Méthodes Numériques - module 36PH3616, Université Paris 7
Examen 2005-2006

Tous les documents sont autorisés, vous pouvez vous connecter sur votre compte.
Commentez votre programme , expliquez et justifiez au maximum sur votre copie les différentes étapes...d'autant plus si votre programme ne compile pas ou marche mal !

Ménisque sur une fibre

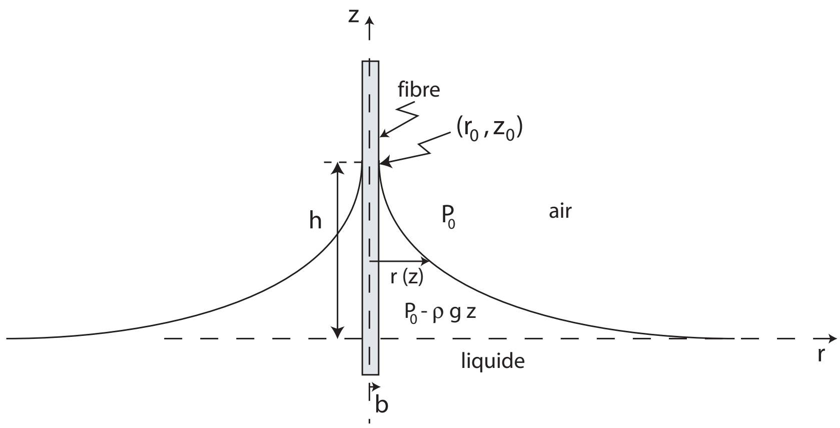

FIG. 1: Le liquide "mouille" la fibre et forme un ménisque

Lorsqu'on plonge une fibre cylindrique dans un bain de liquide, on observe la formation d'un ménisque axi-symétrique (fig. 1). La fibre peut abaisser son énergie de surface au contact du liquide, le liquide mouille alors la fibre sur une hauteur h. On vous propose de calculer le profil $r(z)$ d'un ménisque sur une fibre de rayon b.

Le profil du ménisque résulte de l'équilibre des forces de tension de surface et des forces de pression :

$$\gamma C = -\rho g z \tag{1}$$

où γ est la tension de surface liquide-gaz (N/m), C la courbure (m^{-1}), ρ la masse volumique du liquide et g l'accélération de la pesanteur.

En exprimant la courbure C en fonction de z et r, on obtient l'équation différentielle suivante qu'il nous faut intégrer :

$$-\frac{\ddot{r}}{(1+\dot{r}^2)^{3/2}} + \frac{1}{r\ (1+\dot{r}^2)^{1/2}} = -\frac{\rho g}{\gamma} z, \tag{2}$$

où $\dot{r}$ et $\ddot{r}$ représentent respectivement les dérivées première et seconde de r par rapport à z.

On voit apparaître une longueur caractéristique l_c appelée longueur capillaire, telle que :

$$l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \tag{3}$$

On adimensionne les longueurs par cette longueur caractéristique ($R = r/l_c$, $Z = z/l_c$, $\dot{R} = \dot{r}$ et $\ddot{R} = \ddot{r} l_c$), l'équation (2) devient ainsi l'équation sans dimension :

$$\ddot{R} = Z(1+\dot{R}^2)^{3/2} + \frac{1+\dot{R}^2}{R}. \tag{4}$$

<u>Partie A</u> : Résolution d'une équation différentielle

Q 1 : Pourquoi est-ce important d'adimensionner une équation avant de l'intégrer numériquement ?

Q 2 : Ecrivez un programme (commenté et avec votre nom en entête) permettant de résoudre l'équation (4) et de sauvegarder les valeurs de Z, $R(Z)$ et $\dot{R}(Z)$ dans un fichier. L'intégration de l'équation (4) se fera depuis les valeurs initiales R_0, Z_0 et $\dot{R}_0$ (voir figure) jusqu'à la valeur finale $R = 3$. On prendra un pas d'intégration négatif dZ = - 0,001 (le fait que dZ soit négatif ne change absolument rien) et on préférera la méthode d'Euler modifiée (appelée aussi point milieu ou Runge-Kutta 2) à la méthode d'Euler.

<u>Guide</u> :

- Ecrivez l'équation (4) comme un système de 2 équations différentielles du premier ordre.
- Les valeurs de R et $\dot{R}$ à l'ordonnée $Z + dZ$ sont respectivement déduites des valeurs de (R, $\dot{R}$) et ($\dot{R}$, $\ddot{R}$) à l'ordonnée Z (et éventuellement à $Z + dZ/2$). Votre programme devra donc contenir une première fonction (ou sous-partie) calculant les valeurs de $\dot{R}$ et $\ddot{R}$ et une seconde intégrant $\ddot{R}$ et $\dot{R}$ pour obtenir les nouvelles valeurs de $\dot{R}$ et R. Partant des valeurs initiales (R_0, Z_0 et $\dot{R}_0$), il vous suffira ensuite de mettre en boucle ces fonctions pour calculer l'intégralité de la courbe $R(Z)$.

Q 3 : Exécutez votre programme avec les valeurs initiales $R_0 = 0.1$, $\dot{R}_0 = 0$ et $Z_0 = 0.25$, puis $Z_0 = 0.35$. Tracez et imprimez les courbes $R(Z)$ obtenues à l'aide de Gnuplot. Que remarquez vous, que valent les valeur finales de Z et $\dot{R}$ (pour R =3) ?

<u>Partie B</u> : Recherche de 0

Le ménisque rejoint le bain de liquide à l'horizontale. Ainsi, lorsque Z=0, R tend vers l'infini et $\dot{R}$ tend vers moins l'infini. Si l'on part avec une valeur initiale Z_0 trop élevée, la valeur asymptotique (quand $\dot{R}$ vaut moins l'infini) de Z est supérieure 0. Inversement, si Z_0 est trop petit, le ménisque descend sous la limite $Z = 0$. La solution physique est bien Z=0 pour R tend vers l'infini et $\dot{R}$ tend vers moins l'infini.

Q 4 : Modifiez votre programme pour trouver une bonne valeur approchée de Z_0, telle que pour $R = 3$, la valeur de Z soit proche de 0 et celle de $\dot{R}$ "proche" de moins l'infini (les valeurs de $\dot{R}_0$ et R_0 ne changent pas). On choisira 0.25 et 0.35 comme valeurs d'encadrement initial de Z_0. Le résultat sera jugé satisfaisant lorsque les valeurs finales (c'est à dire pour $R = 3$) de Z et $\dot{R}$ satisfairont : $|Z| < 0.01$ et $\dot{R} <$ - 1000. Il est toujours préférable de limiter également le nombre d'itérations.

Q 5 : La longueur capillaire vaut l_c = 2 mm. Redimensionnez le profil $R(Z)$ obtenu, tracez et imprimez $r(z)$ à l'aide de Gnuplot. Quelle valeur de z_0 obtenez vous ?

<u>Barême</u> (à titre indicatif) :

- Q1 : 0.5 point.
- Q2 : 3 points pour la dérivation, 5 points pour l'intégration, 3 points pour les conditions initiales, la boucle et la cohérence du tout.
- Q3 : 1.5 points.
- Q4: 5 points.
- Q5 : 2points.