \pm \prod t_{ii}$

exemple
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\\1&16&81&256\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}3\\1\\-15\\-107\end{pmatrix}$$

$T^{(0)} =$

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&6&12\\1&6&24&60\\1&14&78&252\end{pmatrix} \rightarrow \hat{T}^{(1)} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&14&78&252\\1&6&24&60\\1&2&6&12\end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

mauvais pivot

pivot

$$T^{(2)} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&14&78&252\\1&3/7&-66/7&-48\\1&1/7&-36/7&-24\end{pmatrix}$$

$$T^{(3)} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&14&78&252\\1&3/7&-66/7&-48\\1&1/7&+6/11&24/11\end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&3/7&1&0\\1&1/7&6/11&1\end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&14&78&252\\0&0&-66/7&-48\\0&0&0&24/11\end{pmatrix}$$

$$Lu = Pb = \begin{pmatrix}3\\-107\\-15\\1\end{pmatrix} \rightsquigarrow u = \begin{pmatrix}3\\-110\\204/7\\-168/7\end{pmatrix} ; \quad Rx=u \rightsquigarrow x = \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}$$