Partiel de Traitement du Signal (Adrian Daerr) — corrigé
lundi 13 mars 2017, 10h45-11h45

Réponse impulsionnelle

1. Définissez la réponse impulsionnelle d'un système (filtre) à temps continu. (1 point)

Il s'agit de la réponse $h(t)$ du système à un signal en entrée consistant en une unique impulsion au temps $t = 0$ (distribution de Dirac $\delta(t)$).

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{système}} \longrightarrow h(t)$$

2. Dans certains systèmes la connaissance de la réponse impulsionnelle $h(t)$ permet de calculer la réponse $y(t)$ à un signal en entrée $x(t)$ quelconque.
   a) Rappelez les propriétés qu'un tel système doit posséder. (1 point)
   b) Donnez la formule qui permet de calculer $y(t)$ à partir de $x(t)$ et de $h(t)$. (1 point)
   c) Prouvez cette formule, en montrant comment elle découle de la définition de la réponse impulsionnelle et des propriétés du système. (1 point)

a) Le système doit être linéaire et invariant par translation dans le temps.

b) $y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

c)

$$\begin{aligned}
\delta(t) &\mapsto h(t) \\
&\qquad\qquad \text{invariance par translation dans le temps} \\
\delta(t-\tau) &\mapsto h(t-\tau) \\
&\qquad\qquad \text{linéarité} \\
x(\tau)\delta(t-\tau) &\mapsto x(\tau)h(t-\tau) \\
&\qquad\qquad \text{linéarité} \\
\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau}_{x(t)} &\mapsto \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau}_{y(t)}
\end{aligned}$$

Échantillonnage et repliement de spectre

3. À quelle condition peut-on reconstruire un signal à temps continu $x(t)$ à partir du signal échantillonné $x_n = x(nT)$? (2 points)

Si un signal de bande (B_1, B_2) a été échantillonné à une fréquence F_e au moins égale à $B_2 - B_1$ (fréquence de Nyquist), il peut être parfaitement reconstruit à partir de la suite des échantillons: $x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_n \operatorname{sinc}(F_e t - n)$.

4. Expliquez le phénomène de repliement spectral lors de l'échantillonnage d'un signal. (2 points)

Le spectre du signal échantillonnée (transformée de Fourier à temps discret) est donné par la «périodisation» du spectre du signal continu $X(F)$ avec une période F_e (formule de Poisson: $\sum_n x_n \exp(-2\pi i n F/F_e) = F_e \sum_n X(F - nF_e)$). Si le support de $X(F)$ est plus large que F_e, les différentes contributions dans la somme de droite se chevauchent. Sur un intervalle de largeur F_e et pour le spectre d'un signal réel (tel que $|X(F)|$ est pair), cette superposition apparaît comme un *repliement* vers l'intérieur des parties du spectre $X(F)$ d'en dehors de l'intervalle.

5. Quelles conséquences pratiques doit-on craindre en cas de repliement ? (1 point)

Le signal continu reconstruit, $y(t) = \sum x_n h(t - nT)$, dont le spectre est $Y(F) = H(F) F_e \sum X(F - nF_e)$, sera en général différent de $x(t)$ s'il y a repliement (aucun choix de $H(F)$ ne permettant d'avoir $Y(F) = X(F)$).

En conséquence on aura dans le signal reconstruit, à chaque fréquence, des contributions «repliées» en plus de la composante présente dans le signal original. Plus exactement, la composante de fréquence F sera une superposition des composantes aux fréquences $\ldots, F - F_e, F, F + F_e, F + 2F_e, \ldots$ du signal d'origine.

6. Comment les éviter ? (1 point)

Il n'y a pas de repliement si la largeur de bande du signal $x(t)$, soit la largeur du support de son spectre $|X(F)|$, est inférieure à F_e. Deux possibilités pour y parvenir:
- Augmenter la fréquence d'échantillonnage F_e.
- Limiter la bande du signal $x(t)$ *en amont* de l'échantillonneur.

Filtre numérique

Analysez et discutez le filtre numérique suivant:

$$y(n) = \frac{1}{2}x(n) - x(n-1) + \frac{1}{2}x(n-2)$$

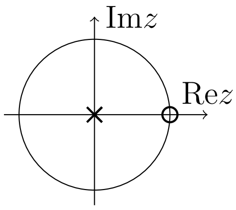
7. Quelle est sa réponse impulsionnelle $h(n)$? (1 point)

$$h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) - \delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2)$$

8. Quelle est sa fonction de transfert $H(z)$? (1 point)

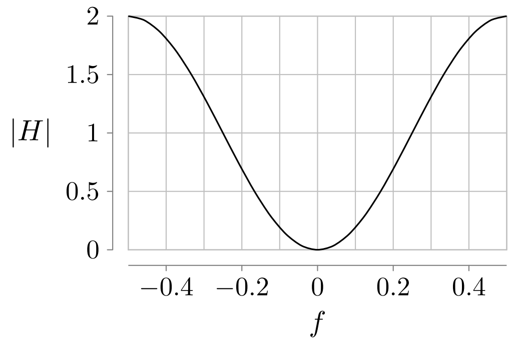
$$H(z) = \frac{1}{2} - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} = \frac{1}{2}(1 - z^{-1})^2 = \frac{(z-1)^2}{2z^2}$$

9. Esquissez où se trouvent les pôles et les zéros de $H(z)$ dans le plan complexe z. (1 point)



On voit à l'expression donnée à la question précédente que $H(z)$ possède un zéro double en $z = 1$ et un pôle double à l'origine (qui rend le filtre causal).

10. Quelle est la réponse en fréquence du filtre ? Esquisseze qualitativement son comportement. (1 point)



Réponse en fréquence et gain:

$$H(e^{2\pi if}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi if})^2$$
$$\Rightarrow |H(e^{2\pi if})| = 2\sin(\pi f)^2 = 1 - \cos(2\pi f)$$

La phase de ce filtre FIR d'ordre 2 décroît linéairement de 2π pour $f = -1/2$ à 0 pour $f = +1/2$, en passant par π pour $f = 0$.

11. De quel genre de filtre s'agit-il ? (1 point)

Il s'agit d'un filtre passe-haut, puisque le gain est nul en $f = 0$ et maximal en $f = 1/2$.

12. À partir d'un calcul ou d'un raisonnement graphique, donner le comportement du filtre aux petites fréquences. À quel filtre à temps continu ce comportement correspond-il ? (2 points)

Le gain du filtre est proportionnel au produit des distances entre le point $e^{2\pi if}$ et chacun des zéros de la fonction de transfert. Tant que l'argument de l'exponentielle est petit, la distance au zéro en $z = 1$ ($f = 0$) est de l'ordre de l'argument. Compte tenu du fait que ce zéro est double, le gain évolue donc en $(2\pi f)^2$ pour $f \ll 1$. Un développement limité de l'exponentielle au premier ordre donne le même résultat:

$$H(e^{2\pi if}) \overset{f \ll 1}{\simeq} -\frac{(2\pi f)^2}{2}$$

Une multiplication de la transformée de Fourier par $-(2\pi f)^2$ correspond à une double dérivée du signal temporel: pour de petites fréquences ce filtre est donc (à un facteur 1/2 près) un approximation du filtre à temps continu qui calcule la dérivée seconde du signal d'entrée: $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2 : \quad x(t) \mapsto x''(t)$.

Partiel de Traitement du Signal (Adrian Daerr) — corrigé
lundi 13 mars 2017, 10h45-11h45

Implémentations d'un filtre numérique FIR

Lors du dernier cours nous avons vu le filtre à réponse impulsionnelle finie défini par la fonction réponse suivante:

$$H(z) = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \cdots + a^q z^{-q}$$

13. Donner une implémentation non récursive de ce filtre, donc une relation $y(n) = \ldots$ dont le côté droit ne dépend que de x et non de y. (1 point)

$$y(n) = x(n) + ax(n-1) + a^2 x(n-2) + \cdots + a^q x(n-q)$$

14. Reconnaissant le début d'une série géométrique $\Sigma_{k=0}^{q} a^k z^{-k}$, trouver une expression plus compacte de la fonction de transfert $H(z)$. À quelle condition existe-t-elle ? (1 point)

$$H(z) = \frac{1 - a^{q+1} z^{-(q+1)}}{1 - az^{-1}} \qquad \text{pour} \quad z \neq a$$

On peut prolonger cette fonction de manière régulière en $z = a$ en lui attribuant la valeur $H(z = a) = q + 1$: il ne s'agit pas d'un vrai pôle (la fraction ci-dessus n'est pas irréductible) et le domaine de convergence de la TZ peut être étendu à tout le plan complexe excepté l'origine.

15. En déduire une implémentation récursive du même filtre causal. (1 point)

L'expression précédente se traduit en la relation autoregressive

$$y(n) = ay(n-1) + x(n) - a^{q+1} x(n - q - 1)$$

qui est inconditionnellement stable EBSB.