

## Examen de Traitement du Signal (Adrian Daerr)

jeudi 11 mai 2017, 9h-12h

La formule suivante peut être utile dans la suite:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi n f} = \frac{\sin(\pi N f)}{\sin(\pi f)} e^{i\pi(N-1)f}$$

### Signal tronqué

Un ingénieur extrait une séquence de  $N$  échantillons d'un enregistrement sonore numérique et y applique la transformée de Fourier discrète pour estimer la distribution spectrale de puissance.

1. Quel effet fausse l'estimation du spectre de puissance de l'enregistrement ? (1 point)
2. Donnez l'expression qui lie la transformée de Fourier discrète  $X_0(f)$  de l'enregistrement entier à la TFD  $X(f)$  de l'extrait. Décrivez qualitativement (éventuellement à l'aide d'une esquisse) le spectre de l'extrait d'un enregistrement d'une sinusoïde pure. (3 points)
3. Quelle longueur minimale  $N$  de l'enregistrement faut-il découper pour distinguer dans le spectre de puissance de l'extrait, deux composantes d'amplitudes comparables et de fréquences réduites proches ( $f$  et  $f + \Delta f$ ) ? (2 points)
4. Décrivez brièvement une technique qui permet de réduire la distortion du spectre évoquée à la question 1. (2 points)

### Émission radio

Une radio numérique est conçue pour une réception de signaux dans la gamme de fréquences 90 MHz–105 MHz. Un filtre passe-bande analogique rejette tout signal en dehors de la bande de réception. Le signal ainsi filtré est converti directement en un signal discret, dans le but d'effectuer numériquement tout le traitement nécessaire à la démodulation.

5. Quelle est la fréquence d'échantillonnage la plus basse qui évite de la perte d'information par repliement ? Expliquez brièvement pourquoi. (2 points)
6. Si le signal discret obtenu était converti en un signal à temps continu par interpolation sinc, quelle relation y aurait-il entre le spectre de ce signal de sortie et le spectre du signal à l'antenne ? À quelle fréquence serait par exemple convertie une onde sinusoïdale à 94 MHz reçue par l'antenne ? (2 points)

### Lissage

Le niveau de la Seine est relevée par un flotteur dont la hauteur est mesurée une fois par minute. Pour réduire les fluctuations de l'affichage numérique dues aux vagues à la surface de l'eau, un microprocesseur applique à la série  $x(n)$  des mesures brutes le filtre numérique  $y(n) = 0.9 y(n - 1) + 0.1 x(n)$  pour enfin afficher  $y(n)$ .

7. De quel type de filtre s'agit-il ? (1 point)
8. Quel est le temps de mémoire typique de ce filtre, si on entend par là le temps qu'il faut pour que la réponse impulsionnelle retombe à la moitié de sa valeur maximale ? (2 points)
9. Les petites vagues apparaissent comme un bruit additif  $\xi_n$  sur les mesures brutes, de moyenne  $\langle \xi_n \rangle = 0$  nulle et d'un écart type de  $\sigma = \sqrt{\langle \xi_n^2 \rangle} = 30$  mm. Il n'y a pas de corrélation mesurable de ce bruit entre différentes mesures (bruit « delta-corrélé »  $\langle \xi_n \xi_m \rangle = \sigma^2 \delta_{nm}$  où  $\delta_{nm}$  est le delta de Kronecker). Quel est l'écart type de l'affichage imputable à ces petites ondes ? Supposez pour simplifier l'analyse que le signal d'entrée *hors bruit* est constant et nul, de sorte à avoir un signal d'entrée formé uniquement par le bruit:  $x(n) = \xi_n$ . (3 points)
10. Donnez la réponse en fréquence du filtre numérique, et esquissez dans le plan complexe la position des pôles et des zéros de la fonction de transfert. (2 points)