Examen de Traitement du Signal (Adrian Daerr) — corrigé

jeudi 11 mai 2017, 9h-12h

Signal tronqué

Un ingénieur extrait une séquence de N échantillons d'un enregistrement sonore numérique et y applique la tranformée de Fourier discrète pour estimer la distribution spectrale de puissance.

1. Quel effet fausse l'estimation du spectre de puissance de l'enregistrement ? (1 point)

Le fait de ne conserver qu'un extrait de N échantillons revient à multiplier le signal avec une fenêtre rectangulaire de longueur N. Le spectre sera donc le spectre d'origine convolué par celui de la porte rectangulaire. Cela modifie le spectre d'origine, puisque le spectre d'une porte rectangulaire n'est pas un Dirac (seul élément neutre de la convolution).

2. Donnez l'expression qui lie la transformée de Fourier discrète $X_0(f)$ de l'enregistrement entier à la TFD $X(f)$ de l'extrait. Décrivez qualitativement (éventuellement à l'aide d'une esquisse) le spectre de l'extrait d'un enregistrement d'une sinusoïde pure. (3 points)

Le spectre de l'extrait est donc

$$X(f) = (X_0 * W_N)(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\hat{f} X_0(f-\hat{f}) \frac{\sin(\pi N \hat{f})}{\sin(\pi \hat{f})} e^{i\pi(N-1)}$$

où $W_N(f)$ est le spectre de la porte rectangulaire:

$$W_N(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_N(x) e^{2i\pi n f} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi n f} = \frac{\sin(\pi N f)}{\sin(\pi f)} e^{i\pi(N-1)f} \tag{1}$$

Cette convolution remplacera un pic dans le spectre X_0 (tel que produit par une sinusoïde) par un sinc, dont la largeur du lobe central est $2/N$, et la hauteur du second lobe à environ $-13\,\mathrm{dB}$.

3. Quelle longueur minimale N de l'enregistrement faut-il découper pour distinguer dans le spectre de puissance de l'extrait, deux composantes d'amplitudes comparables et de fréquences réduites proches (f et $f + \Delta f$) ? (2 points)

On peut supposer les deux pics résolus si le maximum de l'un est sur ou au-delà du premier zéro de l'autre. Cela donne la condition $\pi N \Delta f \geq \pi \quad \Leftrightarrow \quad N \geq 1/\Delta f$

4. Décrivez brièvement *une* technique qui permet de réduire la distortion du spectre évoquée à la question 1. (2 points)

On peut choisir une fenêtre plus lisse sur les bords (exemple: Hann, Hamming, ...), évitant d'introduire une discontinuité brutale au début et à la fin de l'extrait. Le spectre aura un lobe central plus large mais une décroissance plus rapide des lobes secondaires.

Examen de Traitement du Signal (Adrian Daerr) — corrigé
jeudi 11 mai 2017, 9h-12h

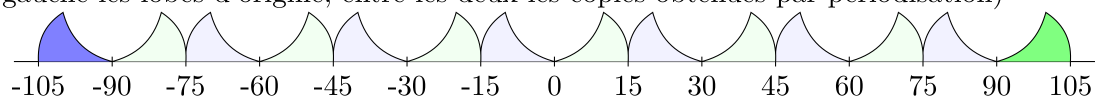
Émission radio

Une radio numérique est conçue pour une réception de signaux dans la gamme de fréquences 90 MHz–105 MHz. Un filtre passe-bande analogique rejette tout signal en dehors de la bande de réception. Le signal ainsi filtré est converti directement en un signal discret, dans le but d'effectuer numériquement tout le traitement nécessaire à la démodulation.

5. Quelle est la fréquence d'échantillonnage la plus basse qui évite de la perte d'information par repliement ? Expliquez brièvement pourquoi. (2 points)

L'échantillonnage «périodise» le spectre avec une période correspondant à la fréquence d'échantillonnage F_e. Le spectre du signal radio étant réel possède deux lobes, l'un entre 90 MHz–105 MHz et l'autre dans l'intervalle -105 MHz–-90 MHz. Pour éviter le repliement il faut donc au moins que $F_e > 2 * (105\,\mathrm{MHz} - 90\,\mathrm{MHz}) = 30\,\mathrm{MHz}$.

On peut se convaincre que la limite inférieure fonctionne (tout juste) ici (à droite et à gauche les lobes d'origine, entre les deux les copies obtenues par périodisation)



6. Si le signal discret obtenu était converti en un signal à temps continu par interpolation sinc, quelle relation y aurait-il entre le spectre de ce signal de sortie et le spectre du signal à l'antenne ? À quelle fréquence serait par exemple convertie une onde sinusoïdale à 94 MHz reçue par l'antenne ? (2 points)

La restitution par interpolation sinc revient à garder les lobes les plus proches de $F = 0$, produisant donc un signal à bande (-15 MHz,15 MHz). Le signal situé à l'origine à 94 MHz se trouve maintenant à 4 MHz = 94 MHz - 3*30 MHz (ainsi qu'à la fréquence symétrique -4 MHz, s'agissant d'un signal réel).

Lissage

Le niveau de la Seine est relevée par un flotteur dont la hauteur est mesurée une fois par minute. Pour réduire les fluctuations de l'affichage numérique dues aux vagues à la surface de l'eau, un microprocesseur applique à la série $x(n)$ des mesures brutes le filtre numérique $y(n) = 0.9\,y(n-1) + 0.1\,x(n)$ pour enfin afficher $y(n)$.

7. De quel type de filtre s'agit-il ? (1 point)

Il s'agit d'un filtre LTI auto-regressif (IIR) tout-pôles et causal.

8. Quel est le temps de mémoire typique de ce filtre, si on entend par là le temps qu'il faut pour que la réponse impulsionnelle retombe à la moitié de sa valeur maximale ? (2 points)

La réponse impulsionnelle est la sortie pour un signal $x(n) = \delta(n)$ en entrée: $y(0) = 0.1$, $y(1) = 0.09$, $y(2) = 0.081$, $\ldots$, $y(n) = 0.1 * 0.9^n$. La condition $y(n)/y(0) < 0.5$ mène directement à la condition $n > \log(0.5)/\log(0.9) = 6.57\ldots$. Le temps de mémoire vaut donc un peu moins de sept échantillons, ou sept minutes de temps réel.

9. Les petites vagues apparaissent comme un bruit additif ξ_n sur les mesures brutes, de moyenne $\langle \xi_n \rangle = 0$ nulle et d'un écart type de $\sigma = \sqrt{\langle \xi_n^2 \rangle} = 30\,\text{mm}$. Il n'y a pas de corrélation mesurable de ce bruit entre différentes mesures (bruit «delta-corrélé» $\langle \xi_n \xi_m \rangle = \sigma^2 \delta_{nm}$ où δ_{nm} est le delta de Kronecker). Quel est l'écart type de l'affichage imputable à ces petites ondes ? Supposez pour simplifier l'analyse que le signal d'entrée *hors bruit* est constant et nul, de sorte à avoir un signal d'entrée formé uniquement par le bruit: $x(n) = \xi_n$. (3 points)

L'écart type de la sortie vaut:

$$
\begin{aligned}
\langle y_n^2 \rangle &= \langle \frac{1}{10^2} \sum_{k,l=0}^{\infty} (\frac{9}{10})^{k+l} \xi_{n-k} \xi_{n-l} \rangle && (2)\\
&= \frac{1}{10^2} \sum_{k,l=0}^{\infty} (\frac{9}{10})^{k+l} \langle \xi_{n-k} \xi_{n-l} \rangle && (3)\\
&= \frac{1}{10^2} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{9}{10})^{2k} \sigma^2 && (4)\\
&= \frac{\sigma^2}{19}. && (5)\\
& && (6)
\end{aligned}
$$

Le passage (2)–(3) exploite la linéarité de la moyenne (qui porte sur n), le passage (3)–(4) l'absence de corrélation. Finalement on extrait σ^2 de la somme et on calcule la série géométrique (passage (4)–(5)).

Le lissage diminue donc le bruit du signal d'entrée, l'écart-type des fluctuations du signal de sortie n'est plus que de $\sigma/\sqrt{19} \simeq 7\,\text{mm}$.

10. Donnez la réponse en fréquence du filtre numérique, et esquissez dans le plan complexe la position des pôles et des zéros de la fonction de transfert. (2 points)

La fonction de transfert vaut $H(z) = 0.1/(1 - 0.9z^{-1})$, la réponse en fréquence donc $H(e^{2i\pi f}) = 0.1/(1 - 0.9\,e^{-2i\pi f})$. La fonction de transfert possède un pôle en 0.9 et un zéro à l'origine (qui n'a aucune incidence sur le gain). Il s'agit donc d'un passe-bas.