

## Réflexion critique d'ondes internes de gravité en fluides stratifiés

L. Gostiaux, T. Dauxois et E. Falcon  
*ENS Lyon, Laboratoire de Physique UMR 5672*  
*46, Allée d'Italie, 69007 Lyon*  
 lgostiau@ens-lyon.fr

### Résumé

Nous étudions la réflexion des ondes de gravité internes sur des surfaces planes qui présentent un angle d'incidence critique pour lequel la réflexion s'effectue le long de la pente. Dans le cadre linéaire, l'onde réfléchie est alors singulière, sa longueur d'onde tendant vers zéro et son amplitude vers l'infini. Une étude analytique non-linéaire par la méthode des échelles multiples a permis de dévoiler une instabilité de retournement des ondes susceptible d'induire du mélange dans la stratification. Nous menons actuellement des expériences de laboratoire en vue de comparaisons avec nos prédictions analytiques.

## 1 Introduction

L'étude des fluides stratifiés est une branche encore récente de la mécanique des fluides. En effet, les motivations sont apparues au 20<sup>ème</sup> siècle avec l'engouement pour l'étude des océans et de l'atmosphère. La grandeur caractéristique de tels fluides est  $N$ , la fréquence de Brunt-Väisälä, du nom de deux météorologistes de l'après-guerre, mesurant la stratification rapportée à l'accélération de pesanteur  $g$

$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho}{dz}} . \quad (1)$$

Elle définit la fréquence propre d'oscillation d'une particule de fluide de masse volumique  $\rho_0$  autour de son altitude d'équilibre (selon l'axe  $z$ ). De manière générale, l'étude des fluides stratifiés se place dans l'hypothèse où la densité est une quantité advectée par l'écoulement, dans le sens où les temps de diffusion des grandeurs intensives (température, composition chimiques) responsables de la stratification sont supposés longs devant les temps caractéristiques du problème. Dans l'hypothèse d'écoulements incompressibles, la fréquence de Brunt-Väisälä intervient donc dans la conservation de la masse qui traduit cette advection, ce qui s'écrit en notant  $\rho_e$  et  $P_e$  les perturbations au champ statique de densité et pression

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + v_z \frac{N^2 \rho_0}{g} = 0 . \quad (2)$$

La seconde approximation est celle dite de Boussinesq, dont le cadre s'étend au-delà des fluides stratifiés. Elle consiste à négliger l'influence des variations de densité dans les termes inertiels, et à ne les considérer que dans les termes gravitationnels (poussée d'archimède). Les équations du mouvement deviennent alors

$$\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial P_e}{\partial x} , \quad \rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial P_e}{\partial z} - \rho_e g . \quad (3)$$

En bouclant le système avec l'incompressibilité, nous obtenons un système fermé de quatre équations pour les quatre inconnues  $v_x$ ,  $v_z$ ,  $\rho_e$  et  $P_e$ , qui mène à la même équation pour les quatre variables [1, 2]

$$\frac{\partial^4 v_z}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 v_z}{\partial t^2 \partial z^2} = -N^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} . \quad (4)$$

Si l'on recherche des solutions progressives de l'équation (4) sous la forme d'ondes planes on obtient la relation de dispersion

$$\omega = \pm N \sin \beta , \quad (5)$$

en notant  $\omega$  la pulsation et  $\beta$  l'angle du vecteur d'onde avec la verticale.

Cette formule est assez surprenante car le module du vecteur d'onde  $k = |\vec{k}|$  n'y figure pas : il ne reste que la direction du vecteur d'onde,  $\beta$ . La première propriété étonnante des ondes internes est donc de se propager selon une direction fixe lorsque la fréquence est fixée ; la longueur d'onde est en revanche quelconque. On montre également que la vitesse de groupe est perpendiculaire à la vitesse de phase : par conséquent, un rayon d'ondes internes se propage parallèlement à ses plans d'onde (cf Fig. 1a).

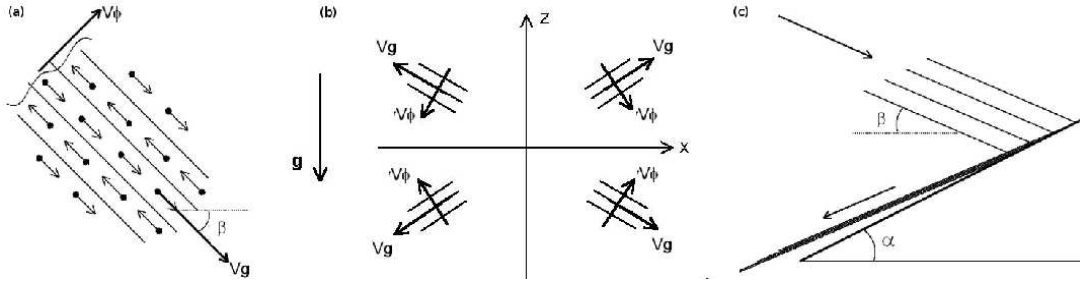


FIG. 1 – (a) Représentation des plans d'ondes, de la vitesse de phase  $v_\phi$ , de la vitesse de groupe  $v_g$ , et de la trajectoire des particules de fluide. (b) Rayonnement dans le cas d'une source ponctuelle centrée en  $O$ . (c) Réflexion d'un faisceau d'ondes internes sur un plan incliné ( $\beta \simeq \alpha$ ).

Les ondes internes sont venues au goût du jour avec l'étude des dynamiques océaniques et atmosphériques dans la deuxième moitié du 20ème siècle. Elles transportent en effet d'importantes quantités d'énergie dans la stratosphère et dans l'océan profond et doivent être absolument prises en compte dans les modèles océaniques. Les recherches militaires ont également suscité des travaux expérimentaux sur l'émission de ces ondes par des corps en translation. Suite aux premières visualisations en laboratoire d'ondes internes datant de Görtler [3] puis Mowbray et Rarity [4], des travaux théoriques se sont attelés au problème océanographique de l'émission d'ondes par les marées et le forçage de surface des vents, ainsi qu'à la nature des instabilités susceptibles d'affecter ces ondes (convectives ou de cisaillement), leur déferlement étant un facteur essentiel du mélange des masses océaniques. Plus récemment, l'importance des interactions entre ces ondes et les fonds océaniques a été mesurée [5], suggérant que la réflexion des ondes internes sur les fonds océaniques pourrait être un facteur important de mélange. Les analyses théoriques et expérimentales de ce phénomène critique sont encore un sujet ouvert que nous étudions ici.

## 2 Approche linéaire de la réflexion d'ondes internes

Considérons l'interaction d'une onde interne avec un fond marin que nous supposons incliné avec un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Comme lors de tout phénomène de réflexion, la pulsation de l'onde est conservée de manière à respecter les conditions aux limites dans l'approximation linéaire. Par conséquent, étant donné la relation de dispersion (5), lorsqu'une onde interne se réfléchit, son angle de propagation par rapport à l'horizontale sera conservé, *indépendamment de l'angle de la pente*: il n'y aura donc plus de réflexion spéculaire comme pour des ondes acoustiques ou optiques.

Il apparaît donc un angle critique  $\alpha_c = \beta$ , pour lequel le rayon est réfléchi le long de la pente (cf. Fig. 1c). La figure met également en évidence un fort rétrécissement de la largeur du faisceau après la réflexion, lorsque les conditions sont proches de cet angle critique. De manière générale, le rétrécissement est donné par le rapport des longueurs d'ondes incidente et réfléchie  $\lambda_i$  et  $\lambda_r$

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_i} = \frac{\sin(|\beta - \alpha|)}{\sin(\beta + \alpha)} .$$

Par conservation de l'énergie, il sera accompagné d'une augmentation inverse de la densité d'énergie de l'onde réfléchie. Nous avons d'ores et déjà un critère d'instabilité: lorsque les ondes introduisent une perturbation de densité telle que le gradient vertical de densité s'annule, il y a déferlement (cela revient à dire que les isodensités présentent une tangente verticale). Ceci intervient pour une onde d'amplitude  $a$  lorsque  $ak \sin 2\beta > 2$ , donc compte tenu de l'amplification due à la réflexion, une onde incidente d'amplitude  $a$  engendrera une onde réfléchie instable si la différence  $\phi = \alpha - \beta$  vérifie l'inégalité

$$\phi^2 < \frac{\pi a \sin^2(2\beta)}{\lambda_i} .$$

Cette relation permet de quantifier le caractère critique de la réflexion. Pour des ondes océaniques, se propageant à  $20^\circ$  par rapport à l'horizontale, d'amplitude 1m et de longueur d'onde 100m, on trouve  $\phi_c = 6^\circ$ , ce qui signifie qu'une réflexion sur un fond faisant un angle entre  $14^\circ$  et  $26^\circ$  avec l'horizontale déstabilisera l'onde. Le mécanisme de l'instabilité doit être mieux compris pour pouvoir modéliser le mélange induit le long des fonds océaniques par la réflexion des ondes internes.

## 3 Analyse non-linéaire de la réflexion quasi-critique

Les considérations précédentes suggèrent d'étudier le problème en distinguant une zone éloignée de la pente où la théorie linéaire s'applique, et une zone proche de la pente dans laquelle les termes non-linéaires sont prépondérants. Dans le cas critique, la région extérieure est parcourue par le rayon incident et par la seconde harmonique réfléchie (la première harmonique est piégée le long de la pente), la fonction de courant totale s'écrivant dans un système de coordonnées adimensionné relatif à la pente ( $z_\perp$  orthogonal à la pente)

$$\psi(x, z_\perp, t) = A(t, z_\perp) e^{i(x+z_\perp-t)} + \varepsilon H(t, z_\perp) e^{i(2x+mz_\perp-2t)} . \quad (6)$$

Le paramètre  $\varepsilon = (\phi_c \tan \alpha)^{1/3}$  a été choisi pour des raisons dimensionnelles comme mesure de la nonlinéarité, et a été utilisé pour effectuer un développement en échelles

multiples dans la région interne [6]. La résolution des équations non-linéaires dans cette zone, avec les conditions aux limites sur la paroi et de raccordement à la solution externe proposée, permettent d'obtenir le champ de vitesse près de la paroi et de déterminer  $H(t,z)$  fonction de  $A(t,z)$ . C'est l'hypothèse de piégeage le long de la pente qui permet de présupposer le doublement de fréquence spatiale longitudinale (selon  $x$ ) de la seconde harmonique,  $m$  étant alors déterminé par la relation de dispersion.

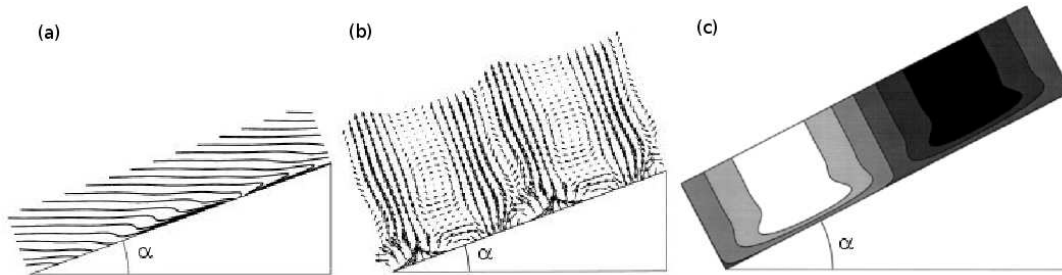


FIG. 2 – (a) Calculs analytiques du champ des lignes isodensité. (b) Champ de vitesse dans le cas quasi-critique. (c) Fonction de courant dans le régime permanent visqueux.

L'annulation des termes séculaires conduit à une équation linéaire d'évolution de l'amplitude dans la région interne, qui peut être résolue analytiquement. Les solutions dans le cas non visqueux sont présentées dans les figures 2(a) et 2(b), et présentent des retournements de densité associés à l'apparition de vortex concentrés le long de la pente. Dans le cas visqueux (cf. Fig. 2(c)), un régime permanent est atteint dans lequel l'ensemble de l'énergie est dissipée le long de la pente.

## 4 Méthode expérimentale

Afin d'évaluer quantitativement le mécanisme de la réflexion des ondes internes, nous avons mis au point une méthode de mesure optique des champs de densité des fluides stratifiés en laboratoire. Nous travaillons avec des solutions d'eau salée ( $NaNO_3$ ) de concentration variable (densité allant de 1 à 1,25) en géométrie bi-dimensionnelle, dans une cuve en plexiglas de  $40 \times 50 \times 10$ . Nous utilisons les propriétés optiques des solutions d'eau salée pour mesurer les perturbations de la stratification.

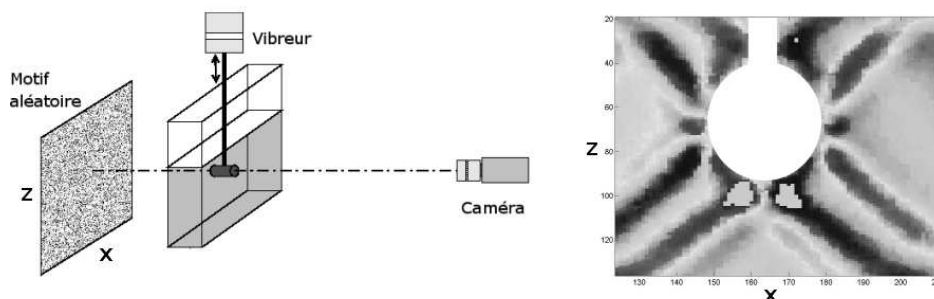


FIG. 3 – Dispositif expérimental et champ de densité mesuré autour d'un cylindre oscillant.

L'indice optique du fluide utilisé étant proportionnel à sa densité, les ondes de gravité induisent des gradients d'indice qui dévient les rayons passant à travers le fluide. Si l'on

observe un motif à travers la zone d'écoulement, celui-ci est déformé proportionnellement au gradient de densité. L'analyse d'images par des algorithmes de maximisation de corrélation dans le plan de Fourier (utilisé en PIV) permet de remonter quantitativement au champ de densité [?].

Pour valider notre méthode, nous nous sommes intéressés à la génération d'ondes internes par un objet oscillant. Nous travaillons à  $N = 1.3Hz$ . Comme dans la figure 1(b), le diagramme de rayonnement expérimental est en croix autour de l'objet. Nous mesurons les ondes émises par un cylindre oscillant verticalement à basse fréquence (0.1 Hz pour  $\sin \beta = 0.5$ ), afin d'étudier l'influence de son rayon ( $R=1, 1.5$  et 3 cm) et de l'amplitude de vibration (de 0 à 1 cm) sur la sélection de longueurs d'ondes. Le champ proche visible sur la figure 4(a) correspond aux prédictions théoriques notamment la bimodalité de l'enveloppe des rayons au voisinage du cylindre due à la viscosité [7]. A plus forte amplitude néanmoins, des harmoniques d'ordre deux sont observées et en cours d'étude. Elles se traduisent par l'émission d'ondes à un angle plus vertical que celui du rayon fondamental, comme révélé par la figure 4(b).

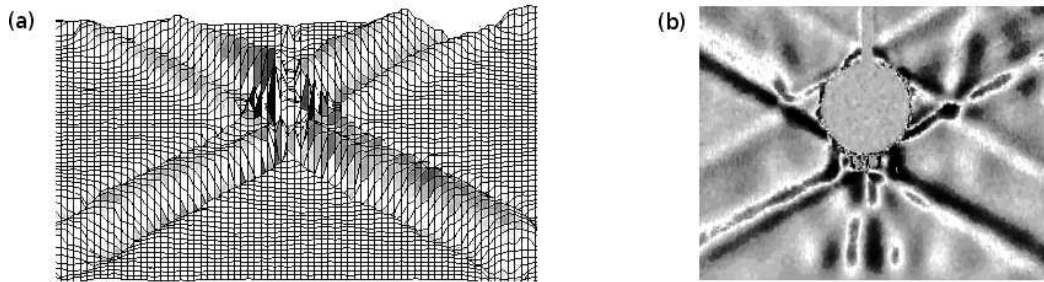


FIG. 4 – (a) Mesure expérimentale d'ondes de densité émises par un cylindre de rayon  $R=1.5\text{cm}$  oscillant avec une amplitude de 3mm. Noter la bimodalité près de la source dans les deux rayons du bas. (b) Non linéarités sur un cylindre de rayon  $R=3\text{cm}$  oscillant à une amplitude de 6mm.

La technique de mesure permet une comparaison quantitative des champs de densité théoriques et expérimentaux : l'amplitude des ondes mesurée est, dans le cas linéaire, en bon accord avec la théorie. En revanche, les amplitudes relatives des secondes harmoniques ne sont actuellement prédites par aucun modèle.

## 5 Résultats concernant la réflexion

La réflexion proprement dite est difficilement observable en raison de la forte amplitude des gradients mis en jeu. Néanmoins, les premiers résultats laissent penser que la viscosité limite l'instabilité de retournement aux échelles de notre expérience [8]. A l'inverse du cas non visqueux qui diverge dans le temps, la solution visqueuse présente un régime permanent où l'ensemble de l'énergie incidente est dissipée le long de la paroi. La figure 5 montre les premiers résultats expérimentaux qui s'accordent qualitativement avec la théorie.

Une seconde instabilité apparaît après le déferlement et concerne l'équilibre entre la zone de mélange et le reste du fluide : la partie mélangée s'imisce dans la zone stratifiée sous forme de digitations horizontales régulières encore non expliquées [9].

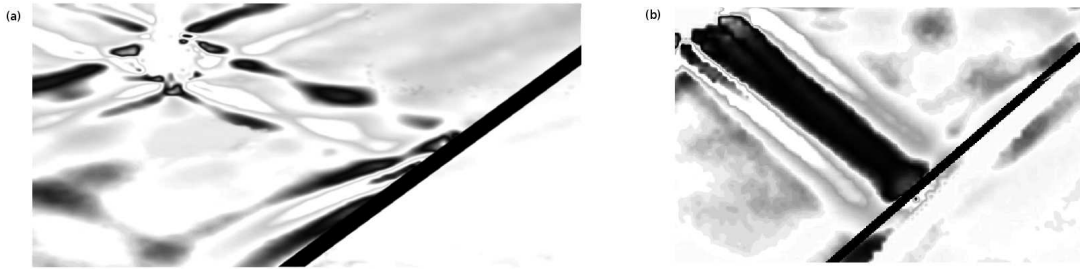


FIG. 5 – (a) Réflexion quasi critique ( $\alpha = 23^\circ$ ,  $\beta = 18^\circ$ ): le rayon réfléchi est visible le long de la pente. (b) Régime stationnaire où l'onde s'écrase sur la pente observé dans le cas critique. A comparer avec les résultats analytiques de la figure 2(c)

## 6 Conclusion

Nous étudions la réflexion d'ondes internes sur un plan incliné dans le cas critique. L'analyse non-linéaire du phénomène prédit une instabilité de retournement attendue par les océanographes mais à ce jour peu étudiée expérimentalement. Nous avons mis au point une méthode de mesure de champs de densité en fluides stratifiés, qui donne de premiers résultats très satisfaisants concernant l'émission des ondes internes. Des expériences à plus grande échelle sont à l'étude pour s'affranchir des effets de la viscosité qui limitent pour l'instant l'observation de l'instabilité.

## Références

- [1] J. Lighthill, *Waves in fluids*, Cambridge University Press (1978).
- [2] L. Gostiaux, T. Dauxois, *Propagation et réflexion d'ondes internes dans l'océan: le mystère de l'angle critique*, Bulletin de l'Union des Physiciens **868**, 25 (2004).
- [3] H. Görtler, *Z. Angew. Math. Mech.* **232**, 65 (1943).
- [4] D. E. Mowbray, B. S. H. Rarity, *A theoretical and experimental investigation of the phase configuration of internal waves of small amplitude in a density stratified liquid*, Journal of Fluid Mechanics **28**, 1 (1967).
- [5] C. C. Eriksen, *Internal wave reflection and mixing at Fieberling Guyot*, Journal of Geophysical Research **103**, 2977 (1998).
- [6] T. Dauxois, W. R. Young, *Near-critical reflection of internal waves*, Journal of Fluid Mechanics **390**, 271 (1999).
- [7] D. G. Hurley, G. Keady, *The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. Part 2. Approximate viscous solution*, Journal of Fluid Mechanics, **351**, 119 (1997).
- [8] T. Dauxois, A. Didier, E. Falcon, *Observation of near-critical reflection of internal waves in a stably stratified fluid*, Physics of Fluids, **16**, 6 (2004).
- [9] E. E. McPhee-Shaw, E. Kunze, *Boundary layer intrusions from a sloping bottom: A mechanism for generating intermediate nepheloid layers*, Journal of Geophysical Research, **107**, 3 (2002).