Intégration d'équations différentielles

Méthode du point mileu, méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

Etude d'un oscillateur harmonique à deux dimensions perturbé : mouvement d'un objet sous l'action d'une force centrale dérivant du potentiel U(r) = $kr^2/2 + \beta/r^4$.

1. Problème physique

On veut étudier par des méthodes numériques le mouvement, par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen, du centre de masse C d'un objet, de masse m, soumis à une force centrale dirigée vers un point O fixe dans $\mathcal{R}$, et dérivant d'une énergie potentielle de la forme

$$U(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{\beta}{r^4} \tag{1}$$

où $\beta>0$ et $\beta/r^4 << kr^2$.

On se place dans le cas où les conditions initiales sont telles que les vecteurs $\vec{OP_o} = \vec{r_o}$ (position initiale de C dans $\mathcal{R}$) et $\vec{v_o}$ (vitesse initiale par rapport à $\mathcal{R}$) ne sont pas colinéaires. On montre facilement (cours de mécanique DEUG 1ère année) que le mouvement de C s'effectue dans le plan ($\vec{r_o}, \vec{v_o}$).

Lorsque $\beta = 0$, la force s'exerçant sur l'objet est égale à $-k\vec{r}$. On retrouve alors le cas simple d'un oscillateur harmonique à deux dimensions qu'on sait résoudre analytiquement : le mouvement est périodique, caractérisé par une période $T_E = 2\pi(m/k)^{1/2}$, et la trajectoire est une ellipse de centre O.

Lorsque l'on tient compte du terme de perturbation β/r^4 dans l'expression de l'énergie potentielle, la trajectoire peut qualitativement être considérée comme quasi-elliptique sur un intervalle de temps de l'ordre de T_E, mais l'effet du terme perturbateur se traduit par une rotation du grand axe de cette quasi-ellipse. Le but du problème est de construire un programme qui intègre l'équation du mouvement par deux méthodes différentes (*méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 et d'ordre 4),* afin de pouvoir faire une étude de la trajectoire et d'estimer la vitesse de rotation du grand axe pour différentes valeurs des paramètres caractéristiques du problème β, m, k et des conditions initiales. Dans le second cas, on fera appel à une fonction d'intégration rk4_p appartenant à une bibliothèque de fonctions.

2. Equation du mouvement

Soit P la position de C à l'instant t. La force qui s'exerce sur l'objet est donnée par

$$\vec{f} = (-kr + \frac{4\beta}{r^5})\vec{u}_r \tag{2}$$

où $\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire $\vec{r}\,/\,r$ avec $\vec{r} = \vec{OP}$.

En appelant $\vec{a}$ l'accélération de C par rapport à $\mathcal{R}$ et en posant $\omega^2 = k/m$, l'équation du mouvement de C s'écrit

$$\vec{a} = (-\omega^2 r + \frac{4\beta}{mr^5})\vec{u}_r \tag{3}$$

L'équation précédente peut être mise sous la forme adimensionnée

$$\frac{\vec{a}}{\omega^2 r_o} = (-\frac{r}{r_o} + \frac{4\Omega}{\omega}\frac{r_o^5}{r^5})\vec{u}_r \tag{4}$$

où

$$\Omega = \frac{\beta}{m\omega r_o^6} \tag{5}$$

On voit apparaître une grandeur caractéristique Ω qui a la dimension d'une vitesse angulaire.

3. Système d'équations différentielles

On repère la position P de C dans le plan ($\vec{r}_o, \vec{v}_o$) par ses coordonnées cartésiennes x, y dans un repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ où $\vec{u}_x$ *et* $\vec{u}_y$ sont les vecteurs unitaires des axes cartésiens, respectivement $O\vec{x}$ et $O\vec{y}$. A l'instant initial, C est en P_o (x_o, y_o) et les composantes de sa vitesse sont v_{xo} et v_{yo}. Pour certaines questions, on utilisera aussi les coordonnées polaires $[r,\ \theta = tan^{-1}(y/x)]$.

Mettre l'équation différentielle adimensionnée (4) sous la forme d'un système de 4 équations différentielles du premier ordre

$$\frac{dU_j}{dT} = f_j(U_1, U_2, U_3, U_4, T) \qquad j = 1, \ldots 4 \tag{6}$$

où $\vec{U}$ est le vecteur de composantes (X, Y, V_x, V_y)

$$U_1 = X = \frac{x}{r_o}\ ; \quad U_2 = Y = \frac{y}{r_o}\ ; \quad U_3 = V_x = \frac{v_x}{\omega r_o}\ ; \quad U_4 = V_y = \frac{v_y}{\omega r_o}\ ; \quad T = \omega t$$

En introduisant une fonction vectorielle *f*, on peut réécrire le système (6) sous la forme condensée

$$\frac{d\vec{U}}{dT} = f(\vec{U}, T)$$

4. Intégration par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 (encore appelée méthode du point milieu)

Rappel : dans la méthode *rk2*, on passe de la valeur $\vec{U}_i$ de $\vec{U}$ à T_i à la valeur $\vec{U}_{i+1}$ de $\vec{U}$ à T_i+dT en prenant la valeur de la dérivée à l'instant $T_{i+1/2} = T_i + dT/2$

$$\vec{U}_{i+1} = \vec{U}_i + f(\vec{U}_{i+1/2}, T_{i+1/2})dT \tag{7}$$

et en approximant la dérivée à Ti+dT/2 par $f(\vec{U}_i + f(\vec{U}_i, T_i)dT/2)$

ce qu'on peut programmer sous la forme

$$\begin{aligned}
\vec{k}_1 &= f(\vec{U}_i, T_i)dT \\
\vec{k}_2 &= f(\vec{U}_i + \vec{k}_1/2, T_i + dT/2)dT \\
\vec{U}_{i+1} &= \vec{U}_i + \vec{k}_2
\end{aligned}$$

Remarque : Dans la méthode d'Euler, on prend la dérivée à l'instant T et on approxime l'arc de courbe représentative de $U_j(t)$, localement sur l'intervalle T, T+ dT, par la tangente à la courbe en T. La méthode du point milieu revient à approximer l'arc de courbe par un arc de parabole (ce qui est une très bonne approximation si l'on excepte les points anguleux !).

On créera 3 fonctions :
- une fonction *init* pour la saisie des paramètres caractéristiques, des conditions initiales et du pas d'intégration dT.
- une fonction *rk2* pour l'intégration. Cette fonction aura plusieurs arguments parmi lesquels un pointeur sur un réel en double précision pour la transmission du vecteur U (lors de l'appel à *rk2*, il contient l'état du système à l'instant T, et au retour de la fonction, l'état du système à l'instant T+dT), et un pointeur de fonction (pour le système d'équations différentielles).
- une fonction *derive* pour la description du système différentiel (6).

On arrêtera la boucle d'intégration lorsque la variable T devient supérieure à 10π.

Pour pouvoir faire les tracés avec l'application GNUPLOT, on stockera dans un fichier de sortie, tous les *iprint* pas d'intégration, les valeurs de T, X, Y, Vx, Vy, Em, et L, où Em et L représentent respectivement l'énergie mécanique à l'instant t normalisée par rapport à l'énergie mécanique à l'instant initial, et L la norme du moment cinétique de C par rapport à O à l'instant t normalisée par rapport à la norme du moment cinétique à l'instant initial (l'énergie mécanique et le moment cinétique étant deux invariants du mouvement, on peut vérifier si cette invariance est vérifiée aux erreurs liées à la méthode d'intégration et aux erreurs de troncature près).

Application numérique :
Xo = 2 ; Yo = 0. ; Vxo= 0. ; Vyo= 1 ;
m = 1. ; k = 1. : beta = 0.001 dT= 10^{-5} ; iprint = 200 ;

5. Intégration par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

On utilisera, à la place de la fonction *rk2,* la fonction *rk4_p* de la bibliothèque de fonctions C **libphn.a** accessible à l'adresse suivante :

http://www-ph332.script.univ-paris7.fr/version2004-5/libphynum/lib1.html

6. Calcul de la vitesse de rotation du grand axe de l'ellipse

Pour calculer la vitesse de rotation du grand axe de l'ellipse, on utilise les coordonnées polaires [R, $\theta = tan^{-1}(Y/X)$]. On évalue les positions successives des points les plus éloignés (R maximum). Pour cela, on peut faire un test sur la composante radiale de la vitesse $V_R = dR/dT$ (on rappelle que $V_R = Vx \cos\theta + Vy \sin\theta$). Stocker, pour chacun de ces points éloignés, les valeurs de T, R, et θ. Ces valeurs seront stockées respectivement dans des tableaux *tmax, rmax, tetamax*. En déduire des estimations de la vitesse de rotation du grand axe.