Propagation d'ondes non-linéaires dans une chaîne de billes en contact de Hertz.

Christophe COSTE, Eric FALCON & Stephan FAUVE

ENS-Lyon, Laboratoire de physique, U.R.A. 1325.
46, Allée d'Italie, 69364 LYON cedex 07. e-mail: coste@physique.ens-lyon.fr

---

Nous étudions la propagation d'une onde d'amplitude moyenne ou forte dans un réseau unidimensionnel de billes soumises à une compression statique. En régime faiblement anharmonique, nos simulations numériques mettent en évidence les effets de discrétisation inhérents au système. En régime fortement anharmonique, des études théoriques ont montré l'existence d'ondes solitaires supersoniques; nous avons pu observer de telles excitations non-linéaires, et des mesures préliminaires de leur vitesse semblent en accord avec ces prédictions.

La relation entre la force exercée entre deux billes et leur distance d'approche est fortement non-linéaire (contact de Hertz), et on peut s'attendre à des effets importants des non-linéarités sur la propagation d'ondes de compression dans ce type de milieu. Un tel système, présentant à la fois un caractère *non-linéaire* et une structure *discrète*, est intéressant en tant qu'exemple de *réseau non-linéaire* ainsi qu'en tant que *milieu granulaire* modèle.

Les réseaux non-linéaires ont été jusqu'ici surtout abordés dans la limite continue. Ils sont alors décrits par une équation aux dérivées partielles (EDP) non-linéaire, non par un système d'équations différentielles couplées. La limite fortement discrète est un sujet de débat actuel, d'autant que le système d'équations différentielles sous-jacent perd la plupart des caractéristiques, en particulier l'intégrabilité, qui pourraient être propres à sa limite continue.

Un système unidimensionnel ordonné semble une modélisation très rudimentaire d'un milieu granulaire réel. Toutefois, nous pouvons espérer mieux comprendre les effets des non-linéarités du contact de Hertz entre les billes, qui peuvent être importants lorsque des milieux granulaires géologiques, souvent soumis à une pression statique, sont l'objets de fortes sollicitations dynamiques, lors d'un séisme ou à la suite d'une explosion. En outre, les effets de discrétisation sont généralement négligés dans les théories actuelles de l'acoustique des milieux granulaires, qui sont des théories de milieu effectif continu [GOD 90].

I Modélisation.

Notre dispositif est représenté schématiquement sur la figure $N^{\circ}1$ ci-dessous. Il s'agit d'une chaîne de sphères solides identiques, de rayon a, soumises à une force statique F_0. Deux sphères voisines voient leurs centres se rapprocher d'une distance δ_0 donnée par:

$$\delta_0 = \frac{2(\theta F_0)^{2/3}}{a^{1/3}}, \quad \text{avec} \quad \theta \equiv \frac{3(1-\nu^2)}{4E}; \tag{1}$$

où E est le module d'Young et ν le coefficient de Poisson du matériau constituant les billes. Ce résultat est une solution exacte des équations de *l'élastostatique linéaire* (solution de Hertz, cf. [LAN 86]), et la relation non-linéaire entre δ_0 et F_0 est un effet uniquement géométrique.

Si tous les temps caractéristiques sont grands devant le temps d'aller-retour d'une onde acoustique à l'intérieur d'une bille, les phénomènes étudiés sont quasi-statiques et il est légitime de modéliser le système par une chaîne de masses ponctuelles intéragissant entre plus proches voisines anharmoniquement par la force de Hertz. La dynamique non-linéaire complète du réseau est alors régie par un système d'équations différentielles couplées qui s'écrit [NES 83]

$$\begin{aligned} \ddot{u}_n &= A\delta_0^{3/2}\left[\left(1-\frac{u_n-u_{n-1}}{\delta_0}\right)^{3/2} - \left(1-\frac{u_{n+1}-u_n}{\delta_0}\right)^{3/2}\right], \\ A &\equiv \frac{\sqrt{a/2}}{2m\theta}, \end{aligned} \tag{2}$$

où u_n est le déplacement du centre de la n-ième bille par rapport à sa position d'équilibre et m la masse d'une bille.

Le système d'équation (2) n'est pas intégrable, c'est à dire qu'il n'est pas possible de prendre en compte analytiquement *à la fois* les effets non-linéaires et le caractère discret du réseau. Lorsqu'on linéarise complètement le problème, comme au §**II** ci-après, on peut garder totalement la nature discrète du système. Au §**III**, nous verrons qu'il est possible de prendre en compte les effets anharmoniques au premier ordre non trivial en puissance de $|u_n - u_{n-1}|/\delta_0 \ll 1$, en considérant des excitations semi-discrètes, qui sont des modulations de grande longueur d'onde d'une porteuse de longueur d'onde quelconque. Enfin au §**IV** on aborde la limite fortement anharmonique $|u_n - u_{n-1}|/\delta_0 \gg 1$, mais dans une approximation continue.

On remarquera que nous employons une solution de l'élastostatique, eqn. (1), dans un problème de dynamique. Il est vraissemblable que la solution de Hertz n'est plus valable lorsque la fréquence des phénomènes considérés devient de l'ordre de la fréquence propre de vibration d'une bille. Cette fréquence, pour une bille d'acier de 4 mm de rayon, est environ $600\,kHz$, soit une période de $1.7\,\mu s$; la fréquence de coupure du réseau [définie plus bas, voir eqn. (5)] est typiquement $30\,kHz$, et la durée des pulses étudiés au §**IV** est au moins de $40\,\mu s$: l'approximation quasi-statique reste donc légitime même dans ce cas. Cette différence d'ordre de grandeur entre temps caractéristiques justifie aussi de considérer les billes comme des masses ponctuelles.

Par ailleurs, le calcul de Hertz décrit un contact entre solides parfaitement élastiques. Lorsque les contraintes deviennent importantes les déformations sont plastiques. Afin de rester dans la limite élastique, il est nécessaire que la contrainte maximale lors du contact reste strictement inférieure à la pression limite de déformation plastique du matériau constituant les solides entrant en contact. Pour un impact entre deux sphères en acier, cette limite est dépassée pour des vitesses d'impact de l'ordre de $0.3\,ms^{-1}$ [LIF 64, JOH 92]. Lors de l'étude du régime fortement non-linéaire du §**IV**, la vitesse de la bille impactante est de l'ordre de $1\,ms^{-1}$. Le choc est donc élastique-plastique. Cependant, la loi de Hertz reste encore valide si le volume de la région où a lieu la déformation plastique est assez petit devant le volume qui est déformé élastiquement lors de l'impact; en pratique celà correspond à des v! itesses d'impacts de l'ordre de huit fois la vitesse critique requise pour observer un début d'indentation plastique [LIF 64].

II Approximation linéaire.

La chaîne de billes, à l'approximation linéaire, se comporte comme une chaîne de masses ponctuelles, reliées par des ressorts identiques de constante de raideur

$$k \equiv \left(\frac{\partial \delta_0}{\partial F_0}\right)^{-1} = \frac{3}{4}\,\frac{(aF_0)^{1/3}}{\theta^{2/3}}. \tag{3}$$

La relation de dispersion reliant le nombre d'onde q à la fréquence ω est classiquement donnée par

$$\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\,|sin(qa)|\,, \tag{4}$$

et on déduit de cette relation la fréquence de coupure du réseau,

$$fc = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{3}{4\pi^{3/2}}\,\frac{F_0^{1/6}}{\theta^{1/3}a^{4/3}\rho^{1/2}}, \tag{5}$$

où ρ est la masse volumique du matériau constituant les billes; de même la vitesse de propagation des ondes de grande longueur d'onde, c'est à dire la vitesse du son c_S dans le réseau, est donnée par

$$c_S \equiv \lim_{q\to 0}\frac{\omega}{q} = 2a\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{3}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{F_0^{1/6}}{\theta^{1/3}a^{1/3}\rho^{1/2}}. \tag{6}$$

On notera que la vitesse du son et la fréquence de coupure dépendent toutes deux de la compression statique comme $F_0^{1/6}$. Un phénomène remarquable a lieu pour $F_0 = 0$: la vitesse du son et la fréquence de coupure s'annulent toutes les deux, et les excitations linéaires (c'est-à-dire les phonons du réseau) ne se propagent plus dans le système! Nesterenko [NES 83] appelle ce régime celui du "vide sonique" (sonic vacuum); nous reviendrons sur ce phénomène au §**IV**.

Le dispositif expérimental est représenté sur la figure $N^{\circ}1$ ci-dessous. La chaîne de billes est contenue dans un bâti en téflon, matériau dans lequel la vitesse du son est très faible (inférieure à la vitesse du son dans le réseau de billes d'acier ou de verre) de sorte que le signal qui "passe" dans le bâti ne perturbe pas la réception de celui qui nous intéresse. Par ailleurs les propriétés autolubrifiantes du téflon permettent de diminuer une des causes éventuelles de dissipation. L'émetteur est constitué, en régime linéaire, par une céramique piézoélectrique, tandis que nous avons construit un émetteur à impact, décrit au §**IV**, pour obtenir des ondes de grande amplitude.

Figure N° **1:** *Vue en coupe du dispositif expérimental. La chaîne comporte une cinquantaine de billes identiques de diamètre* 8 mm*, en acier ou en verre suivant le cas. Les orifices (1) à (3) sont prévus pour placer des capteurs de force. Des embouts permettent, à gauche, de soumettre l'ensemble à une force statique, mesurée avec un dynamomètre, et à droite d'émettre une onde de compression.*

La figure $N^{\circ}2$ présente des résultats sur l'évolution de la fréquence de coupure [N° 2 (a), voir eqn. (5)] et de la vitesse du son [N° 2 (b), voir eqn. (6)] avec la force statique appliquée. Pour les billes d'acier utilisées dans les expériences, si F_0 est exprimée en kgf, les valeurs théoriques sont $f_c = 23,7 F_0^{1/6}\, kHz$ et $c_s = 597 F_0^{1/6}\, ms^{-1}$. Les mesures de vitesses ont été effectuées avec des trains d'ondes de 5 oscillations, chacune de fréquence $10\, kHz$, à comparer à la fréquence de coupure la plus basse (pour $F_0 = 1\, kgf$) de $20\, kHz$. Ces valeurs ont par ailleurs été confirmées par une étude de la réponse en fréquence du système, à l'aide d'un analyseur de spectre. L'accord théorie/expérience est excellent, ce qui n'est pas surprenant mais constitue un test de notre dispositif expérimental.

Figure N° **2:***(a) Evolution de la fréquence de coupure f_c, en kHz, en fonction de la force statique F_0 appliquée en kgf, pour un réseau de billes d'acier. (b) Evolution de la vitesse du son c_s, en ms^{-1}, en fonction de la force statique appliquée F_0 en kgf, pour le même réseau qu'en (a). Dans chacun des cas les croix représentent les points expérimentaux, la courbe pleine la valeur théorique, donnée dans le texte.*

III Approximation faiblement anharmonique.

Lorsque $|u_n - u_{n-1}| < \delta_0$, on peut développer en série le second membre de (2) pour obtenir

$$\ddot{u}_n = C_1(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) + \sum_{i=2}^{\infty} C_i \left[(u_n - u_{n-1})^i - (u_{n+1} - u_n)^i\right] \quad (7)$$

où les C_i sont des constantes toutes positives.

Dans une approximation faiblement anharmonique telle que $|u_n - u_{n-1}| \ll \delta_0$, on peut envisager de tronquer le développement, la première correction anharmonique étant donnée par l'ordre $i = 3$. Un effet évident des termes non-linéaires est la génération d'harmoniques; Flytzanis & al. [FLY 85] prennent en compte cet effet en faisant en outre une approximation semi-discrète, qui consiste à chercher $u_n(t)$ sous la forme

$$u_n(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \epsilon^l \sum_{p=0}^{\infty} \left[F_{l,p}(X,T)e^{ip(2qna-\omega t)} + C.C.\right], \qquad \epsilon \ll 1, \qquad (8)$$

où $C.C.$ représente le complexe conjugué du premier terme entre crochets, ce qui assure que $u_n(t)$ est réel. Ce développement décrit le mouvement de chaque bille comme une superposition de tous les harmoniques du mode fondamental du réseau discret, $e^{\pm i(2qna-\omega t)}$, affectés chacun d'une amplitude de modulation $F_{lp}(X,T)$, lentement variable en temps et en espace. Pour traiter ce type de problèmes, on peut utiliser la méthode dite des "échelles multiples", dont nous donnons les grandes lignes ci-dessous (pour une introduction pédagogique voir [NAY 73]). Formellement, on écrit que les termes d'amplitude dépendent de $X = (x_1 \equiv \epsilon x, x_2 \equiv \epsilon^2 x, \ldots)$ et $T = (t_1 \equiv \epsilon t, t_2 \equiv \epsilon^2 t, \ldots)$, donnant ainsi une expression mathématique de la notion physique de fonction lentement variable (ici la modulation) par rapport à une autre (ici la porteuse discrète). Les dérivées de $F_{l,p}$ par rapport à x et t s'écrivent alors

$$\frac{\partial}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \epsilon^3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \ldots \tag{9a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \epsilon^3 \frac{\partial}{\partial t_3} + \ldots \tag{9b}$$

On reporte alors le développement (8) dans (7), en passant à la limite continue pour les amplitudes de modulation $F_{l,p}$,

$$\begin{aligned} F_{l,p}(n,T) - F_{l,p}(n-1,T) &= F_{l,p}(X,T) - F_{l,p}(X-2a,T) \\ &= 2a\epsilon \frac{\partial F_{l,p}}{\partial x_1} + \ldots \end{aligned} \tag{10}$$

où on a utilisé (9a) pour écrire la dernière égalité; on calcule ensuite les dérivées temporelles de $F_{l,p}$ avec (9b), et on traite séparément chaque harmonique ordre par ordre en puissances du petit paramètre ϵ. Les amplitudes *a priori* inconnues $F_{l,p}(X,T)$ sont les degrés de liberté qui permettent d'éliminer les termes séculaires[1] susceptibles d'apparaitre au second membre. Ces éliminations successives, effectuées ordre par ordre, donnent les équations auxquelles obéissent les amplitudes $F_{l,p}(X,T)$. Flytzanis & al. [FLY 85] ont montré que l'amplitude $F_{11}(\tau,\xi)$ du fondamental ($p=1$), à l'ordre 1 en ϵ ($l=1$), obéit à l'équation de Schrödinger non-linéaire (NLS), que l'on peut écrire sous la forme suivante:

$$-i\frac{\partial F_{11}}{\partial \tau} + \frac{\lambda}{2\omega}\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial \xi^2} - \frac{Q}{2\omega}\left|F_{11}\right|^2 F_{11} = 0, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tau \equiv \epsilon^2 t \\ \xi \equiv \epsilon(x - c_g t) \end{cases}, \tag{11}$$

où l'on a introduit la vitesse de groupe $c_g \equiv \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}q$, calculée à la fréquence ω à partir de (4).

Il est inutile de donner ici l'expression des paramètre λ et Q, le détail des calculs étant assez lourd, mais il est important de préciser qu'ils sont tous deux positifs.

1 Ce sont les termes d'ordre $l-1$ qui donneraient un forçage résonant du terme d'ordre l, conduisant à une solution $u_n^{(l)}(t) \propto \epsilon^l t e^{i\omega t}$ inacceptable physiquement puisqu'elle ne reste pas bornée pour tout temps.

Dans cette configuration, NLS admet des solutions ondes planes $\alpha e^{i(Kx-\Omega t)}$, de fréquence Ω et de nombre d'onde K avec $\Omega = (\lambda/2\omega)K^2 + (Q/2\omega)\alpha^2$, d'amplitude constante α, qui sont *stables* vis à vis de petites perturbations; de telles solutions existent aussi lorsque les signes des coefficients des termes dispersifs (λ) et non-linéaires (Q) sont opposés, mais elles sont alors instables. Il existe aussi des solutions de type soliton, c'est à dire des excitations non-linéaires localisées spatialement qui se propagent sans déformation au cours du temps; l'exemple le plus simple d'une telle solution est fourni par le profil en tangente hyperbolique,

$$\begin{aligned} & F_{11}(\xi,\tau) = \alpha \,\mathrm{th}\left(\frac{\xi}{\frac{1}{\alpha}\sqrt{2\lambda/Q}}\right) e^{i\left(\frac{Q\alpha^2}{2\omega}\right)\tau} \\ \text{soit} \qquad & F_{11}(x,t) = \alpha \,\mathrm{th}\left(\frac{x-c_g t}{\frac{1}{\epsilon\alpha}\sqrt{2\lambda/Q}}\right) e^{i\left(\frac{Q\alpha^2}{2\omega}\right)\epsilon^2 t}; \end{aligned} \tag{12}$$

on notera que le seul paramètre dont dépende le soliton est son amplitude α; cette amplitude est d'ordre 1, mais il est rappelé que $F_{11}(x,t)$ est une contribution d'ordre ϵ à $u_n(t)$. Cette solution est appelée "soliton noir", car elle correspond, pour la solution complète $u_n(t)$ obtenue en reportant l'expression de $F_{11}(x,t)$ dans le développement (8), à un creux d'amplitude dans l'onde porteuse de fréquence ω, avec une variation de phase de π entre $x - c_g t = 0^-$ et $x - c_g t = 0^+$. Il existe aussi des solitons "gris" [KIV 93], tels que l'amplitude ne soit pas exactement nulle au centre du soliton, et le saut de phase plus graduel. Formellement le terme de phase, qui dans (12) est fonction de la variable τ seulement, dépend aussi de ξ pour un soliton gris.

Nous avons effectué des simulations sur un réseau de quelques centaines de billes, ayant les propriétés de l'acier, pour une force statique $F_0 = 9.81\,N$. Nous nous sommes placés dans la limite $\omega \to 0$, afin de mieux comparer nos résultats avec les observations du §**IV**; dans cette limite $Q \simeq \omega^2$ et $\lambda \simeq \omega^2$, donc λ/Q fini, et par ailleurs le terme de phase de (12) s'annule. Les unités de la simulation sont telles que, dans cette limite, la largeur de l'excitation (12) soit l'inverse de son amplitude réduite. Nous avons utilisé une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, et vérifié la conservation de l'énergie totale de la chaîne à 10^{-5} près au cours du calcul. Le pas de temps utilisé est très inférieur au temps typique[2] de collision entre deux sphères; en unités physiques, le temps de collision est environ $40\,\mu s$ et le pas de temps $0.16\,\mu s$. La simulation est arrêtée lorsque l'onde commence à se réfléchir en bout de chaîne.

Dans la première simulation (figure $N^\circ\,3$), la forme de l'onde n'est pas solution de NLS sous la forme (11). L'onde envoyée se déforme: d'une part il y

[2] Ce temps de collision est le plus petit qui apparaisse dans le système, puisque nous simulons les équations (2) qui sont valable dans la limite quasi-statique où on néglige la propagation de l'onde acoustique au sein d'une bille.

a un élargissement net du profil au cours du temps (comparer 3–b et 3–c), et d'autre part on voit très bien l'émission de phonons. Il est intéressant de comparer l'évolution de ce pulse d'amplitude faible avec celle d'un pulse de grande amplitude tel que ceux présentés dans les figures $N^{\circ}9$ & 10. La deuxième simulation (figure $N^{\circ}4$) montre l'évolution d'une solution telle que (12), de même amplitude crête à crête et de même largeur que la précédente; la comparaison est légitime car dans chaque cas un même nombre de bille, environ une vingtaine, participe à l'excitation. On voit nettement que cette solution se propage sans déformation, ni émission de phonons.

Il est possible de mesurer numériquement la vitesse de propagation de l'onde. Une illustration de cette étude est fournie par la figure $N^{\circ}5$. La valeur attendue pour une solution telle que (12) est $c_g \approx c_s$ dans la limite $\omega \to 0$, indépendante de l'amplitude de l'onde. Ce type de solution se propage sans déformation notable jusqu'à des amplitudes réduites inférieures à 0.35 (l'onde de la figure $N^{\circ}4$ a une amplitude de 0.32), et on trouve la vitesse attendue à 0.5% près. La vitesse d'un pulse non solution de (11), tel que celui de la figure $N^{\circ}3$, est plus faible et moins bien définie dès que son amplitude devient supérieure à 0.15. On peut retenir que ces pulses d'amplitude faible, contrairement aux excitations fortement non-linéaires décrites au §**IV**, sont *subsoniques*.

La principale difficulté expérimentale réside dans la construction d'un émetteur, qui doit envoyer un signal de forte amplitude avec une modulation importante; la première condition suppose qu'on soit à la résonance de l'empilement de céramiques, et la deuxième que l'amortissement de l'émetteur soit suffisant pour qu'un transitoire soit émis sans déformation. Ces propriétés sont en un certain sens contradictoires, et un bon compromis est difficile à atteindre. Nous n'avons pas réussi pour l'instant à observer expérimentalement les phénomènes aparaissant dans les simulations numériques.

Ceci étant, nos simulations sont un bon test de la méthode exposée au début de ce paragraphe. En effet (11) est obtenue à la suite d'un développement limité tronqué au premier terme non-linéaire [voir la remarque qui suit l'équation (7)], et il est encourageant de voir que la méthode donne de bons résultats pour des amplitudes réduites jusqu'à 0.35.

IV Approximation fortement anharmonique.

Le comportement du système dans la limite fortement anharmonique, soit lorsque $|u_n - u_{n-1}|/\delta_0 \gg 1$, a été étudié théoriquement et numériquement par Nesterenko [NES 83] et expérimentalement par Lazaridi & Nesterenko [LAZ 85]. Nous résumons ci-dessous brièvement les calculs développés dans la référence [NES 83].

Dans la limite continue, lorsque la taille caractéristique Λ des perturbations est supposée très supérieure au rayon d'une bille, on peut écrire $u_n(t) = u(x,t)$,

Figure N° **3:** *Pour toutes les courbes, l'amplitude indiquée est l'amplitude réduite* u_i/δ_0*. (a) Simulation numérique de la propagation d'un pulse non solution de (11). (b) Condition initiale: le pulse, centré sur le site 40, d'amplitude* 0.32*, est animé de la vitesse* c_g *dirigée vers la droite. Les conditions aux limites sont périodiques. (c) Forme du pulse à la fin de la simulation; on voit nettement les phonons émis par le pulse, son élargissement; son amplitude a un peu diminué pour atteindre* 0.30*, par émission de phonons, en l'absence de tout phénomène dissipatif.*

Figure N° **4:** *Pour toutes les courbes, l'amplitude indiquée est l'amplitude réduite* u_i/δ_0. *(a) Simulation numérique de la propagation d'un soliton noir, solution de (11). (b) Condition initiale: l'onde, centrée sur le site 40, d'amplitude crête à crête* 0.32, *est animé de la vitesse* c_g *dirigée vers la droite. Les conditions aux limites sont libres en fin de chaîne. (c) Forme du soliton à la fin de la simulation: on note l'absence d'émission de phonons, et le fait que le soliton ait conservé sa largeur et son amplitude, à la différence du pulse de la figure* N° *3.*

Figure N°**5:** *Vitesse de propagation, en unités arbitraires, en fonction de l'amplitude réduite de l'onde* u_i/δ_0*. La courbe en pointillés* $(- \cdot -)$ *correspond à la vitesse de groupe, qui dans les unités de la simulation vaut* $c_g \approx c_s = \sqrt{3/2} \simeq 1.22474$*; les cercles* ($\bigcirc$) *représentent les mesures pour une onde (12), solution de (11), telle que celle représentée à la firgure* N° *4; les croix* ($\times$) *donnent la vitesse d'un pulse ayant un profil identique à celui de la figure* N° *3, qui n'est pas solution de (11).*

et procéder au développement suivant:

$$\begin{aligned} u_{n\pm1}(t) &= u(x \pm 2a, t) \\ &= u \pm 2au_x + 2a^2 u_{xx} \pm \frac{4a^3}{3} u_{xxx} + \frac{2a^4}{3} u_{xxxx} + \ldots ; \end{aligned} \tag{13}$$

où pour alléger les expressions on note $u_x \equiv (\partial u/\partial x)$, et de même pour les dérivées d'ordre supérieur. En injectant ce développement dans (2), et en se plaçant en outre dans la limite fortement anharmonique, on aboutit à l'équation

$$\begin{aligned} \frac{u_{tt}}{C^2} = \frac{3}{2}(-u_x)^{\frac{1}{2}} u_{xx} + \frac{a^2}{2}(-u_x)^{\frac{1}{2}} u_{xxxx} - \frac{a^2 u_{xx} u_{xxx}}{2(-u_x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^2}{16} \frac{(u_{xx})^3}{(-u_x)^{\frac{3}{2}}}, \\ -u_x > 0 \qquad , \qquad C^2 \equiv \frac{2a^3}{m\theta} \end{aligned} \tag{14}$$

Désormais, u représente le déplacement *total* du centre de la bille par rapport à la position qu'il occuperait si la chaîne n'était soumise à aucune force statique. Les trois derniers termes de (14) sont d'ordre $(a/\Lambda)^2$ par rapport au premier, et les termes d'ordre supérieur ont été omis. Il est facile de linéariser (14) en posant

$$u_x = -\frac{\delta_0}{2a} + \Delta u_x, \quad |\Delta u_x| \ll \frac{\delta_0}{2a}, \tag{15}$$

et on peut vérifier que Δu_x obéit alors à l'équation

$$(\Delta u_x)_{tt} = c_s^2 (\Delta u_x)_{xx} \tag{16}$$

qui est bien l'équation des ondes linéaires de grande longueur d'onde dans la chaîne. On cherche des solutions ondes progressives de vitesse V, qui sont donc de la forme $u(\xi \equiv x - Vt)$; en posant $\psi = -u_x$, on dérive de (14) l'équation suivante

$$\frac{V^2}{C^2}\psi_\xi = \frac{3}{2}\psi^{1/2}\psi_\xi + \frac{a^2}{2}\frac{(\psi\psi_{\xi\xi})_\xi}{\psi^{1/2}} - \frac{a^2}{16}\frac{\psi_\xi^3}{\psi^{3/2}}; \tag{17}$$

en effectuant le changement de variable $\psi = z^{4/5}$, le dernier terme du membre de droite s'élimine, et l'équation se met sous la forme

$$\frac{V^2}{C^2} \underbrace{\frac{z_\xi}{z^{\frac{1}{5}}}}_{(\frac{5}{4})(z^{\frac{4}{5}})_\xi} = \frac{3}{2} \underbrace{z^{\frac{1}{5}} z_\xi}_{(\frac{5}{6})(z^{\frac{6}{5}})_\xi} + \frac{a^2}{2} \underbrace{\left(\frac{1}{5}\frac{z_\xi z_{\xi\xi}}{z^{\frac{4}{5}}} + z^{\frac{1}{5}} z_{\xi\xi\xi}\right)}_{(z^{\frac{1}{5}} z_{\xi\xi})_\xi} \tag{18}$$

Chaque terme peut ainsi s'intégrer une fois, et en variables adimensionnées le résultat final se lit

$$\begin{gathered} z = \left(\frac{V}{C}\right)^5 y \quad , \quad \xi = \sqrt{\frac{2}{5}}\, a\, \eta \quad , \\ y_{\eta\eta} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}W(y), \qquad \text{avec} \qquad W(y) = -\frac{5}{8}y^{8/5} + \frac{1}{2}y^2 + Dy^{4/5}, \end{gathered} \tag{19}$$

où D est une constante d'intégration.

Une analogie mécanique[3] du problème de propagation d'onde apparait alors manifestement, qui permet de comprendre qualitativement l'apparition de solutions solitons. (19) est en effet l'équation du mouvement d'une particule ponctuelle de masse unité, de "position" y, soumise à une force dérivant du "potentiel" $W(y)$,

---

[3] Ce type d'analogie est extrêmement fécond et donne lieu à une méthode d'analyse des EDP non-linéaires, la *méthode de l'espace de phase*. Pour plus de détails on pourra consulter la référence [INF 90].

η jouant le rôle du "temps". Pour $0 < D < 5/27$, $W(y)$ présente deux extrema, le maximum étant à la position $y_1 > 0$ et le minimum à la position $y_2 > y_1$; le graphe de $W(y)$ est représenté sur la figure N^o6(a) ci-dessous pour $D = 0.135$. La forme de l'énergie potentielle $W(y)$ au voisinage de y_1 fait que, dans le cadre de l'analogie mécanique, la particule met un "temps" infini pour tomber du point y_1 si son énergie totale est $W(y_1)$. La trajectoire partant et aboutissant en y_1 est parcourue une seule fois lorsque le "temps" décrit un intervalle complet $-\infty < \eta < \infty$, ce qui correspond dans le contexte des ondes à une solution de type soliton (voir la figure N^o6 ci-dessous).

D'après cette analyse,

$$\lim_{\eta\to\pm\infty} y = y_1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\eta\to\pm\infty} \psi = \lim_{\eta\to\pm\infty} (-u_x) = \frac{\delta_0}{2a} \tag{20}$$

Les variables ψ, z et y sont liées par $\psi(\xi) = z(\xi)^{4/5} = (V/C)^4 y(\eta)^{4/5}$; en appliquant cette relation au cas $\eta \to \pm\infty$, on trouve

$$V = C\left(\frac{\delta_0}{2a}\right)^{1/4} y_1^{-1/5}, \qquad c_s = C\left(\frac{\delta_0}{2a}\right)^{1/4}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}, \tag{21}$$

où on a aussi réexprimé la vitesse du son c_s définie par (6). y_1 et y_2 sont solutions de l'équation $\mathrm{d}W(y)/\mathrm{d}y = 0$; il est facile de voir en posant $X = y^{2/5}$ que l'on est ramené à une équation du troisième degré en X: on a donc facilement une expression analytique de y_1 en fonction de D. L'amplitude du soliton est donnée par la valeur $y_{\max}$ telle que $W(y_{\max}) = W(y_1)$; en faisant le même changement de variable que pour trouver y_1, on voit qu'il s'agit d'une équation de cinquième degré en X. Mais comme on en connait une solution ($y = y_1$), on se ramène à une équation du quatrième degré et $y_{\max}$ est donc connu analytiquement. L'évolution de y_1 et $y_{\max}$ en fonction de D est illustrée par la figure N^o7. Lorsque $D = 0$ on a $y_1 = 0$ et $y_{\max} = (5/4)^{(5/2)}$; pour $D = 5/27$ on a $y_1 = y_{\max} = (2/3)^{(5/2)}$. On constate que y_1 diminue lorsque $y_{\max}$ augmente; en reportant ce résultat dans (21), on en déduit que *les solitons sont d'autant plus rapides que leur amplitude est plus grande*. Par ailleurs, lorsque D croît de 0 à $5/27$, y_1 croît de 0 à $(2/3)^{5/2}$: on a donc toujours $V > c_s$, et les solitons sont *supersoniques*.

De tels solitons ont été observés expérimentalement par Lazaridi & Nesterenko [LAZ 85]. Notre montage, contrairement au leur, permet de placer plusieurs capteurs de force, et nous avons entrepris une étude expérimentale détaillée de ces excitations, dont nous donnons plus bas quelques résultats préliminaires.

Nous avons construit un émetteur à impact qui permet d'obtenir des ondes de grande amplitude. La méthode consiste à utiliser le fait que le temps d'impact entre deux solides élastiques est très court, de l'ordre de 40 μs, ce qui permet des

Figure N°**6:** *Illustration de la méthode de l'espace de phase dans le cas* $0 < D < 5/27$. *Les figures sont décrites de gauche à droite et de haut en bas.*
- Deux mouvements possibles de la particule dans l'analogie mécanique. Si son "énergie" est celle du maximum local, $E_1 = W(y_1)$, *la particule va de* y_1 *à* $y_{\max}$ *tel que* $W(y_{\max}) = W(y_1)$ *en un "temps" infini; cette "trajectoire" correspond à une solution soliton de (19). Si son "énergie" est* $E_2 < E_1$, *la particule va de* yp_1 *à* $yp_{\max}$ *en un "temps" fini; cette "trajectoire" correspond à une solution de type onde périodique non-linéaire de (19).*
- Représentation de ces "trajectoires" dans le plan de phase "vitesse"/"position" y_η/y*; les trajectoires qui tournent en un "temps" fini autour de la position d'équilibre stable* y_2 *correspondent aux ondes périodiques non-linéaires, alors que la séparatrice, qui présente un point anguleux en* y_1, *correspond au soliton.*
- Allure du soliton, obtenue par intégration numérique de (19) pour $D = 0.135$, *soit* $y_1 = 0.128$, $y_{\max} = 1.007$ *et* $E_1 = 0.011$.
- Allure d'une onde périodique non-linéaire, obtenue par intégration numérique de (19) pour $D = 0.135$, *avec* $E_2 = 0.005$, *soit* $yp_1 = 0.311$ *et* $yp_{\max} = 0.947$.

transferts de quantité de mouvement importants. Une bille en acier au carbure de tungstène, de même rayon que les autres et de masse $M = 4\ g$, se déplace dans un cylindre creux entre la chaîne de billes et un piston animé d'un mouvement sinusoïdal par un vibreur électromagnétique; un schéma de ce montage est fourni

Figure N°**7:** *Evolution de* y_1 *(courbe en trait pointillé) et* $y_{\max}$ *(courbe en trait plein) en fonction de D.*

par la figure $N^\circ 8$. Lorsque la distance à parcourir est assez faible, et la fréquence d'oscillation du vibreur pas trop grande (pour l'instant la course de la bille mobile est de l'ordre de $5\,mm$ et la fréquence peut varier entre 40 et 160 Hz), il y a accrochage et la bille mobile oscille indéfiniment, venant frapper la chaîne de billes à chaque période. L'ordre de grandeur de la force maximale $F_{\max}$ qui peut s'exercer lors d'un choc peut s'obtenir, toujours dans l'approximation quasi-statique, à partir de la solution de Hertz (voir par ex. [LAN 86])

$$F_{\max} = \left(\frac{5}{4}\,\frac{mm'}{m+m'}\right)^{\frac{3}{5}} \left[\frac{3}{4}\left(\frac{1-\nu^2}{E}+\frac{1-\nu'^2}{E'}\right)\right]^{-\frac{2}{5}} R^{\frac{1}{5}} v^{\frac{6}{5}} \quad , \qquad (22)$$

où les propriétés physiques de la bille impactante sont affectées d'un "prime", et où v est sa vitesse d'impact. Dans nos expériences, décrites plus bas, la course de la bille mobile est de $5\,mm$ et et la fréquence d'accrochage de l'émetteur à impacts est $100\,Hz$, ce qui donne comme vitesse $1\,ms^{-1}$ et donc une force ≈ 450 N. Comme nous l'avons déjà signalé au §**I**, cette vitesse est suffisante pour que lors du choc il y ait une part de déformation plastique des deux billes. Néanmoins on sait qu'en pratique la solution de Hertz reste utilisable jusqu'à des vitesses d'impacts de l'ordre de huit fois la vitesse de début d'indentation plastique [LIF 64], soit tant que le volume déformé plastiquement reste petit devant le volume déformé élastiquement lors de l'impact. Typiquement, pour des billes d'acier, la déformation plastique commence juste pour $v \approx 0.16\,ms^{-1}$, et reste négligeable tant que $v \leq 1.3\,ms^{-1}$ [JOH 92].

Figure N°**8:** *Schéma de l'émetteur à impact. Voir la description de son fonctionnement dans le corps du texte.*

Nous présentons ci-dessous (voir les figures $N^\circ 9$ & 10) de premiers résultats concernant l'observation de ces solitons. Les pulses se propagent en gardant constante leur amplitude et leur largeur. Leur durée est de $40\,\mu s$ environ, ce qui correspond à une largeur spatiale de $40\,mm$ (nous verrons que leur vitesse est de l'ordre de $1000\,ms^{-1}$) soit 5 billes: on reste dans le cadre de l'approximation continue, et la taille de l'excitation est bien inférieure à celle de la chaîne (50 billes). On peut donc légitimement parler d'*ondes solitaires*, puisque ces excitations se propagent sans déformation sur une longue distance. Cependant, il semble que le pulse correspondant à la réflexion du signal en fin de chaîne ait une amplitude légèrement supérieure à celle du signal direct. Cet effet peut être un pur artefact, ou la trace de collisions inélastiques entre ce pulse et ceux, moins rapides car plus petit, qui le suivent. Une étude plus poussée reste donc nécessaire pour décider du caractère solitonique[4] de ces ondes solitaires.

L'étude de la vitesse de propagation de ces ondes solitaires montre un bon accord avec l'analyse théorique. Les résultats reportés dans le tableau ci-dessous proviennent de la mesure du temps de vol d'un pulse entre les deux capteurs, et correspondent aux signaux montrés par les figures $N^\circ 9$ & 10; la distance entre les deux capteurs est connue très précisement, et les temps de vol sont mesurés à

4 En toute rigueur, des *solitons* sont des excitations non-linéaires dont les collisions sont *élastiques*; deux solitons se "traversent" en gardant leurs formes respectives avant intéraction, à l'exception éventuelle d'un changement de phase relative. Le fait que nous observions des pulses réfléchis plus intenses que le signal direct pourrait indiquer qu'il n'en est pas ainsi dans notre cas.

Figure N° **9:** *Excitations non-linéaires dans une chaîne soumise à une force statique* $F_0 < 2\,kgf$. *La courbe du haut représente le signal issu du premier capteur, qui mesure la force exercée par la bille* N° *6, celle du bas le signal d'un deuxième capteur, placé au niveau de la bille* N° *26; les deux capteurs sont sensiblement identiques, et les deux graphes sont à la même échelle. On observe la propagation d'un train de trois ondes solitaires (les trois derniers petits pics enregistrés par le premier capteur et visibles en haut sont "perdus" dans le signal reflechi vu par le deuxième capteur), qui gardent sensiblement leur forme, tant en amplitude qu'en largeur (le premier pic s'élargit toutefois). Le deuxième pic de forte amplitude qui apparait dans chaque signal correspond à la réflexion du premier en fin de chaîne. Dans le graphe du haut, les flèches indiquent la position des curseurs de temps de l'oscilloscope numérique, qui mesurent* $\Delta^{\mathrm{exp}}(1 \leftrightarrow 1)$*, le temps d'aller-retour du premier pic entre le premier capteur et l'extrémité de la chaîne; la valeur mesurée figure en bas à gauche.*

Figure N° **10:** *Excitations non-linéaires dans une chaîne soumise à une force statique* $F_0 = 11.1\, kgf$. *A ce changement près, la configuration expérimentale est identique, et les deux courbes ont même signification que dans la figure précédente. A nouveau, les deux derniers petits pics visibles en haut sont "perdus"; les trois premiers pics, par contre, conservent nettement leur forme; il semble qu'ils soient d'autant plus fins que leur amplitude est plus grande. Les pics correspondant à la réflexion du signal en bout de chaîne sont présents comme précédemment, et sont discutés dans le corps du texte. Les flèches indiquent la position des curseurs, qui mesurent le temps de vol du premier pic entre les deux capteurs, dont la valeur est indiquée en bas à gauche.*

$\pm 3\,\mu s$, ce qui donne les erreurs indiquées.

$F_0\ (kgf)$	11.1	< 2
$c_1\ (ms^{-1})$	1107 ± 23	1090 ± 22
$c_2\ (ms^{-1})$	1063 ± 21	824 ± 13
$c_3\ (ms^{-1})$	985 ± 18	678 ± 9
$c_s\ (ms^{-1})$	886	< 670

où c_i est la vitesse de propagation du *i-ème* pulse arrivant sur le capteur. On notera que ces vitesses sont toujours supérieures à la vitesse du son c_s: ces excitations sont bien *supersoniques*. Nous mesurons la force exercée sur chaque capteur, et pas directement la quantité u_x; néanmoins il est évident que ces quantités évoluent dans le même sens, et que les pulses qui exercent la force la plus grande sont ceux pour lesquels $(u_x)_{\max}$, et donc $y_{\max}$ qui lui est relié par un changement de variable monotone [cf. (19)], est le plus élevé. Comme y_1 et $y_{\max}$ évoluent en sens contraire (voir figure $N^\circ 7$), l'excitation d'amplitude la plus élevée corresponds à la valeur la plus faible de y_1, et donc à la vitesse la plus grande d'après l'équation (21). Nos observations sont tout à fait en accord avec cette analyse; les pulses arrivent sur le premier capteur par ordre d'amplitude décroissante (voir les figures $N^\circ 9$ & 10), et leurs vitesses de propagation décroissent comme leur amplitude, pour une force statique appliquée F_0 donnée. Les signaux réfléchis, qui ont fait un aller-retour entre le capteur et l'extrémité de la chaîne de bille, peuvent être identifiés sans ambiguïté. L'impédance terminale de la chaîne, donc le coefficient de réflexion, sont mal connus; on peut toutefois estimer la distance parcourue par l'excitation durant un aller retour en supposant une réflexion totale en bout de chaîne, sur la bille $N^\circ 50$; cette estimation constitue à strictement parler une valeur minimale. Dans le tableau ci-dessous, nous comparons les temps d'aller-retour $\Delta^{\rm exp}(i \leftrightarrow i)$ observés pour le capteur i et le pic de plus grande amplitude, aux temps calculés $\Delta^{\rm calc}(i \leftrightarrow i)$ en utilisant la valeur de la vitesse calculée précédemment. On notera que les temps calculés sont systématiquement trop courts, comme prévu; néanmoins, compte tenu des incertitudes expérimentales, l'accord est tout à fait satisfaisant.

$F_0\ (kgf)$	11.1	< 2
$\Delta^{\rm exp}(1 \leftrightarrow 1)\ (\mu s)$	$662,5$	664
$\Delta^{\rm calc}(1 \leftrightarrow 1)\ (\mu s)$	641	660
$\Delta^{\rm exp}(2 \leftrightarrow 2)\ (\mu s)$	$386,5$	371
$\Delta^{\rm calc}(2 \leftrightarrow 2)\ (\mu s)$	352	367

Les résultats de cette étude peuvent donc être résumés de la façon suivante:
– Nous avons mis en évidence, en régime fortement non-linéaire, la propagation *d'ondes solitaires* conservant leur forme sur une distance de propagation grande devant leur taille.
– Ces ondes sont *supersoniques*, ce qui les différencie des excitations linéaires (les phonons), qui se propagent à la vitesse du son, et faiblement anharmoniques (cf. §**III**), qui sont subsoniques.
– Une étude précise des collisions entre ces excitations reste à faire pour déterminer si elles sont élastiques, mettant en jeu des *solitons*, ou inélastiques. Il semble pour l'instant que nous ayons plutôt affaire à des excitations qui ne conservent pas leur forme lors d'une collision.

Bibliographie

[FLY 95] FLYTZANIS N., PNEVMATIKOS St., REMOISSENET M., " Kink, breather and asymmetric envelope or dark solitons in nonlinear chains:I. Monoatomic chain ", J. Phys. C, vol. 18, pp. 4603–4629, 1985.

[GOD 90] GODDARD J. D., " Nonlinear elasticity and pressure–dependent wave speeds in granular media ", Proc. R. Soc. Lond. A., vol. 430, pp. 105–131, 1990.

[INF 90] INFELD E., ROWLANDS G., *Nonlinear waves, solitons and chaos*, Cambridge University Press, 1990.

[JOH 92] JOHNSON K. L., *Contact mechanics*, Cambridge University Press, 1992.

[KIV 93] KIVSHAR Y. S., " Dark solitons in nonlinear optics ", IEEE J. Quantum El., vol. 29 n°1, pp. 250–264, 1993.

[LAN 86] LANDAU L., LIFSHITZ E., *Theory of elasticity*, Pergamon Press, 1986.

[LAZ 85] LAZARIDI A. N., NESTERENKO V. F., " Observation of a new type of solitary waves in a one–dimensional granular medium ", J. Appl. Mech. and Tech. Phys., vol. 26 n°3, pp. 405–408, 1985.

[LIF 64] LIFSHITZ J. M., KOLSKY H., " Some experiments on anelastic rebound ", J. Mech. Phys. Solids, vol. 12, pp. 35–43, 1964.

[NAY 73] NAYFEH A. H., *Perturbation methods*, Wiley, 1973.

[NES 83] NESTERENKO V. F., " Propagation of nonlinear compression pulses in granular media ", J. Appl. Mech. and Tech. Phys., vol. 24, n°4, pp. 567–575, 1983.