

Observation expérimentale en bassin à vagues des interactions résonantes à quatre ondes

F. BONNEFOY¹, F. HAUDIN², G. MICHEL³, B. SEMIN³, T. HUMBERT⁴, S. AUMAITRE⁴, M. BERHANU², E. FALCON²

¹ Ecole Centrale de Nantes, LHEEA, UMR 6598 CNRS, Nantes – e-mail: felicien.bonnefoy@ec-nantes.fr

² Université Paris Diderot, MSC, UMR 7057 CNRS, Paris

³ Ecole Normale Supérieure, LPS, UMR 8550 CNRS, Paris

⁴ Univ. Paris-Saclay, CEA-Saclay, SPEC, DRF, UMR 3680 CNRS, Gif-sur-Yvette

RÉSUMÉ. – Nous étudions expérimentalement les interactions résonantes d’ondes de gravité dans un bassin de houle en profondeur infinie. Nous générons pour cela une houle bi-chromatique dont les directions des composantes forment un angle aigu et dont nous contrôlons indépendamment la cambrure et la fréquence. Ces deux ondes mères interagissent non-linéairement et donnent naissance à une onde fille dont les propriétés (taux de croissance et courbe de réponse résonante) sont pleinement caractérisées par nos essais. Tous nos résultats à faible cambrure sont en accord quantitatif avec la théorie des interactions résonantes à quatre vagues de Longuet-Higgins [1962]. Ces expériences étendent aux angles aigus les mesures faites jusqu’à présent dans la configuration de vagues perpendiculaires. Enfin, des essais à cambrure plus forte montrent l’apparition d’ondes supplémentaires qui proviennent d’interactions non-résonantes et qu’on étudie quantitativement à l’aide de l’équation de Zakharov [1968].

Mots-clés : vagues océaniques, houle, spectre de vagues, interactions non-linéaires, ondes de gravité

Experimental observation of four-wave resonant interactions in a wave basin

ABSTRACT. – We experimentally study resonant interactions of oblique surface gravity waves in a large basin. Our results strongly extend previous experimental results performed mainly for perpendicular or collinear wave trains. We generate two oblique waves crossing at an acute angle, while we control their frequency ratio, steepness and directions. These mother waves mutually interact and give birth to a daughter wave whose properties (growth rate, resonant response curve and phase locking) are fully characterized. All our experimental results at low steepness are found in good quantitative agreement with four-wave interaction theory [Longuet-Higgins, 1962] with no fitting parameter. Off-resonance experiments are also reported and the relevant theoretical analysis is conducted and validated. Waves with stronger steepness produce new daughter waves that are explained by means of Zakharov [1968] theory.

Key-words: ocean waves, swell, wave spectrum, nonlinear interactions, gravity surface waves,

I. INTRODUCTION

Les interactions vague-vague non-linéaires sont au cœur des échanges d’énergie prenant place lors de la propagation des vagues océaniques. Elles contribuent à l’évolution du spectre d’énergie de l’état de mer, au même titre que l’action du vent, la dissipation par moutonnement, le déferlement bathymétrique... Dans les modèles spectraux d’états de mer, ces différents processus physiques sont modélisés par des termes sources d’énergie (apports dus au vent) ou puits d’énergie (processus dissipatifs, tels que le moutonnement par exemple), ou encore des termes de transfert qui redistribuent l’énergie avec un bilan nul, comme c’est le cas des interactions vague-vague [voir par exemple Cavaleri *et al.*, 2007]. En grande profondeur d’eau, les effets du troisième ordre (ou interactions à quatre vagues) induisent en effet des transferts d’énergie, faibles, entre les composantes du spectre, ce qui produit toutefois des modifications majeures du spectre en raison des grandes distances et durées de propagation. Les interactions non-linéaires font intervenir le concept de résonance pour laquelle les taux de transfert sont

maximaux [Phillips, 1960 ; Longuet-Higgins, 1962 ; Hammack et Henderson, 1993] ; les conditions de résonance pour les interactions à 4 vagues s’écrivent $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$ et $k_1 + k_2 = k_3 + k_4$ où on note ω_i la pulsation des ondes et k_i leur vecteur d’onde. On utilisera la notation (1,2,3,4) pour désigner le quartet d’ondes correspondant. L’évolution spatio-temporelle des 4 ondes d’un quartet donné dépend notamment du nombre d’ondes initialement présentes. Pour 2 ondes initialement présentes, l’instabilité de Benjamin-Feir se produit si lesdites ondes sont du même côté des conditions de résonance, avec alors l’apparition d’ondes satellites ayant une évolution exponentielle de leur amplitude aux temps courts et la possibilité d’une cascade d’énergie entre l’onde fondamentale et des niveaux successifs de satellites latéraux [Kartashova et Shugan 2011]. Pour 4 ondes initialement présentes, il peut exister des ondes de forme permanente pour lesquelles les transferts d’énergie sont équilibrés et les amplitudes des 4 ondes restent constantes. De telles ondes ont été étudiées expérimentalement [Kimmoun *et al.*, 1999 ; Liu *et al.*, 2015]. Enfin, pour 3 ondes initialement présentes, Longuet-Higgins [1962] prédit

l'apparition d'une quatrième onde, dont l'amplitude croît linéairement, lorsque le quartet ainsi formé est résonant. Par l'étude de directions différentes et à des distances plus grandes, par l'observation de cascade d'énergie, le présent papier vient compléter le nombre relativement faible d'études expérimentales dédiées à cette configuration [Longuet-Higgins et Smith, 1966 ; McGoldrick *et al.*, 1966 ; Tomita, 1989 ; Bonnefoy *et al.*, 2016]. Nous étudions plus particulièrement ici le cas courant d'une résonance dite « dégénérée » où les ondes 1 et 2 sont identiques. Si on se place en milieu océanique considéré infini et si les deux ondes 1 et 3 sont initialement présentes seules (ondes dites « mères ») alors l'onde 4 dite onde « fille », de vecteur d'onde $k_4 = 2k_1 - k_3$, apparaît naturellement et comme sa pulsation vérifie $\omega_4 = 2\omega_1 - \omega_3$ (le quartet (1,1,3,4) est résonant) l'amplitude a_4 de l'onde fille croît linéairement au cours du temps (sur des temps courts), comme l'a montré Longuet-Higgins [1962]. Dans ce cas dégénéré, pour une onde 1 donnée, le lieu dans le plan (k_x, k_y) des vecteurs d'onde k_3 qui forment avec k_1 et $k_4 = 2k_1 - k_3$ un quartet d'ondes résonant, est montré sur la figure 1 à gauche en trait plein noir : il s'agit de la célèbre « figure de huit » de Phillips [1960].

Pour des ondes générées en bassin cette fois, l'amplitude a_4 de l'onde fille croît linéairement en fonction de la distance d au batteur, suivant une loi théorique [Longuet-Higgins, 1962]

$$a_4^{res} = \varepsilon_1^2 \varepsilon_3 d G(\theta), \quad (1)$$

où $\varepsilon_i \equiv k_i a_i$ est la cambrure de l'onde i , θ l'angle entre les 2 ondes mères résonantes et G le taux de croissance qui dépend de la position sur la figure de huit de Phillips, autrement dit de l'angle θ . Le rapport des fréquences $r = f_3 / f_1$ est déterminé aussi par l'angle θ . Le taux G est montré sur la figure 1, à droite où les angles θ positifs et négatifs correspondent respectivement aux lobes gauche et droite de la figure de huit de Phillips ; on remarque un maximum autour de $\theta = \theta_m = 25^\circ$ ($r = r_m = 1.258$). Dans les années 1960, des expériences historiques [Longuet-Higgins et Smith, 1966 ; McGoldrick *et al.*, 1966] ont validé cette théorie en bassin pour le cas particulier $\theta = 90^\circ$ avec la vérification du taux correspondant $G(90^\circ) = 0.42$.

Ce type d'essais a été repris aussi par Tomita [1989]. Chacune de ces expériences a été réalisée dans un bassin

rectangulaire équipé de deux batteurs installés sur des côtés adjacents, chaque batteur générant une onde mère. Ces dernières se propagent donc perpendiculairement et l'onde fille apparaît avec un angle de 9° environ par rapport à la direction de l'onde mère la plus courte.

Les expériences que nous présentons dans ce papier sont destinées dans un premier temps à étendre la validation de la théorie des interactions résonantes de Longuet-Higgins [1962] pour des directions de propagation différentes du seul cas perpendiculaire étudié jusqu'à ce jour. On en présente ici les principaux résultats qui valident la théorie à faible cambrure [Bonnefoy *et al.*, 2016]. Dans un second temps, des essais à grande distance ou grande cambrure montrent les limites de ladite théorie et l'utilisation de la théorie de Zakharov [1968] apporte le cadre théorique nécessaire à la compréhension des interactions observées avec notamment des cascades d'énergie.

II. EXPÉRIENCES EN BASSIN

Nous générons des ondes bi-chromatiques (ondes mères 1 et 3) dans le bassin à houle de l'Ecole Centrale de Nantes (ECN) de dimensions en plan 50 m par 30 m, pour une profondeur d'eau constante de 5 m (l'ensemble des houles observées sont en condition de profondeur infinie) ; nous observons l'apparition de l'onde fille de pulsation $2\omega_1 - \omega_3$ en raison de l'interaction résonante dégénérée. L'angle θ entre les ondes mères varie entre -10° et $+40^\circ$ de manière à étendre les résultats expérimentaux précédents, obtenus pour $\theta = 90^\circ$ uniquement. Dans la gamme d'angle visée, on peut générer les houles bi-chromatiques dans le bassin de l'ECN grâce au batteur segmenté et de plus, le taux de croissance théorique est élevé dans cette gamme, ce qui conduit à des amplitudes de l'onde fille mesurables à distance suffisante (5 à 20 m du batteur).

Un réseau linéaire constitué de 10 sondes à houle résistives régulièrement espacées est placé dans le bassin, couvrant une longueur totale de 25 m. La figure 2 montre à gauche le schéma du bassin avec les vecteurs d'onde des ondes mères générées lorsque $\theta = \theta_m = 25^\circ$, ainsi que la position des sondes résistives. Le repère est donné sur la figure pour l'orientation des vagues. Le réseau de sondes est aligné suivant la direction de l'onde fille lorsque $\theta = \theta_m$. Dans ce cas-là, les ondes mères sont générées avec des directions $\pm 12.5^\circ$ et le réseau doit être placé avec un angle de -23° dans le bassin, comme sur la figure 1 à gauche.

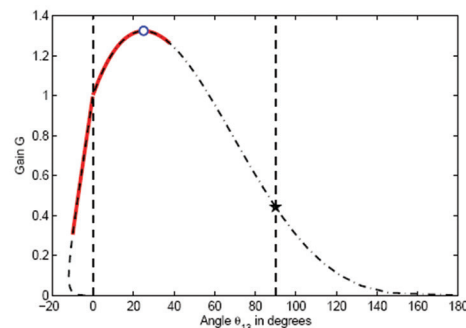
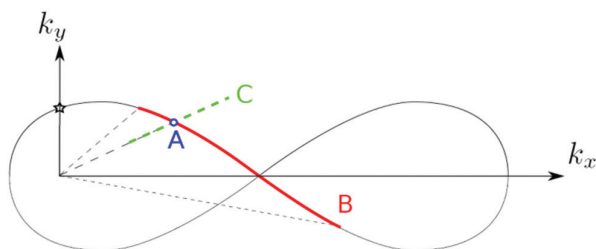


Figure 1 : A gauche : lieux des essais expérimentaux sur la figure de huit de Phillips [1960] : expériences historiques (étoile noire) et expériences présentées (jeu A : point bleu, jeu B : trait plein rouge, jeu C : trait interrompu vert). A droite : taux de croissance $G(\theta)$ (les angles θ positifs et négatifs correspondent respectivement aux lobes gauche et droite de la figure de huit de Phillips).

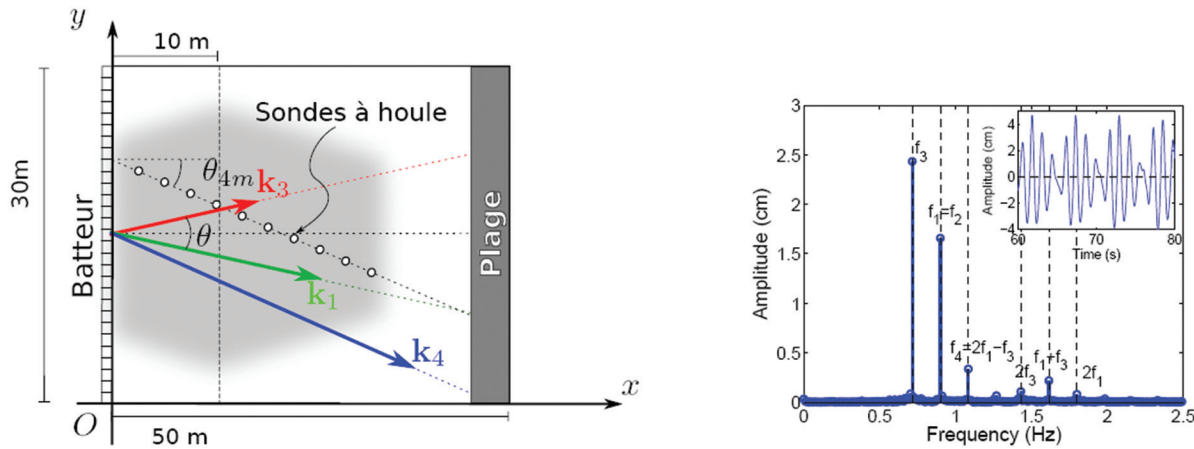


Figure 2 : A gauche : bassin de houle de l'ECN (zone grisée = zone homogène, cercles = sondes à houle et flèches = vecteurs d'onde, (onde 1 au milieu en vert, onde 3 en haut en rouge et onde 4 en bas en bleu)). A droite : Spectre fréquentiel de l'élévation mesurée à $d = 21.5$ m. Les traits verticaux correspondent aux fréquences : f_3 , f_1 , f_4 , $2f_3$, $f_1 + f_3$ et $2f_1$. Encart : évolution temporelle de l'élévation de surface libre $\eta(t)$. Conditions d'essai $r = r_m$, $\theta = \theta_m$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.05$.

Pour le batteur, on contrôle la fréquence des ondes mères, leur direction ainsi que leur amplitude a_i près du batteur, c'est-à-dire leur cambrure initiale $\varepsilon_i = k_i a_i$. Les fréquences sont choisies dans une gamme adaptée au bassin et permettant des distances de propagation importantes. La valeur $f_1 = 0.9$ Hz est retenue, celle de f_3 étant dépendante de l'angle θ . La direction des ondes mères est choisie de manière à ce que *primo* l'angle entre les deux ondes mères soit l'angle θ visé et *deuxio* que l'onde fille attendue se propage dans la direction du réseau de sondes (afin de bénéficier d'une distance d'interaction importante). Lors des essais pour un angle θ jusqu'à 40° entre les ondes mères, on trouve avec l'aide de la figure de huit de Phillips que celles-ci doivent avoir une direction jusqu'à 40° par rapport à l'axe principal (axe x) du bassin.

La génération de ces vagues bi-chromatiques obliques est assurée à l'aide du batteur segmenté multi-directionnel composé de 48 volets indépendants. Ces volets sont contrôlés avec la méthode de Dalrymple [1989] tirant avantage des réflexions sur les murs latéraux. Le recours à cette technique est indispensable pour générer des houles obliques avec des directions atteignant 40° sur une zone homogène étendue au centre du bassin. Sur la figure 2 à gauche, la zone grisée correspond à la zone homogène où l'amplitude des vagues est quasi-uniforme. En dehors de cette zone, les réflexions sur les murs créent des ondes partiellement stationnaires. On place les sondes à l'intérieur de cette zone.

Dans ce papier, on présente deux catégories d'essais dites pour l'instant à *faible cambrure* et à *forte cambrure*. Les essais de faible cambrure ($ka = 0.05$) sont divisés en 3 jeux d'essais A, B et C. Le jeu noté A correspond au taux théorique maximum de croissance $\theta = \theta_m$. Il s'agit du point A en bleu sur la figure de huit de Phillips qui est montrée sur la figure 1 à gauche. Le jeu B regroupe les essais dont les ondes mères en condition résonante sont générées pour des angles variables. Sur la figure 1, à gauche, un trait plein en rouge matérialise ces essais. Le jeu C enfin correspond à des ondes hors-résonance. On a choisi pour simplifier de conserver l'onde mère 1 ($f_1 = 0.9$ Hz et $\varepsilon_1 = 0.07$) et de varier l'onde mère 3 : la direction $\theta = \theta_m$ est fixe mais la fréquence de l'onde 3 varie entre 0.9 Hz et 1.6 Hz (trait interrompu vert sur la figure 1 à gauche).

A droite de la figure 2, on montre en encart un exemple d'élévation mesurée sur une des sondes du réseau employé, sur lequel on observe un signal à battement, typique d'une houle bi-chromatique. Le spectre d'amplitude correspondant, estimé par une transformée de Fourier discrète, est tracé également sur la figure 2 à droite. On observe des pics correspondant aux ondes mères de fréquence f_1 et f_3 , aux harmoniques du second ordre ($2f_1$, $f_1 + f_3$ et $2f_3$) et à l'onde fille de fréquence $f_4 = 2f_1 - f_3$.

Les essais à forte cambrure reprennent les mêmes conditions que les jeux A et C précédents. La cambrure des ondes mères varie cependant dans une gamme allant jusqu'à $ka = 0.14$.

III. RÉSULTATS

En terme d'analyse dimensionnelle, l'équation (1)_{1/3} montre que la cambrure moyenne définie par $\varepsilon = (\varepsilon_1^2 \varepsilon_3)^{1/3}$ est le paramètre de cambrure significatif de l'interaction résonante dégénérée considérée. Les autres paramètres adimensionnels sont définis comme le rapport des cambrures des ondes mères $\beta = \varepsilon_1 / \varepsilon_3$, la distance adimensionnelle $k_4 d$, la direction de chaque onde. On définit ici la distance non-linéaire $k_4 d \varepsilon^2$. D'après l'équation (1), on s'attend en effet à ce que l'amplitude de l'onde 4 évolue comme ε sur des distances non-linéaires caractéristiques de l'ordre de $k_4 d \varepsilon^2$.

III.1. A faible distance non-linéaire ($k_4 d \varepsilon^2 \ll 1$)

III.1.1. Au maximum du taux de croissance à la résonance

On considère dans un premier temps le jeu A d'essais au maximum du taux de croissance où les ondes bi-chromatiques vérifient $f_1 / f_3 = r_m = 1.258$ et $\theta = \theta_m = 25^\circ$. A gauche sur la figure 3, le relevé de l'amplitude de l'onde 4 le long du réseau de sondes montre que l'amplitude a_4 de l'onde fille croît approximativement linéairement avec la distance d depuis le batteur, quelle que soit la cambrure. Les variations de pente illustrent le fait que le taux de croissance dépend de la cambrure initiale de l'onde 1.

Plus en détail, on étudie comment le taux de croissance de l'onde fille varie en fonction de ε_1 et ε_3 . Sur la figure 3

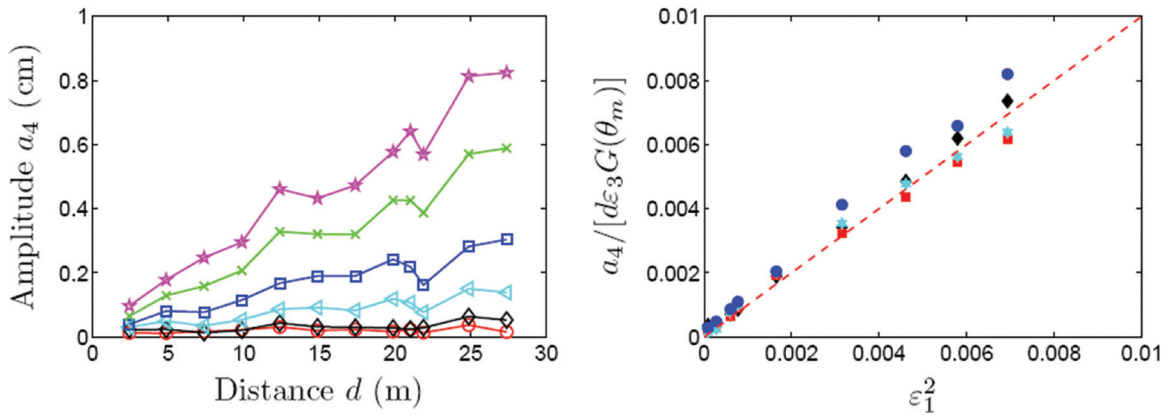


Figure 3 : Amplitude de l'onde résonante a_4 pour $\epsilon_3 = 0.05$ et $r = r_m$. A gauche : amplitude a_4 selon la distance d pour différentes $\epsilon_1 = 0.010, 0.017, 0.028, 0.041, 0.056$ et 0.068 (du bas vers le haut). A droite : amplitude normalisée $a_4 / [d\epsilon_3 G(\theta_m)]$ en fonction de ϵ_1^2 pour différentes distances $d = 9.9$ m (\blacklozenge), 14.9 m (\blacksquare), 19.9 m ($*$) et 24.9 m (\bullet). La ligne en tiret, de pente 1:1, est le résultat théorique de l'équation (1).

à droite, on vérifie que l'évolution de l'amplitude a_4 de l'onde fille est proportionnelle à la cambrure de l'onde mère 1 au carré, comme attendu d'après l'équation (1). L'étude de l'évolution de a_4 en fonction de la cambrure de l'onde mère 3 montre une dépendance linéaire en ϵ_3 , comme attendu (non montré ici). De même, les essais mettent également en évidence un verrouillage de phase de l'onde fille dont la phase ϕ_4 s'exprime à partir de celles des ondes mères $\phi_4 = -\pi/2 + 2\phi_1 - \phi_3$ (non montré ici).

III.1.2. Pour un écart de directions des ondes mères entre -10° et 40°

On étudie ici l'influence de l'angle θ entre les directions des ondes mères, avec la série B d'essais, et on estime le taux de croissance le long de la figure de huit (trait plein rouge sur la figure 1 à gauche). On montre sur la figure 4 l'amplitude de l'onde 4, qu'on normalise par le facteur $\epsilon_1^2 \epsilon_3 d$ d'après les observations précédentes, en fonction de l'angle θ entre les ondes mères. Les courbes en trait plein sont les prédictions théoriques de Longuet-Higgins [1962]. On observe que sur toute l'étendue d'angle θ testée, l'accord est très bon entre mesures et théorie.

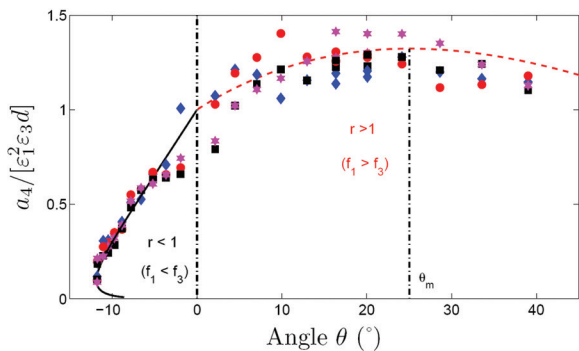


Figure 4 : Amplitude normalisée a_4 en fonction de l'angle θ pour différentes sondes : distance $d = 7.8$ m (\blacklozenge), 9.9 m (\bullet), 11.9 m (\blacksquare) et 13.8 m ($*$). Trait plein : courbe de résonance théorique $G(\theta)$ pour $r < 1$ (noir) et $r > 1$ (rouge) d'après Longuet-Higgins [1962]. $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 0.07$, $f_1 = 0.9$ Hz et 0.83 $r < 1.38$.

III.2. A grande distance non-linéaire ($k_4 d \epsilon^2 \approx 1$)

Les résultats précédents valident la théorie de Longuet-Higgins [1962], obtenue par une décomposition en série de perturbation au troisième ordre en cambrure. Les expériences présentées concernent des ondes mères de faible cambrure pour lesquelles, compte tenu des distances parcourues, les échanges d'énergie restent faibles et ne modifient pas de façon significative l'amplitude des ondes mères. Cela constitue justement une hypothèse faite par Longuet-Higgins [1962], à savoir que les ondes mères sont d'amplitude constante.

A grande distance ou à forte cambrure, les transferts d'énergie entre les ondes du quartet viennent cependant modifier les résultats précédents.

Les mêmes essais ont donc été réalisés avec des cambrures plus fortes (jusqu'à $ka = 0.14$ où les premiers déferlements apparaissent) de manière à étudier les modifications apportées. Pour simplifier, on présente ici uniquement les résultats tirés des essais avec des ondes mères de cambrures égales $\epsilon_1 = \epsilon_3$. On présente dans la suite les observations faites avec notamment un pompage de l'onde mère 1 qui voit son amplitude diminuer au fur et à mesure de sa propagation, une perte du verrouillage de phase du fait des vitesses de phase non-linéaires ainsi que l'apparition de composantes supplémentaires, en $3f_1 - 2f_3$ notamment, dues à des interactions à 4 vagues en quasi-résonance avec l'onde fille et l'une des ondes mères.

La figure 5 montre quatre vues du bassin pour différentes cambrures ; ce sont des photos prises depuis le batteur lors de quatre essais en résonance dégénérée à cambrure $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 0.05, 0.1, 0.12$ et 0.14 (avec $f_1 = 0.9$ Hz, $r = r_m$ et $\theta = \theta_m$). En haut à gauche pour la cambrure faible, on peut observer uniquement les ondes mères superposées, l'amplitude de l'onde fille restant faible y compris à grande distance du batteur. Ensuite, lorsque la cambrure augmente, on voit apparaître des crêtes de plus en plus inclinées sur l'image : il s'agit en fait de paquets de vagues obliques se propageant avec une direction importante, de l'ordre de 45° visible sur la figure. Ces paquets sont constitués de vagues qui se propagent avec une direction moins grande (les crêtes sont peu visibles sur la figure). Ces paquets sont formés de la superposition de plusieurs ondes filles comme on le verra par la suite.

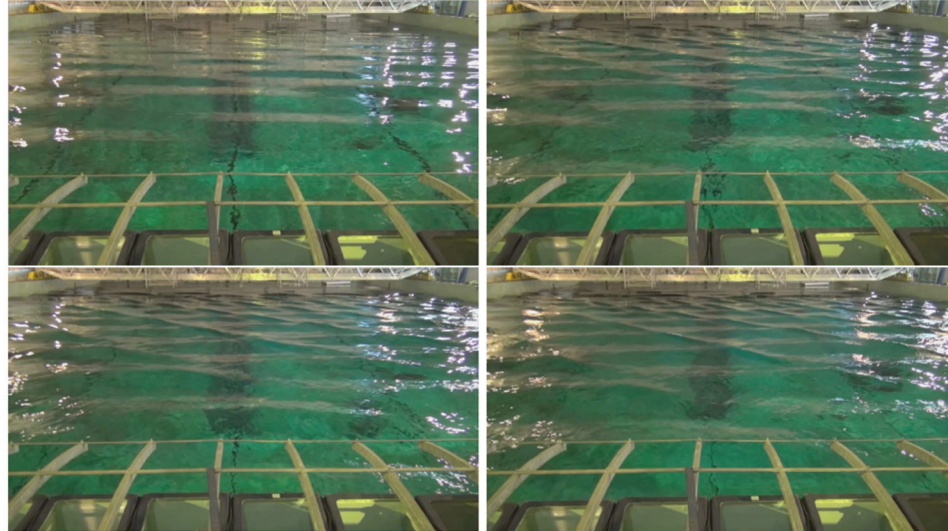


Figure 5 : Vue du bassin pour des ondes en interaction résonante dégénérée. D'en haut à gauche à en bas à droite, les cambrures sont $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.05, 0.1, 0.12$ et 0.14 (les autres paramètres sont les mêmes $f_1 = 0.9$ Hz, $r = r_m$ et $\theta = \theta_m$).

Dans un premier temps, nous étudions en détail l'effet de la cambrure sur l'onde mère 1 et sur l'onde fille 4.

III.2.1. Pompage de l'onde 1

L'étude théorique du problème permet de trouver une solution pour l'évolution de l'onde mère aux distances intermédiaires $k_4 d \varepsilon^2 < 1$ en tenant compte de l'évolution linéaire de l'amplitude de l'onde fille. En reportant l'évolution linéaire de a_4 dans l'équation de Zakharov pour l'onde mère 1 (voir système (5)), on obtient après calculs la relation quadratique suivante

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{10}} = 1 - \left(\frac{T_{1134}}{k_1^3} \right)^2 \left(\frac{k_1}{k_3} \right)^{\frac{5}{2}} \frac{k_1}{k_4} \left(\frac{\varepsilon_{30}}{\varepsilon_{10}} \right)^{\frac{2}{3}} (k_4 d \varepsilon^2)^2, \quad (2)$$

avec l'échelle de distance $D = \varepsilon^2 d$ où $\varepsilon = (\varepsilon_{10}^2 \varepsilon_{30})^{1/3}$ et avec la notation ε_{i0} pour les cambrures initiales proche du

batteur. Cela signifie que l'onde mère voit son énergie diminuer au cours de la propagation en raison du transfert vers l'onde fille ; on parle de pompage par l'onde fille. Il est à noter qu'on trouve de manière analogue que l'onde mère 3 voit, elle, son amplitude augmenter (non montré ici). La figure 6 montre à gauche l'évolution spatiale de la cambrure de l'onde 1, avec les échelles de normalisation tirées de l'équation (2). On a ajouté une ligne en pointillé noir pour l'hypothèse de Longuet-Higgins [1962], une ligne en pointillé rouge pour la formule approchée (2) et une ligne en trait plein noir pour la solution numérique de l'équation de Zakharov (voir Annexe). On constate que les courbes expérimentales de l'évolution spatiale de l'onde 4 suivent la loi approchée jusqu'à $k_4 d \varepsilon^2 = 0.6$; au-delà cette loi n'est plus suffisante pour décrire les observations.

La solution numérique de l'équation de Zakharov (ligne en trait plein noir sur la courbe) montre que l'amplitude de l'onde mère 1 passe par un minimum d'amplitude puis que

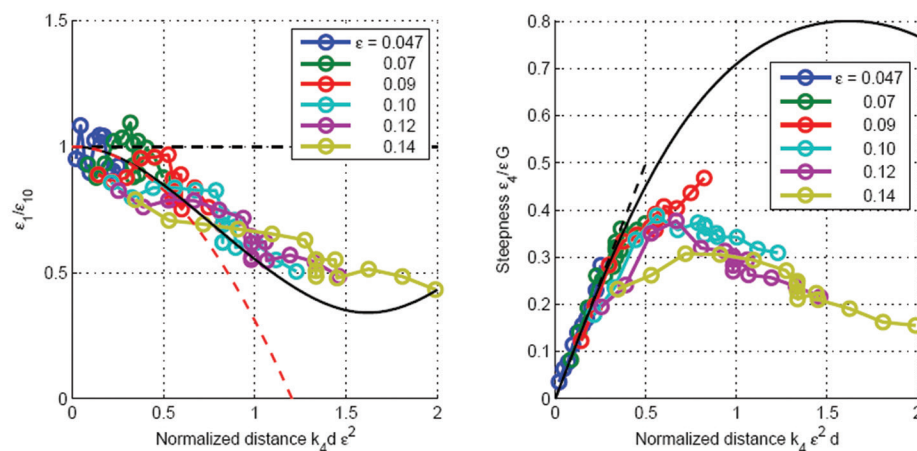


Figure 6 : Evolution des cambrures mesurées en condition de résonance avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$ (voir la légende). A gauche : cambrure mesurée de l'onde mère et prédictions théoriques (en tiret noir : théorie de Longuet-Higgins, en tiret rouge : modèle de Zakharov à distance intermédiaire, en trait plein noir : solution numérique de l'équation de Zakharov). A droite : cambrure mesurée de l'onde fille et prédictions théoriques (en tiret noir : théorie de Longuet-Higgins, en trait plein noir : solution numérique de l'équation de Zakharov).

le transfert s'inverse jusqu'à revenir à la situation de départ (récurrence). La taille finie du bassin utilisé ne permet pas, pour les longueurs d'onde choisies d'observer plus loin le comportement de l'onde mère 1. L'amplitude de l'onde mère 1 diminuant, on s'attend à ce que le taux de croissance de l'onde fille 4 diminue également jusqu'à un certain équilibre.

III.2.2. Arrêt de la croissance de l'onde fille

La figure 6 à droite montre l'amplitude de l'onde fille normalisée par l'échelle caractéristique $G\varepsilon$ en fonction de la distance non-linéaire $k_4 d \varepsilon^2$, avec $\varepsilon = (\varepsilon_{10}^2 \varepsilon_{30})^{1/3}$. On a ajouté en pointillé noir la prédiction théorique de Longuet-Higgins [1962] et en trait plein noir la solution numérique de l'équation de Zakharov (voir Annexe).

On observe que les mesures à faible cambrure $\varepsilon < 0.08$ se superposent et collent aux prédictions pour les distances non-linéaires adimensionnelles inférieures à 0.3. On note toutefois une diminution du taux de croissance à plus grande distance non-linéaire.

À droite sur la figure 6, sont reportés également des résultats à plus forte cambrure ($\varepsilon < 0.08$). On observe encore que les courbes suivent la première bissectrice jusqu'à la distance non-linéaire $k_4 d \varepsilon^2 = 0.3$: il s'agit du comportement faiblement non-linéaire décrit plus haut. Pour des distances non-linéaires plus grandes, les courbes se séparent. Le comportement à grande distance non-linéaire dépend donc de la cambrure des ondes mères. On voit aussi que l'écart à la solution numérique de l'équation de Zakharov (solution auto-similaire) est nettement marqué.

La théorie de Zakharov, qui prédit le pompage de l'onde 1, ne suffit pas à expliquer la diminution du taux de croissance. Il se produit donc un échange d'énergie non pris en compte dans les calculs qui sont basés sur l'hypothèse que seules les trois ondes 1, 3 et 4 sont présentes.

III.2.3. Résonances en cascade

Une analyse fréquentielle des essais à forte cambrure révèle l'apparition de nouvelles ondes aux fréquences $f_5 = 3f_1 - 2f_3$ et $f_6 = 4f_1 - 3f_3$. Par exemple la figure 7 montre à gauche l'amplitude de Fourier relevée sur

l'élévation mesurée à 21.5 m du batteur, pour un essai à la résonance au maximum du taux de croissance et pour des cambrures fortes égales $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.14$. On identifie un premier groupe de 5 pics principaux avec dans l'ordre des fréquences des ondes mères f_3, f_1 générées au batteur, puis de 3 ondes filles $f_4, f_5 = 2f_4 - f_1 = 1.27$ Hz et $f_6 = 2f_4 - f_3 = 1.45$ Hz : les ondes 5 et 6 sont d'amplitude supérieure à l'onde 4 pour cet essai et à cette distance. On peut noter que les ondes filles en cascade possèdent des fréquences du type $Nf_1 - (N-1)f_3$ avec par exemple $N = 3$ pour l'onde 5 et $N = 4$ pour l'onde 6. Un second groupe comprend les ondes liées du second ordre $2f_3 = 1.42$ Hz, $f_1 + f_3$, et $2f_1$. On peut noter que le pic à $f_1 + f_3$ indiqué par une flèche est en fait double : l'un des pics est effectivement $f_1 + f_3 = 1.61$ Hz et le second correspond à l'onde 7 de fréquence $f_7 = 5f_1 - 4f_3 = 1.64$ Hz (la fenêtre temporelle d'analyse dure 87 s et permet de résoudre ces 2 pics proches).

IV. DISCUSSION

L'existence des ondes 5 et 6 s'explique par des interactions à 4 vagues qui couplent les ondes du quartet avec des ondes hors du quartet. De nouveaux quartets dégénérés appelés quartets ultérieurs ou quartets de cascade apparaissent donc lors de la propagation. Ainsi, l'onde 5 apparaît comme l'onde fille du quartet ultérieur (1,4,3,5) et l'onde 6 du quartet ultérieur (4,4,3,6).

La figure 7 à droite montre en exemple les figures de huit intervenants pour l'onde 5. On trace la première figure de huit, noire et horizontale, pour le quartet résonant (1,1,3,4) de départ (vecteurs d'onde $2k_1$ (horizontal et noir), k_3 (bleu) et k_4 (rouge)). L'angle entre k_1 et k_3 est 25° , ce qui correspond au taux de croissance résonant maximum. Ensuite, on trace une seconde figure de huit pour le quartet de cascade (1,4,3,5) produisant l'onde 5 (en rouge, inclinée et décalée vers le haut pour plus de clarté). Il met en jeu les vecteurs d'onde k_1 (noir), k_4 (rouge), k_3 (bleu) et k_5 (vert). Comme ce quartet (1,4,3,5) n'est pas dégénéré, on peut voir que la figure de huit comporte deux parties disjointes. Dans

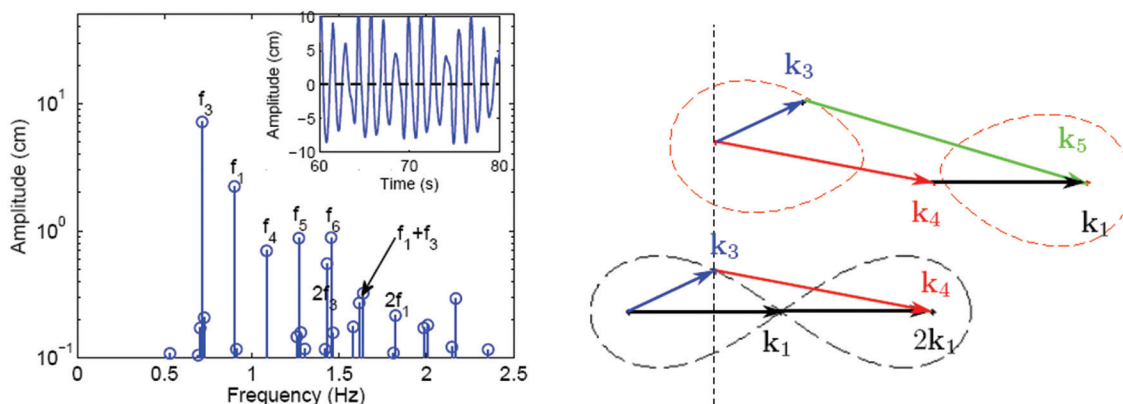


Figure 7 : A gauche : spectre fréquentiel de l'élévation $\eta(t)$, mesuré à $d = 21.5$ m. Les traits verticaux correspondent aux fréquences: $f_3, f_1, f_4, f_5 = 2f_4 - f_1, 2f_3, f_6 = 2f_4 - f_3, f_1 + f_3$ et $2f_1$. Encart : évolution temporelle de l'élévation $\eta(t)$. Conditions d'essai $r = r_m$, $\theta = \theta_m$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.14$. A droite : figures de huit pour décrire les interactions en cascade. En bas, figure de huit noire horizontale : quartet initial (1,1,3,4) (vecteurs d'onde noir, bleu et rouge) et en haut, figure de huit rouge inclinée : quartet (1,4,3,5) (vecteurs d'onde noir, rouge, bleu et vert).

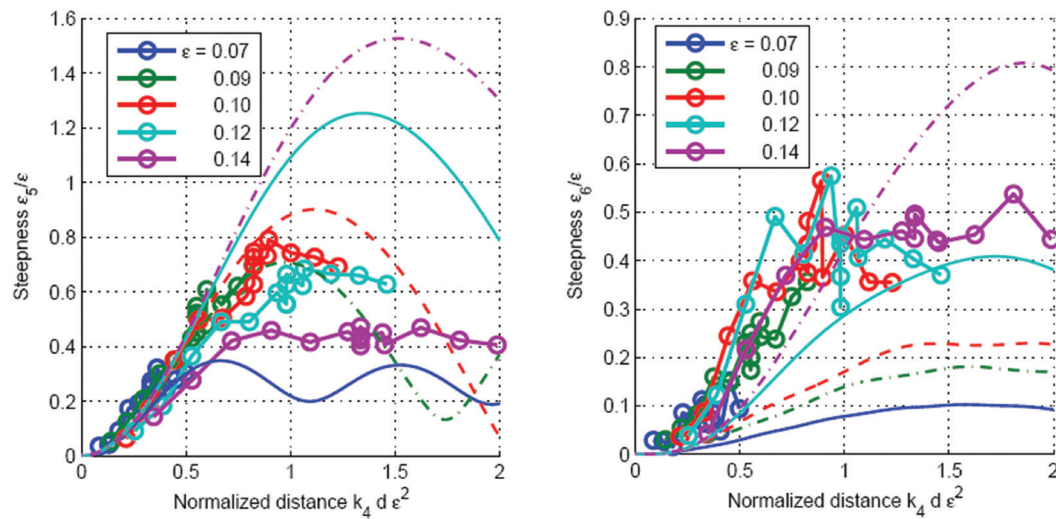


Figure 8 : Cambrure des ondes de cascade 5 et 6 pour des essais en condition de résonance avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$ (voir la légende). La cambrure est normalisée au moyen des cambrures mères initiales. Les lignes avec points sont les mesures, les lignes seules sont les résultats de simulation aux mêmes cambrures.

ce nouveau quartet, le vecteur d'onde k_3 tombe proche de la figure de huit (le quartet est quasi-résonant) dans une zone où le taux de croissance de l'onde fille concernée est élevé. On trouve que l'angle entre k_1 et k_5 est de -16° ; les ondes 4 et 5 ont des directions voisines. L'explication est similaire pour l'onde 6 pour former le quartet de cascade (4,4,3,6) : l'onde 6 forme un angle de -19° avec l'onde 1.

On montre sur la figure 8 la mesure des cambrures des ondes, 5 à gauche et 6 à droite, pour des essais à cambrures variables à la résonance du quartet (1,1,3,4) avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$. On observe expérimentalement (lignes avec des ronds) une croissance significative des ondes de cascade 5 et 6, en retard par rapport à l'onde 4, et avec un taux de croissance comparable à celui de l'onde fille 4. Cette croissance forte se produit jusqu'à $k_4 d \varepsilon^2 = 0.7$, puis les cambrures des ondes 5 et 6 saturent à des valeurs proches de 0.5ε .

Pour confirmer la capacité de la théorie de Zakharov à décrire quantitativement les interactions en cascade observées, on intègre numériquement l'équation de Zakharov (voir Annexe) et on trace les courbes sans point qui sont les cambrures prédites par l'équation de Zakharov utilisée en incluant les quartets (1,4,3,5) et (4,4,3,6). On observe que pour l'onde 5 (figure 8 à gauche), la cambrure mesurée lors des essais est bien reproduite lorsque $\varepsilon < 0.1$ en termes de retard relatif à l'onde 4 et de taux de croissance, et ce jusqu'à la distance non-linéaire $k_4 d \varepsilon^2 = 1$. Pour des cambrures initiales au-delà de $\varepsilon = 0.1$ le modèle s'écarte des mesures en surestimant le taux de croissance et en ne prédisant pas la saturation observée. Cette dernière est à relier au déferlement détecté lors des essais.

Pour l'onde 6 (figure 8 à droite), les solutions numériques sous-estiment largement les taux de croissance observés : il manque vraisemblablement des termes dans les équations utilisées.

V. CONCLUSIONS

Les expériences historiques des années 1960 et 1980 sur les interactions résonantes à 4 vagues ont été revisitées et étendues à l'aide d'essais en bassin à houle multi-directionnelle. Le batteur segmenté piloté en tirant avantage des

réflexions sur les murs latéraux permet d'accéder à des cas inaccessibles dans des bassins équipés de 2 batteurs plans perpendiculaires. Le taux de croissance théorique de l'onde fille donné par Longuet-Higgins [1962] est confirmé à faible distance non-linéaire $k_4 d \varepsilon^2 < 0.5$ pour des ondes mères se propageant avec un angle aigu compris entre -10 et 40° . A plus forte cambrure, cette théorie est dépassée et l'intégration numérique de l'équation de Zakharov permet de prédire l'évolution des ondes mères (pompage de l'onde 1) à plus grande distance non-linéaire $k_4 d \varepsilon^2 \approx 1.5$.

L'apparition de nouvelles ondes filles intervenant dans des quartets ultérieurs (1,4,3,5) et (4,4,3,6) est mise en évidence et l'évolution spatiale de leur cambrure est donnée. Ces ondes forment avec l'onde 1 et l'onde 4 des paquets de vague obliques dont la direction apparente dépend de la cambrure. Lorsque la cambrure des ondes mères est élevée, le déferlement apparaît en premier pour les ondes courtes présentes à l'intérieur de ces paquets.

La cascade d'interactions observée est expliquée par la théorie de Zakharov [1968] des interactions à 4 vagues. Les quartets formés après l'apparition de l'onde fille 4 sont quasi-résonants et montrent un fort taux de croissance. La résolution numérique de l'équation de Zakharov incluant les ondes 5 et 6 permet de prédire quantitativement les observations expérimentales pour l'onde 5 mais pas pour l'instant pour l'onde 6 (voir les systèmes (5) et (7)). Le déferlement visible lors des essais peut jouer un rôle dans les différences observées entre simulations et expériences. Des essais plus systématiques sont nécessaires pour mieux caractériser le comportement des quartets ultérieurs et des résonances nouvelles.

VI. REMERCIEMENTS

Ces travaux ont été réalisés dans le cadre du projet ANR TURBULON soutenu par l'Agence Nationale de Recherche 12-BS04-0005. Nous tenons aussi à remercier les rapporteurs, Michel Benoît, Olivier Kimmoun ainsi qu'un troisième rapporteur anonyme, grâce à qui nous avons pu améliorer grandement la qualité de l'article.

VII. ANNEXE

L'élévation de surface libre en profondeur d'eau infinie est décrite comme une superposition d'ondes libres qu'on écrit de la manière suivante :

$$\eta_{lin}(x,t) = \int \left(\frac{k}{2\omega} \right)^{1/2} \left[B(k,t) e^{-i\omega(k)t} + B(-k,t) e^{i\omega(k)t} \right] e^{ikx} dk, \quad (3)$$

où B est l'amplitude complexe, ω la pulsation, k le vecteur d'onde et $k = k \vee$. L'équation de Zakharov [1968] régit l'évolution temporelle de l'amplitude B du fait des interactions à 4 vagues :

$$i\partial_t B_1 = \int T_{1234} B_2 B_3 B_4 \delta_{1+2-3-4} e^{i\Delta_{1234}t} dk_2 dk_3 dk_4, \quad (4)$$

où les pulsations sont ω_i , le désaccord linéaire en fréquence est $\Delta_{1234} = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4$. On utilise les notations $\delta_{1+2-3-4} = \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4)$ et $B_i = B(k_i, t)$. Les coefficients d'interaction $T_{1234} = T(k_1, k_2, k_3, k_4)$ sont les noyaux donnés par Krasitskii [1994] ou Janssen [2009]. Pour l'interaction dégénérée étudiée ici, on suppose que l'élévation consiste en la superposition de 3 ondes seulement. L'amplitude complexe s'écrit alors $B(k,t) = B_1(t)\delta(k-k_1) + B_3(t)\delta(k-k_3) + B_4(t)\delta(k-k_4)$ avec la condition de résonance $k_4 = 2k_1 - k_3$. L'équation (4) conduit au système :

$$\begin{aligned} i\partial_t B_1 & (\Omega_1 - \omega_1) B_1 + 2T_{1134} e^{i\Delta_{1134}t} B_1 B_3 B_4 \\ i\partial_t B_3 & (\Omega_3 - \omega_3) B_3 + T_{1134} e^{-i\Delta_{1134}t} B_1^2 B_4 \\ i\partial_t B_4 & (\Omega_4 - \omega_4) B_4 + T_{1134} e^{-i\Delta_{1134}t} B_1^2 B_3 \end{aligned} \quad (5)$$

Les pulsations non-linéaires Ω_i satisfont aux relations de dispersion non-linéaires :

$$\begin{aligned} \Omega_1 & \omega_1 + T_{1111} |B_1|^2 + 2T_{1313} |B_3|^2 + 2T_{1414} |B_4|^2 \\ \Omega_3 & \omega_3 + 2T_{1313} |B_1|^2 + T_{3333} |B_3|^2 + 2T_{1414} |B_4|^2 \\ \Omega_4 & \omega_4 + 2T_{1414} |B_1|^2 + 2T_{3434} |B_3|^2 + T_{4444} |B_4|^2 \end{aligned} \quad (6)$$

A forte cambrure, l'établissement des équations (5) à partir de l'équation (4) montre en fait l'apparition d'ondes supplémentaires, qu'on a négligées pour obtenir le système (5), notamment l'onde 5. Par exemple, en décomposant l'amplitude complexe en 4 ondes (1,3,4,5), alors les ondes de cascade 5 et 6 vérifient les équations d'évolution suivantes

$$\begin{aligned} i\partial_t B_5 & (\Omega_5 - \omega_5) B_5 + 2T_{1435} e^{i\Delta_{1435}t} B_3 B_1 B_4 \\ i\partial_t B_6 & (\Omega_6 - \omega_6) B_6 + T_{4436} e^{-i\Delta_{4436}t} B_4^2 B_3 \end{aligned} \quad (7)$$

Les relations de dispersion non-linéaires (6) sont modifiées par l'ajout de termes faisant intervenir les ondes 5 et 6. Deux nouvelles relations donnent la pulsation non-linéaire des ondes 5 et 6 :

$$\begin{aligned} \Omega_5 & \omega_5 + 2T_{5151} |B_1|^2 + 2T_{5353} |B_3|^2 + 2T_{5454} |B_4|^2 + T_{5555} |B_5|^2 + 2T_{5656} |B_6|^2 \\ \Omega_6 & \omega_6 + 2T_{6161} |B_1|^2 + 2T_{6363} |B_3|^2 + 2T_{6464} |B_4|^2 + 2T_{6565} |B_5|^2 + T_{6666} |B_6|^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Pour un quartet (1,1,3,4) résonant, on montre que les désaccords linéaires Δ_{1435} et Δ_{4436} ne sont pas nuls, autrement dit ces nouveaux quartets sont non-résonants ou quasi-résonants.

Dans le cas de vagues générées en bassin, la solution précédente, valable pour un champ de vagues homogène en espace et évoluant en temps, est transformée en solution homogène en temps (stationnaire) évoluant en espace grâce au changement de variable $t \rightarrow x/c_g$ où c_g est la vitesse de groupe de l'onde la plus lente.

VIII. REFERENCES

- BONNEFOY F., HAUDIN F., MICHEL G., SEMIN B., HUMBERT T., AUMAITRE S., BERHANU M., FALCON E. (2016) – Observation of resonant interactions among surface gravity waves. *J. Fluid Mech.*, **805**, 1–11.
- CAVALERI L. ET AL. (2007) – Wave modelling - The state of the art. *Prog. Oceanography*, **75(4)**, 603–674.
- DALRYMPLE R.A. (1989) – Directional wavemaker theory with side-wall reflection. *J. Hydr. Res.*, **27(1)**, 23–34.
- HAMMACK J.L., HENDERSON D.M. (1993) – Resonant interactions among surface water waves. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **25**, 55–97.
- JANSSEN P.A.E.M. (2009) – On some consequences of the canonical transformation in the Hamiltonian theory of water waves. *J. Fluid Mech.*, **637**, 1–44.
- KARTASHOVA E., SHUGAN I.V. (2011) – Dynamical cascade generation as a basic mechanism of Benjamin-Feir instability. *Eur. Phys. Letters*, **95(3)**, 1–6.
- KIMMOUN O., BRANGER H., KHARIF C. (1999) – On short-crested waves: experimental and analytical investigations. *Eur. J. Mech.- B/Fluids*, **18(5)**, 889–930.
- KRASITSKII V.P. (1994) – On reduced equations in the Hamiltonian theory of weakly nonlinear surface waves. *J. Fluid Mech.*, **272**, 1–20.
- LIU Z., XU D., LI J., PENG T., ALSAEDI A., LIAO S. (2015) – On the existence of steady-state resonant waves in experiments. *J. Fluid Mech.*, **763**, 1–23.
- LONGUET-HIGGINS M.S. (1962) – Resonant interactions between two trains of gravity waves. *J. Fluid Mech.*, **12**, 321–332.
- LONGUET-HIGGINS M.S., SMITH N.D. (1966) – An experiment on third-order resonant wave interactions. *J. Fluid Mech.*, **25**, 417–435.
- MCGOLDRICK L.F., PHILLIPS O.M., HUANG N.E., HODGSON T.H. (1966) – Measurements of third-order resonant wave interactions. *J. Fluid Mech.*, **25**, 437–456.
- PHILLIPS O.M. (1960) – On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. Part I. The elementary interactions. *J. Fluid Mech.*, **9**, 193–217.
- TOMITA H. (1989) – Theoretical and experimental investigations of interaction among deep-water gravity waves. *Report of Ship Res. Inst., NMRI*, **26(5)**, 251–350.
- ZAKHAROV V. (1968) – Stability of periodic waves of finite amplitude on a surface of a deep fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **2**, 190–198.