

## Observation d'ondes solitaires *dépressions* à la surface d'une fine couche de fluide

Eric Falcon<sup>1</sup>, Claude Laroche<sup>1</sup> et Stéphan Fauve<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Physique, École Normale Supérieure de Lyon,  
UMR 5672, 46, allée d'Italie, 69 007 Lyon, France

<sup>2</sup>Laboratoire de Physique Statistique, École Normale Supérieure,  
UMR 8550, 24, rue Lhomond, 75 005 Paris, France

Eric.Falcon@ens-lyon.fr - <http://www.ens-lyon.fr/~efalcon>

### Résumé

Nous présentons l'observation d'ondes solitaires *dépressions* à la surface d'une fine couche de mercure lorsque sa profondeur est suffisamment petite devant la longueur capillaire [1]. Ces ondes, ainsi que les ondes solitaires *élévations* bien connues, sont étudiées avec une nouvelle technique de mesure utilisant des capteurs inductifs. La forme de ces ondes solitaires, leur vitesse dépendant de leur amplitude et leur taux d'amortissement par viscosité, sont trouvés en bon accord avec les prédictions théoriques.

Depuis la première observation d'une onde solitaire à la surface de l'eau par Russell [2], et son interprétation en utilisant l'équation de Korteweg-de Vries (KdV) [3], les ondes solitaires élévations en "eau peu profonde" ont été étudiées de façon extensive [4, 5]. Il a aussi été montré que l'équation de KdV décrit de façon générique différents types de solitons observés dans diverses situations: en acoustique [6], magneto-acoustique [7], dans les plasmas ioniques [8], à la surface d'un solide élastique [9], dans les fibres optiques [10], et dans de l'eau sous la glace [11]. Korteweg et de Vries ont souligné dès leur article pionnier [3] que les ondes solitaires peuvent impliquer une perturbation localisée soit positive (*élévation*), soit négative (*dépression*) selon le signe de la dispersion. Cependant, jusqu'à présent, la plupart des observations concernaient les ondes solitaires élévations. Dans le cas des ondes à la surface des fluides, seules des ondes solitaires élévations peuvent être observées dans la limite grande longueur d'onde, lorsque la gravité est dominante. A plus faible longueur d'onde, lorsque la tension de surface n'est plus négligeable, les effets capillaires ont une très forte influence sur les ondes étendues (observation d'ondes "parasites" ou "ripples" [12]), mais aussi sur les ondes localisées telles que les ondes solitaires KdV qui sont prédites devenir des ondes dépressions plutôt qu'élévations. Nous présentons ici la première observation d'ondes solitaires de type dépression à la surface d'une fine couche de mercure. Au moyen d'une analyse quantitative précise, nous avons montré qu'elles avaient une vitesse subsonique dépendante de leur amplitude et qu'elles gardaient une forme auto-similaire bien qu'étant amorties par dissipation visqueuse.

Le dispositif expérimental consiste en un canal horizontal de PMMA de 1.5 m de long, et 7 cm de large, rempli de mercure jusqu'à une hauteur  $h$ :  $2.12 \leq h \leq 8.5$  mm.  $h$  est mesuré à  $\pm 0.02$  mm au moyen d'une jauge de profondeur micrométrique. Les propriétés du fluide sont : densité  $\rho = 13.5 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, tension de surface  $\gamma = 0.484$  N/m, et viscosité dynamique  $\eta = 1.5 \cdot 10^{-3}$  Ns/m<sup>2</sup> [13]. Les ondes de surface sont engendrées par une excitation sinusoïdale ou impulsionnelle résultant du mouvement horizontal d'un pavé rectangulaire en PTFE, immergé dans le fluide; et piloté par un vibreur électromagnétique (Brüel &

Kjær, Type 4809). Les ondes sont engendrées à 1 cm du bord d'une des extrémités du canal, et le déplacement local du fluide en réponse à cette excitation est mesuré par deux capteurs inductifs non intrusifs (capteurs de déplacement linéaire à courant de Foucault, Electro 4953). Les deux capteurs, de 3 mm de diamètre, sont suspendus perpendiculairement à la surface du fluide au repos. Ils sont placés à 2.5 mm (resp. 0.5 mm) au-dessus de la surface pour l'étude des ondes solitaires élévations (resp. dépressions). L'échelle de sensibilité linéaire des capteurs permet une mesure de la distance entre la face du capteur et la surface de fluide jusqu'à 2.5 mm avec une sensibilité de 5 V/mm. Le premier capteur est situé à 0.1 m du générateur d'ondes tandis que le second est monté sur un rail mobile horizontal à une distance  $x$  du premier,  $0 < x < 1.2$  m. Bien que ces capteurs inductifs soient fréquemment utilisés lors de mesures précises de position d'une plaque métallique, leur réponse dans le cas d'une surface liquide ondulante était inconnue. Nous avons donc, dans un premier temps, vérifié nos mesures à l'aide d'une détermination optique de la pente locale de la surface: en utilisant un détecteur sensible à la position, nous avons enregistré la déflexion d'un faisceau laser par l'onde de surface; le calcul de l'élévation de la surface à partir du signal optique a été trouvé en parfait accord avec la mesure inductive directe de la forme de l'onde [14]. Bien que la sensibilité et la résolution spatiale de la méthode optique soient meilleures, la méthode inductive permet une mesure directe du déplacement de la surface et ne requiert aucun traitement du signal. Au-delà de cette simplicité, elle donne aussi des mesures plus précises des formes d'ondes complexes, puisque des petites erreurs peuvent s'accumuler lors de l'intégration numérique nécessaire pour traiter le signal optique. Ces deux techniques ne sont pas limitées par leur temps de réponse pour notre gamme de fréquence d'ondes de surface. Le choix du mercure a été motivé par la possibilité d'utiliser la méthode de mesure inductive, et aussi, du fait de sa faible viscosité cinématique (un ordre de grandeur plus faible que pour l'eau), réduisant ainsi considérablement l'atténuation de l'onde.

Afin de vérifier notre technique, nous mesurons, tout d'abord, la vitesse de phase et déterminons la relation de dispersion des ondes de surface gravito-capillaires, pour trouver la valeur de la tension de surface  $\gamma$ . Pour cela, le vibreur est piloté sinusoïdalement à faible amplitude et à fréquence  $f$  variant de 5 à 25 Hz, par pas de 0.1 Hz. Nous mesurons la différence de phase relative  $\phi$  entre les signaux donnés par les deux capteurs, au moyen d'une détection synchrone en fonction de  $f$ . La vitesse de phase  $c_\phi$  est ainsi obtenue à partir de la phase déroulée  $\phi(f)$  et de la distance  $x = 120$  mm entre les capteurs:  $c_\phi = 2\pi fx/\phi(f)$ . Elle est montrée en Fig. 1 en fonction de  $f$  pour 3 valeurs différentes de la hauteur. Ces résultats sont en bon accord avec la relation de dispersion sans viscosité

$$\omega = \sqrt{\left(gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3\right) \tanh kh}, \quad (1)$$

entre la pulsation  $\omega = 2\pi f$  et le nombre d'onde  $k$ , conduisant à  $\gamma = 0.4$  N/m,  $g$  étant l'accélération de la gravité. Il est à noter que cette valeur de tension de surface est 17% plus basse que celle tabulée et donnée ci-dessus. Ceci peut provenir de la présence de contaminants à la surface qui pourrait réduire la valeur de la tension de surface "dynamique" jusqu'à 30% par rapport à la valeur mesurée en statique [15]. Une autre vérification indépendante de l'Eq. (1) est montrée en encart dans la Fig. 1: la longueur d'onde,  $\lambda = c_\phi/f$ , en fonction de  $f$ , obtenue par la méthode de phase précédente, est comparée avec sa mesure directe en utilisant un stroboscope. A partir de l'Eq.(1), nous pouvons définir la longueur capillaire,  $l_c \equiv \sqrt{\gamma/(\rho g)}$ , et le nombre de Bond,  $Bo \equiv (l_c/h)^2$ . Dans

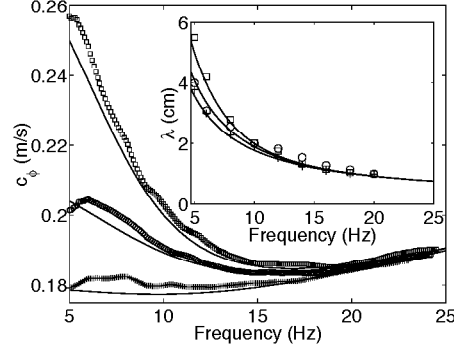


FIG. 1: Vitesse de phase en fonction de la fréquence d'excitation. Mesure de la différence de phase pour  $h = 3.3$  (+),  $4.6$  (o) et  $8$  (□) mm. Les traits pleins représentent  $\omega(k)/k$  obtenu par l'Eq. (1) avec  $\gamma = 0.4$  N/m pour  $h = 3.3$  (courbe du bas),  $4.6$  (milieu) and  $8$  (haut) mm. Encart: Longueur d'onde vs  $f$  avec des mesures stroboscopiques additionnelles (mêmes symboles que précédemment).

l'approximation grande longueur d'onde ou la limite "eau peu profonde" ( $k \rightarrow 0$ ), la vitesse des ondes linéaires est  $c_s = \sqrt{gh}$  et la dispersion est petite. Quand la déflexion de la surface libre  $A(x, t)$  est également petite, telle que les effets non-linéaires soient du même ordre de grandeur que ceux des effets dispersifs, elle est déterminée au premier ordre par l'équation de Korteweg-de Vries [3]

$$A_t + \frac{3}{2} \frac{c_s}{h} A A_\xi + \frac{1}{2} c_s h^2 \left( \frac{1}{3} - \text{Bo} \right) A_{\xi\xi\xi} = 0, \quad (2)$$

dans le référentiel en mouvement,  $\xi \equiv x - ct$ . La solution de l'onde solitaire gravito-capillaire de l'Eq. (2) s'écrit [3]

$$A(x, t) = A_0 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{x - ct}{L} \right), \quad L \equiv \sqrt{\frac{4(1 - 3\text{Bo}) h^3}{9A_0}} \quad (3)$$

avec  $c$  la vitesse de l'onde solitaire

$$c = c_s \left( 1 + \frac{A_0}{2h} \right), \quad (4)$$

et  $L$  l'échelle de longueur de l'onde solitaire. Les Eqs. (3) et (4) montrent qu'il existe une famille continue de solutions soliton à un paramètre  $A_0$  (l'extremum de l'amplitude de l'onde). De plus, lorsque  $0 \leq \text{Bo} < 1/3$ , nous obtenons les ondes solitaires élévations ( $A_0 > 0$ ) observés depuis longtemps, avec des vitesses supersoniques (nombre de Froude  $F \equiv c/c_s > 1$ ); tandis que, pour  $\text{Bo} > 1/3$ , nous devrions trouver des ondes dépressions ( $A_0 < 0$ ) avec des vitesses subsoniques ( $F < 1$ ). Pour  $\text{Bo} \simeq 1/3$ , un terme dispersif additionnel du cinquième ordre doit être pris en compte dans l'Eq. (2), et dans ce cas, la solution du problème hydrodynamique complet est sujet à discussions théoriques [16, 17]. Malgré quelques tentatives [16, 18], aucune observation concluante d'ondes solitaires dépressions n'a été effectuée jusqu'à présent. Il est à noter que cette solution de l'équation KdV ne doit pas être confondue avec les ondes dépressions oscillantes calculées dans la limite de profondeur infinie [19], et tout récemment observées [20]. Nous avons effectué une étude

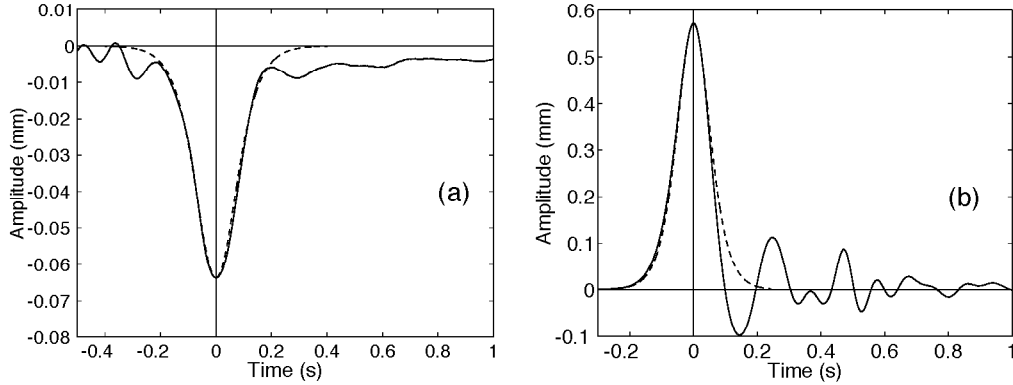


FIG. 2: **(a)** Profil de la surface libre d'une onde solitaire **dépression** pour  $h = 2.12$  mm et  $A_0 = 0.064$  mm, **(b)** profil d'une onde solitaire **élévation** pour  $h = 5.6$  mm et  $A_0 = 0.57$  mm. Traits pleins : enregistrements temporels du déplacement de la surface du fluide mesurés par le capteur situé à **(a)** 300 et **(b)** 200 mm du générateur d'ondes. Les fronts des impulsions se trouvent sur le côté gauche. Traits pointillés : profils théoriques des solitons KdV **(a)** dépression (resp. **(b)** élévation) solutions de l'Eq. (3) avec  $\gamma = 0.4$  N/m,  $h = 2.12$  (resp. 5.6) mm et  $A_0$  l'amplitude minimum (resp. maximum) de chaque profil expérimental, conduisant aux paramètres d'onde suivant :  $Bo = 0.67$ ,  $L = 8.2$  mm,  $\epsilon = 0.03$ ,  $\mu = 0.07$ ,  $\mu/\epsilon = 2.2$  (resp.  $Bo = 0.1$ ,  $L = 9.8$  mm,  $\epsilon = 0.1$ ,  $\mu = 0.32$ ,  $\mu/\epsilon = 3.2$ ).

expérimentale sur les ondes solitaires pour une épaisseur de la couche de fluide telle que  $2.12 \leq h \leq 8.5$  mm, d'où  $0.04 \leq Bo \leq 0.67$ . Pour le mercure ( $l_c = 1.74$  mm), le cas critique  $Bo = 1/3$  correspond à  $h_c \approx 3$  mm. Afin d'engendrer des ondes solitaires, nous pilotons le vibreur de façon impulsionnelle. Pour  $h < h_c$  (resp.  $h > h_c$ ), le pavé est tiré vers l'arrière (resp. poussé vers l'avant) horizontalement, afin d'engendrer une impulsion négative (resp. positive) sur la surface du fluide. A une distance donnée de cette émission, le profil de la surface libre est enregistré et montré en Fig. 2a pour une impulsion dépression ( $h = 2.12$  mm) et en Fig. 2b pour une impulsion élévation ( $h = 5.6$  mm). Les deux enregistrements sont en bon accord avec les profils d'onde solitaire KdV dépression et élévation donnés par l'Eq. (3) avec  $\gamma = 0.4$  N/m. Dès lors que  $A_0$  est connu, le profil théorique ainsi que la vitesse de l'onde solitaire, donnés par les Eqs. (3) et (4), n'impliquent aucun paramètre ajustable. Les petites oscillations observées avant (resp. après) l'arrivée de l'impulsion sur la Fig. 2a (resp. 2b) sont assimilées à des précurseurs [14] (resp. à la queue radiative de phonons). Comme indiqué dans la légende de la Fig. 2, ces impulsions isolées impliquent des paramètres d'onde qui se trouvent dans les gammes de validité nécessaire pour l'obtention de l'équation KdV, i.e. correspondant à une petite dispersion ( $\mu \equiv (h/L)^2 \ll 1$ ) et une petite non linéarité ( $\epsilon \equiv |A|/h \ll 1$ ), les deux étant du même ordre de grandeur.

A partir du générateur d'ondes et pour  $h = 2.12$  mm, nous enregistrons la propagation d'une impulsion dépression sur des distances allant de 10 à 110 fois sa taille typique  $L \approx 1$  cm. Comme le montre la Fig. 3, les profils enregistrés sont en bon accord avec l'onde solitaire KdV dépression tout au long de sa propagation. Il est à noter, cependant, que la première impulsion enregistrée n'a pas eu suffisamment de temps pour atteindre sa forme asymptotique, et que pour les derniers enregistrements, l'effet cumulatif de la dissipation conduit à une légère différence avec le profil KdV. Sur les distances intermédiaires, l'écart de la Fig. 3 montre qu'exprimés en variables  $-A/A_0$  et  $tc|A_0|^{1/2}$ , tous les résultats (—) se

regroupent sur une seule courbe (—) prédite par l'Eq. (3). Cela signifie que l'impulsion se propage sans déformation sur une distance grande devant sa taille typique, en très bon accord avec la solution de l'équation de KdV. La vitesse de l'onde solitaire est mesurée, tout

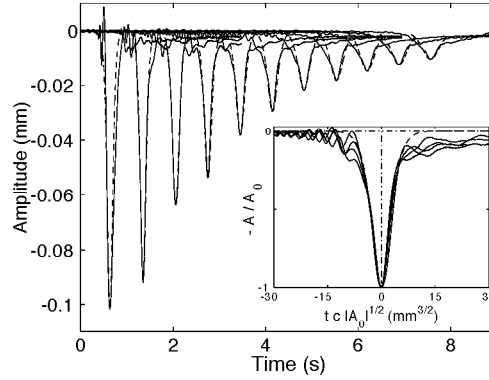


FIG. 3: Propagation d'une onde solitaire dépression pour  $h = 2.12$  mm, enregistrée à des distances du générateur d'ondes de 0.1 à 1.1 m, par pas de 0.1 m. L'origine des temps est déclenchée par le générateur d'ondes. Pointillés: profils théoriques des solitons KdV **dépression** issus de l'Eq. (3) avec  $\gamma = 0.4$  N/m,  $h = 2.12$  mm et  $A_0$  l'amplitude minimum de chaque profil expérimental. Encart: ondes solitaires dépressions (sans dimension) expérimentales à 0.2, 0.3, 0.4 et 0.5 m (—) et comparées à la solution (—) de l'Eq. (3).

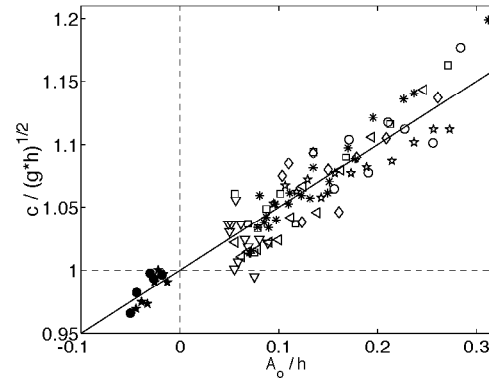


FIG. 4: Vitesse adimensionnée des impulsions,  $c/\sqrt{gh}$  vs  $A_0/h$  pour divers paramètres expérimentaux: Pour les ondes solitaires **dépressions**,  $h = 2.12$  (●) et 2.72 (★) mm. Pour les ondes solitaires **élévations**,  $h = 3.3$  (□); 3.5 (◁), 3.8 (\*), 4.5 (★), 4.6 (◇), 5.1(○), 8.5(▽) mm. (Trait plein de pente 0.5).

au long de sa propagation, en enregistrant le temps de vol entre minima (resp. maxima) successifs de l'amplitude  $A_0$  pour les impulsions dépressions (resp. élévations). La vitesse adimensionnée,  $c/\sqrt{gh}$  (nombre de Froude  $F$ ), est montrée sur la Fig. 4 en fonction de  $A_0/h$  pour divers  $h$  correspondant à  $0.04 \leq Bo \leq 0.67$ . Les symboles pleins (resp. ouverts) sont relatifs aux impulsions dépressions (resp. élévations). Pour chaque hauteur correspondant à  $Bo > 1/3$ , la vitesse de l'onde dépression est subsonique ( $F < 1$ ) et croît à mesure que l'impulsion se propage, tandis que pour  $0 \leq Bo < 1/3$ , la vitesse de l'onde élévation

est supersonique ( $F > 1$ ) et décroît avec le temps. Tous ces résultats se regroupent sur une unique ligne droite prédite par l'Eq. (4) de pente 1/2 en variables sans dimension.

Nous avons présenté l'observation d'ondes de surface solitaires de type dépression dans la limite "eau peu profonde". Nous avons trouvé que leur forme et leur vitesse sont en bon accord avec les solutions ondes solitaires KdV dépressions. Nous soulignons qu'aucun paramètre ajustable n'a été utilisé lors de cette comparaison. Bien que les ondes solitaires soient amorties par dissipation visqueuse (cf. [1]), nous avons montré qu'elles gardaient, sur une longueur de propagation grande devant leur taille typique, une forme auto-similaire donnée par la famille continue de solution de l'équation KdV. Ce travail se poursuit afin d'observer une transition entre une onde solitaire élévation vers une de type dépression lorsque la profondeur du canal diminue avec la distance de propagation.

## Références

- [1] E. Falcon, C. Laroche and S. Fauve, Phys. Rev. Lett. **89**, 204501 (2002); aussi dans Phys. Rev. Focus, 29 Oct. 2002 (<http://focus.aps.org/story/v10/st20>); et Pour La Science, **304**, 18, Février 2003.
- [2] J. S. Russell, *Report on Waves* in 1844 British Assn. Adv. Sci. Report, London, (1845) and in Proc. R. Soc. Edinburgh, p. 319 (1844).
- [3] D. J. Korteweg and G. De Vries, Phil. Mag. **39**, 422 (1895).
- [4] J. L. Hammack and H. Segur, J. Fluid Mech. **65**, 289 (1974).
- [5] A. Bettini, T. A. Minelli and D. Pascoli, Am. J. Phys. **51**, 977 (1983).
- [6] K. A. Naugol'nykh and L. A. Ostrovsky, *Nonlinear wave processes in acoustics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
- [7] T. Kakutani, H. Ono, T. Taniuti and C.-C. Wei, J. Phys. Soc. Japan **24**, 1159 (1968); T. Kakutani and H. Ono, *ibid.* **26**, 1305 (1969).
- [8] G. L. Lamb, *Elements of soliton theory* (John Wiley, New York, 1980).
- [9] A. M. Lomonosov, P. Hess and A. P. Mayer, Phys. Rev. Lett. **88**, 076104 (2002).
- [10] Y. S. Kivshar, Phys. Rev. A **42**, 1757 (1990).
- [11] T. Takizawa, J. Geophys. Res. **93**, 5100 (1988), E. Părău and F. Dias, J. Fluid Mech. **460**, 281 (2002).
- [12] A. V. Fedorov, W. K. Melville and A. Rozenberg, Phys. Fluids **10**, 1315 (1998); J. H. Chang, R. N. Wagner and H. C. Yuen, J. Fluid Mech. **86**, 401 (1978); G. Kuwabara, T. Hasegawa and K. Kono, Am. J. Phys. **54**, 1002 (1986).
- [13] Handbook of Chemistry and Physics, D.R.Lide Ed., CRC Press, 80th Ed. (1999).
- [14] E. Falcon, C. Laroche and S. Fauve submitted to Phys. Rev. Lett.
- [15] D. M. Henderson and R. C. Lee, Phys. Fluids **29**, 619 (1986).
- [16] T. B. Benjamin, Quarterly of Applied Mathematics **40**, 231 (1982).
- [17] T. Kawahara, J. Phys. Soc. Japan **33**, 260 (1972); J. K. Hunter and J.-M. Vanden-Broeck, J. Fluid Mech. **134**, 205 (1983); J. A. Zufiria, J. Fluid Mech. **184**, 183 (1987); E. S. Belinov, R. Grimshaw and E. P. Kuznetsova, Physica D **69**, 270 (1993); A. R. Champneys, J.-M. Vanden-Broeck and G. J. Lord, J. Fluid Mech. **454**, 403 (2002).
- [18] M. Z. Gak and E. Z. Gak in *Nonlinear Oscillations, Waves and Vortices in Fluids International Symposium* (CSA, St-Petersburg, 1994), téléchargeable à <http://www.csa.ru/ftp/inst/ezgak.doc>
- [19] M. S. Longuet-Higgins, J. Fluid Mech. **200**, 451 (1989).
- [20] M. S. Longuet-Higgins and X. Zhang, Phys. Fluids **9**, 1963 (1997); X. Zhang, J. Fluid Mech. **289**, 51 (1995).