

## Turbulence d'ondes gravito-capillaires engendrée par des vibrations horizontales du récipient

Bruno Issenmann & Éric Falcon

Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, MSC, UMR 7057 CNRS, F-75013 Paris, France  
bruno.isсенmann@univ-lyon1.fr

**Résumé.** Nous étudions expérimentalement le rôle du forçage sur la turbulence d'ondes gravito-capillaires. Les expériences réalisées précédemment utilisant des forçages localisés spatialement à l'aide de batteurs ont montré que l'exposant de la loi de puissance en fréquence du spectre de gravité dépendait des paramètres de forçage. Ici, la totalité du récipient est vibrée horizontalement. L'exposant du spectre est alors trouvé indépendant du forçage pour les régimes de gravité et de capillarité. Ce forçage étendu spatialement conduit ainsi à un spectre de gravité en meilleur accord avec la théorie que pour un forçage localisé. Le rôle de la forme du récipient a aussi été étudiée car elle modifie l'isotropie du forçage. Enfin, quel que soit le type de forçage utilisé, l'amplitude du spectre est trouvée proportionnelle à la puissance injectée pour les deux régimes. Ce désaccord avec la théorie proviendrait du fait que seule une petite partie de la puissance injectée dans le fluide nourrit la cascade de turbulence d'ondes, la plus grande partie étant dissipée à grande échelle.

**Abstract.** We experimentally study the role of forcing on gravity-capillary wave turbulence. Previous laboratory experiments using a spatially localized forcing thanks to vibrating blades have shown that the frequency power-law exponent of the gravity wave spectrum depends on the forcing parameters. Here, the whole container is horizontally vibrated. We observe that the spectrum exponent is found to be forcing independent for both gravity and capillary regimes. This spatially extended forcing leads to a gravity spectrum in better agreement with the theory than by using a spatially localized forcing. The role of the vessel shape has been also studied since it modifies the isotropy of the forcing. Finally, whatever the type of forcing used, the spectrum amplitude is found to be proportional to the injected power for both regimes. This disagreement with the theory may be due to the fact that only a small part of the injected power feeds the wave turbulence cascade, the greatest part being dissipated at large scale waves.

Quand des ondes d'amplitude suffisamment élevées se propagent dans un milieu dispersif, les interactions non linéaires engendrent des ondes à différentes échelles. Ce transfert d'énergie des grandes échelles (où l'énergie est injectée) aux petites échelles (où elle est dissipée) s'appelle la turbulence d'ondes. On l'observe dans de nombreux systèmes, comme les ondes optiques, les ondes de surface ou les ondes internes en océanographie, les ondes élastiques ou de spin dans les solides (pour des revues récentes, voir les références [1–3]). Depuis la fin des années 1960, la théorie de la turbulence faible décrit la turbulence d'ondes pour quasiment tous les systèmes impliquant des ondes [4]. Ses hypothèses sont cependant très contraignantes. Les ondes sont supposées faiblement non linéaires, isotropes, aléatoires, homogènes et se propageant dans un milieu infini avec une séparation d'échelle entre l'injection et la dissipation de l'énergie. La théorie prédit notamment les solutions analytiques pour le spectre d'ondes faiblement non linéaires à l'équilibre ou en régime stationnaire loin de l'équilibre.

Alors que l'homogénéité et l'isotropie sont deux des hypothèses de base de la théorie, les expériences en laboratoire utilisent en général des forçages localisés spatialement pour générer de la turbulence d'ondes. Dans le cas des ondes à la surface d'un fluide, ces expériences montrent un écart à la prédiction pour le spectre des ondes de gravité [5, 6] : l'exposant du spectre en loi de puissance de la fréquence des ondes de gravité dépend des paramètres de forçage (amplitude et bande-passante) au lieu d'être indépendant comme le prédit la théorie. L'origine de ce désaccord reste un problème ouvert. Il est donc particulièrement intéressant d'étudier le rôle d'un forçage spatialement homogène pour tester le domaine de validité de la théorie. Des expériences ont déjà été réalisées en vibrant verticalement un récipient rempli de fluide pour

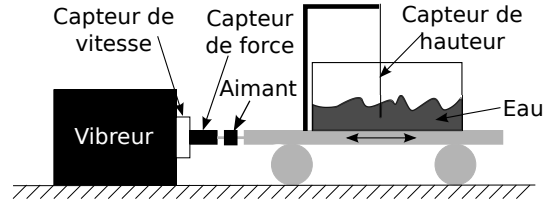


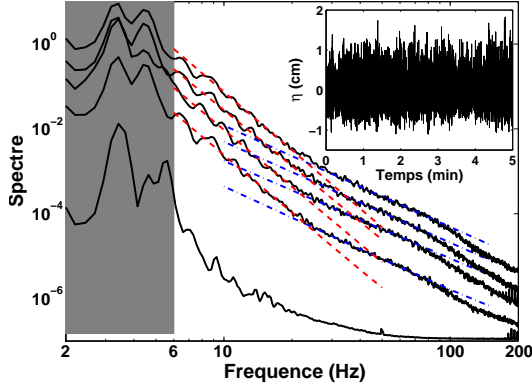
Figure 1. Montage expérimental

engendrer de la turbulence d'ondes capillaires de façon homogène [7–9]. Cependant, ce forçage génère des structures localisées et des pics de résonance discrets dans le spectre.

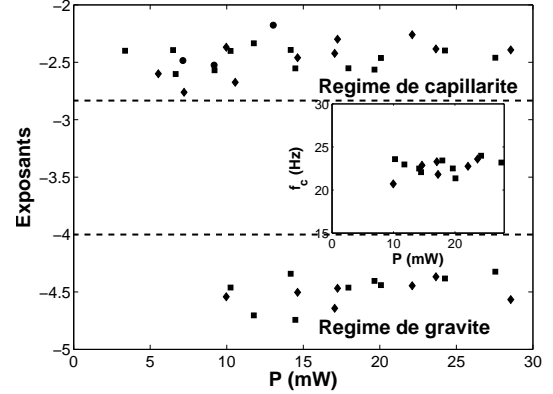
Dans cet article, nous étudions la turbulence d'ondes gravito-capillaires soumise à des vibrations aléatoires horizontales du récipient. Les lois de puissance en fréquence des spectres de hauteur de vagues sont trouvées indépendantes des paramètres de forçage dans les deux régimes de gravité et de capillarité, et sensiblement en accord avec la théorie de la turbulence faible. La loi de distribution de probabilités de la hauteur des vagues et l'évolution du spectre des ondes avec l'amplitude de forçage sont mesurées également.

Le dispositif expérimental est schématisé sur la figure 1. Un récipient circulaire de diamètre 22 cm, est monté sur un chariot à quatre roues et est vibré horizontalement à l'aide d'un vibreur électromagnétique. Le récipient contient de l'eau sur une profondeur  $h = 3$  cm, proche de la limite d'eau profonde ( $\lambda \lesssim 2\pi h$  dans la gamme de longueurs d'ondes  $\lambda$  utilisée ici). Le vibreur est excité par un bruit aléatoire sur une gamme de fréquence entre 1 Hz et  $f_p$  ( $f_p$  allant de 5 à 7 Hz). Un capteur de force est fixé à l'axe du vibreur pour mesurer la force instantanée  $F(t)$  que le vibreur applique sur le récipient. La vitesse instantanée  $V(t)$  du récipient est mesurée à l'aide d'une bobine placée sur l'axe du vibreur [10]. Le récipient est fixé à l'axe du vibreur (et à celui des deux capteurs) à l'aide d'un aimant, qui permet d'imposer sur le récipient une force parallèle à l'axe du vibreur. La hauteur de la surface,  $\eta(t)$  est mesurée à l'aide d'un capteur capacitif [5]. Ce capteur est fixé au récipient, de sorte que  $\eta(t)$  est mesuré dans le référentiel du récipient. La raideur moyenne typique des vagues  $s = k^*/\sigma_\eta$  se situe entre 0,01 et 0,10, où  $\sigma_\eta$  est la hauteur RMS des vagues et  $k^*$  est le nombre d'onde du premier mode propre du récipient.  $F(t)$  et  $V(t)$  sont acquis pendant 5 min et permettent de calculer la puissance moyenne  $P$  injectée dans le système (voir ci-dessous).  $\eta(t)$  est enregistré pendant 5 et 30 minutes, respectivement pour calculer son spectre et sa distribution de probabilités. La localisation exacte du capteur capacitif n'a pas d'influence sur le spectre. Le système est loin des conditions de résonance des modes de ballonnement engendrant des vagues fortement couplées avec l'écoulement en volume, comme des modes tournants [11]. Notons aussi que l'amplitude maximum du forçage est aussi inférieure au seuil d'éjection de gouttelettes.

L'insert de la figure 2 montre une acquisition typique de la hauteur des vagues  $\eta(t)$ .  $\eta(t)$  évolue de façon erratique avec le temps avec  $\langle \eta \rangle = 0$ . Son spectre est représenté sur la figure 2. Les deux pics visibles à basse fréquence (3,4 et  $4,5 \pm 0,2$  Hz) correspondent aux modes propres théoriques du récipient [12]. Ici, nous nous intéressons à la partie du spectre qui n'est pas directement excitée par le vibreur ( $f > 6$  Hz). À faibles amplitudes de forçage, aucune loi de puissance n'est observée et le régime de turbulence d'ondes n'apparaît pas. Pour des amplitudes suffisantes, deux lois de puissance peuvent être observées sur le spectre, qui correspondent aux régimes de turbulence d'ondes de gravité et de capillarité, respectivement à basse et haute fréquence. Des résultats similaires ont déjà été obtenues avec un forçage par batteur [5]. La fréquence de transition entre les deux régimes est de l'ordre de 20 Hz, ce qui correspond à  $\lambda \approx 1$  cm. Le spectre décroît fortement à haute fréquence ( $\gtrsim 100$  Hz) à cause de la dissipation. Quand l'amplitude de forçage croît, les lois de puissance restent parallèles entre elles dans les deux régimes. La figure 3 montre leurs exposants en fonction de la puissance injectée. Cette figure montre que les exposants des deux régimes sont indépendants des paramètres de forçage dans la gamme de puissances injectées que nous avons utilisées et valent  $-4,5 \pm 0,2$  pour le régime de gravité et  $-2,4 \pm 0,3$  pour le régime de capillarité. Ces résultats diffèrent des études précédentes utilisant des batteurs localisés [5, 6], qui montraient un exposant du spectre de gravité fortement dépendant des paramètres de forçage et prenant des valeurs



**Figure 2.** Spectres de hauteur des vagues pour différentes puissances injectées :  $P = 1,2; 14,6; 17,2; 23,6$  et  $28,5$  mW (de bas en haut). Le récipient est forcé entre 1 et 6 Hz (zone grise). Les courbes sont décalées verticalement pour la lisibilité du graphe. — (rouge) : fit en loi de puissance des spectres de gravité. - · (bleu) : fit en loi de puissance des spectres de capillarité. Insert : évolution typique de  $\eta(t)$ .



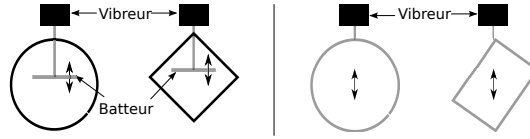
**Figure 3.** Exposants des spectres en lois de puissance de la fréquence des régimes de gravité et de capillarité en fonction de la puissance injectée, pour différentes fréquences de forçage : 1–5 Hz (■), 1–6 Hz (◆), et 1–7 Hz (●). Exposants théoriques : (—)  $-17/6$  capillarité et  $-4$  gravité. Insert : Fréquence de transition entre les deux régimes. Mêmes symboles que ci-dessus.

entre  $-7$  et  $-4$  pour la même gamme de puissances injectées [5]. Les exposants que nous obtenons ici diffèrent cependant sensiblement des valeurs théoriques. En effet, l'exposant du spectre de gravité est compris entre  $-4$  et  $-5$ . Ces valeurs correspondent respectivement au spectre prédit par la théorie de la turbulence faible  $S_{\eta}^{\text{grav}}(f) \propto \epsilon^{1/3} g f^{-4}$  [13] et au spectre prédit par Phillips  $\propto \epsilon^0 g f^{-5}$  pour des ondes fortement non linéaires [14].  $\epsilon$  est le flux d'énergie,  $f$  la fréquence et  $g$  l'accélération de la pesanteur. Une explication de cet écart proviendrait de la présence d'ondes fortement non linéaires dont la forme singulière de leur sommet se propage sans modification [15]. Le spectre d'ondes avec des crêtes singulières de dimension fractale  $D$  comprise entre 0 et 2 est de la forme  $\epsilon^{(2-D)/3} g^{1+D} f^{-3-D}$  [6]. Le spectre de gravité expérimental en  $f^{-4,5}$  correspondrait à  $D = 1,5$ . L'exposant du spectre de gravité est lui-aussi légèrement différent (cf. figure 3) de la prédiction de la théorie de la turbulence faible  $S_{\eta}^{\text{cap}}(f) \propto \epsilon^{1/2} (\gamma/\rho)^{1/6} f^{-17/6}$ , où  $\gamma$  et  $\rho$  sont la tension de surface et la masse volumique du fluide [16].

La fréquence de transition  $f_c$  entre les deux régimes est définie sur les spectres de la figure 2 par l'intersection entre les deux fits en loi de puissance. Elle est représentée sur l'insert de la figure 3 pour différents paramètres de forçage.  $f_c$  est indépendant des paramètres de forçage. Ce résultat diffère là encore des résultats précédents utilisant un forçage par batteur [5], où  $f_c$  prenait des valeurs entre 15 et 35 Hz suivant les paramètres de forçage, sur la même gamme de puissances injectées et la même taille de récipient.

En résumé, faire vibrer horizontalement le récipient contenant le fluide permet d'atteindre un régime continu de turbulence d'ondes indépendant des paramètres de forçage contrairement au forçage paramétrique ou avec des batteurs. La raison principale est que ce forçage est supposé plus homogène spatialement, et donc à ce qu'il satisfasse mieux cette hypothèse de la théorie, même si d'autres ne sont pas respectées, comme la faible non linéarité et un milieu de taille infini.

Pour observer le rôle de la forme du récipient et du type de forçage sur la turbulence d'onde gravito-capillaire, nous avons réalisé des expériences sur deux récipients différents : le récipient circulaire utilisé précédemment (22 cm de diamètre) et un récipient rectangulaire ( $15 \times 19$  cm<sup>2</sup>). Deux types de forçage ont été testés sur chaque récipient : un batteur localisé spatialement et un forçage horizontal du récipient, comme schématisé sur la figure 4. Pour éviter la prédominance des modes de propre et de ballonnement de la cuve rectangulaire, sa diagonale est alignée avec l'axe du vibreur. L'exposant de la loi de puissance en fréquence du régime de gravité est trouvé dépendre des paramètres de forçage : (i) avec un forçage par batteur quelle que soit la forme du récipient et (ii) avec la cuve rectangulaire quel que soit le type

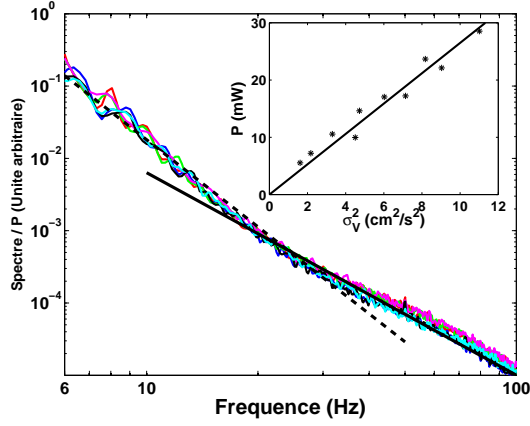


**Figure 4.** Dispositifs testés, vus de haut. Le vibreur fait vibrer un batteur horizontalement à la surface de l'eau (gauche) ou la totalité du récipient (droite). Les deux expériences sont réalisées sur une cuve circulaire et une cuve rectangulaire. Les parties grises (rouges) désignent les parties en mouvement, les noires celles immobiles.

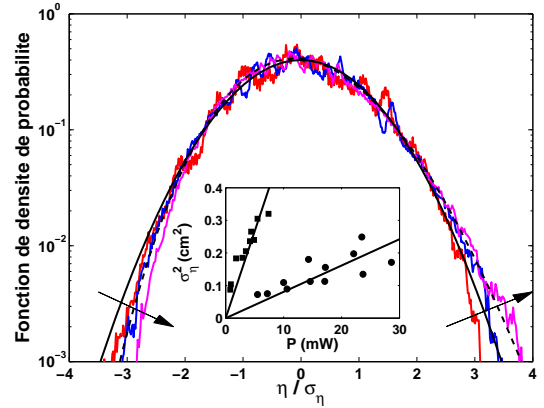
de forçage. L'exposant du spectre de gravité n'est indépendant des paramètres de forçage que lorsque le récipient est vibré horizontalement et qu'il est circulaire. Bien que la direction du forçage soit favorisée dans tous les cas, la cuve circulaire est plus isotrope que la cuve rectangulaire à cause des multiples directions de réflexion des ondes sur les parois circulaires. Par conséquent, en plus de l'homogénéité du forçage, l'isotropie est aussi nécessaire pour atteindre un spectre de gravité avec un exposant de la fréquence indépendante des paramètres de forçage.

Focalisons nous maintenant sur la dépendance du spectre avec la puissance injectée. La puissance injectée par le vibreur dans le système, corrigée de l'inertie, vaut  $\mathcal{P}(t) = (F - mdV/dt)V$ .  $m = 3,1$  kg est la masse du système en mouvement (y compris le fluide). La puissance injectée moyenne,  $P \equiv \langle \mathcal{P} \rangle$ , croît linéairement avec la variance de la vitesse imposée par le vibreur  $\sigma_V^2 \equiv \langle V^2 \rangle$  (cf. insert de la figure 5).  $\langle \cdot \rangle$  désigne la moyenne temporelle. Nous trouvons que le spectre de hauteur est proportionnel à  $P^{1 \pm 0,1}$  pour les deux régimes sur presque une décade en  $P$  (cf. figure 5). Cette loi d'échelle ne dépend pas de la géométrie du récipient utilisé. Une dépendance similaire en  $P^1$  a déjà été observé pour les deux régimes avec un forçage par batteur [5] sur la même gamme de  $P$ , pour le régime capillaire avec un forçage paramétrique [9] et pour la cascade inverse de la turbulence d'onde de gravité [17]. Cette loi d'échelle linéaire est en désaccord avec la théorie de la turbulence faible, qui prédit un spectre en  $\epsilon^{1/3}$  en régime de gravité et en  $\epsilon^{1/2}$  en régime de capillarité (cf. ci-dessus). Expérimentalement, le flux d'énergie moyen  $\epsilon$  est estimé par la mesure de  $P/(\rho\mathcal{S})$ , où  $\mathcal{S}$  est la surface mobile immergée. Il est probable qu'une partie de la puissance soit directement injectée dans le volume et dissipée par viscosité sans cascader dans le système d'ondes. Bien que ce mécanisme soit certainement présent, il est peu probable qu'il soit dominant. En effet, la loi de dépendance du spectre avec  $P$  est la même quel que soit le type de forçage (paramétrique, par batteur ou par vibration horizontale du récipient) alors que ces forçages engendrent des écoulements de volume très différents. Il est plus probable que seule une petite partie de la puissance générant des ondes à grande échelle cascade vers les petites échelles, le reste étant dissipé à grande échelle par la viscosité. Cette hypothèse est renforcée par des expériences récentes de déclin de la turbulence d'onde à la surface d'un fluide, qui ont montré que seulement une petite partie de la puissance initialement injectée dans le système d'ondes nourrit la cascade capillaire, alors que la majorité est dissipée à grande échelle [18]. Cette fraction inconnue de la puissance injectée qui est dissipée pourrait expliquer le désaccord avec la théorie de la turbulence faible sur la dépendance du spectre avec  $P$ . D'autres origines possibles de ce désaccord pourraient être liées aux effets de taille finie [5] ou à la présence de fortes fluctuations de la puissance injectée [10].

Enfin, la figure 6 montre la fonction de densité de probabilité (PDF) de la hauteur des vagues normalisée par sa valeur RMS,  $\eta/\sigma_\eta$ . À faible forçage, elle est symétrique et bien décrite par une fonction gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type 1. Pour des amplitudes suffisamment élevées, elle devient asymétrique, les crêtes hautes étant plus probables que les creux profonds, résultat conforme aux expériences de laboratoire utilisant des batteurs [5, 19, 20] ou aux observations océanographiques [21–23]. À fort forçage, la PDF tend vers une distribution de Tayfun (la première correction non linéaire de la gaussienne), qui s'écrit  $p[\tilde{\eta}] = \int_0^\infty \exp([-x^2 - (1-c)^2]/(2s^2)) / (\pi s c) dx$  où  $c = \sqrt{1 + 2s\tilde{\eta} + x^2}$ ,  $\tilde{\eta} = \eta/\sigma_\eta$  et  $s$  est la raideur moyenne des vagues [20, 24]. Aucun paramètre ajustable est utilisé ici. La forme de la PDF est similaire à celle obtenue avec un forçage par batteur. Nous trouvons aussi que  $\sigma_\eta^2 = aP$  pour les deux types de forçage avec différentes constantes de proportionnalité  $a$  (cf. insert de la figure 6). Pour un forçage par batteur, il a été montré que  $P$  était proportionnel à la surface immergée  $\mathcal{S}$  [5]. Ici, nous



**Figure 5.** Spectres de la hauteur des vagues rapportés à la puissance injectée moyenne  $P$  pour  $P = 10; 14,6; 17,2; 22,1; 23,6$  et  $28,5$  mW. Forçage entre 1 et 6 Hz. Ligne pointillée (resp. continue) : loi de puissance de pente  $-4$  (resp.  $-2,8$ ). Insert :  $P$  en fonction de  $\sigma_v^2$ . La pente de la droite continue est  $2,5 \text{ mWs}^2/\text{cm}^2$ . Forçage de 1 à 6 Hz.



**Figure 6.** Fonction de densité de probabilité de la hauteur des vagues pour  $P = 1,2$  (rouge),  $2,7$  (bleu) et  $14,8$  mW (magenta) (les flèches indiquent une puissance croissante), correspondant à  $s = 0,018; 0,037$  et  $0,075$ . (—) : gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type 1. (---) : distribution de Tayfun avec  $s = 0,075$ . Forçage de 1 à 6 Hz. Insert :  $\sigma_\eta^2$  en fonction de  $P$  pour un forçage de la totalité du récipient (●) ou par un batteur (■). Les pentes valent respectivement  $8,1$  et  $53 \text{ cm}^2/\text{W}$ . Forçage : 1–6 Hz.

avons vérifié que  $a \propto 1/\mathcal{S}$  pour les deux méthodes de forçage. En effet, le rapport des pentes dans l'insert de la figure 6 est égal (à 4% près) à l'inverse du rapport de la surface immergée du batteur et de la paroi immergée du récipient. Finalement, les résultats expérimentaux  $P \propto \sigma_\eta^2$  et  $S_\eta(f) \propto P^1$  sont cohérents puisque par définition,  $\int_0^\infty S_\eta(f) df = \sigma_\eta^2/(2\pi)$ .

En conclusion, nous avons introduit un nouveau type de forçage pour étudier la turbulence d'ondes gravito-capillaires. Avec ce forçage étendu spatialement, les lois de puissance des spectres de hauteur sont indépendantes des paramètres de forçage pour les deux régimes de gravité et de capillarité, contrairement aux résultats des expériences précédentes qui utilisaient un forçage localisé spatialement, où l'exposant du spectre de gravité dépendait des paramètres de forçage [5,6,25]. Notre étude suggère que cette dépendance pourrait être liée à l'inhomogénéité et à l'anisotropie du forçage localisé. L'exposant du spectre de gravité mesuré ici diffère légèrement de sa valeur prédite par la théorie de la turbulence faible à cause de la présence d'ondes fortement non linéaires. Enfin, une explication du désaccord observé avec la théorie sur la dépendance du spectre avec la puissance est aussi proposée et s'applique quel que soit le forçage utilisé.

Nous remercions M. Berhanu pour ses remarques constructives, et A. Lantheaume, C. Laroche et J. Servais pour leur assistance technique. B. I. remercie le CNRS pour avoir financé son stage de recherche postdoctoral. Ce travail a été financé par l'ANR Turbulon 12-BS04-0005.

## Références

1. É. FALCON, *Discret. Contin. Dyn. Syst. B*, **13**, 819 (2010).
2. A. NEWELL & B. RUMPF, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **43**, 59 (2011).
3. J. LAURIE, U. BORTOLOZZO, S. NAZARENKO & S. RESIDORI, *Physics Report*, **514**, 121 (2012).
4. V. E. ZAKHAROV, V. L'VOV & G. FALKOVICH, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I*, Springer-Verlag (1992); S. NAZARENKO, *Wave Turbulence*, Springer, Berlin (2010).
5. É. FALCON, C. LAROCHE & S. FAUVE, *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 094503 (2007).

6. P. DENISSENKO, S. LUKASCHUK & S. NAZARENKO, *Phys. Rev. Lett.*, **99**, 014501 (2007); S. NAZARENKO, S. LUKASCHUK, S. MCLELLAND & P. DENISSENKO, *J. Fluid Mech.*, **642**, 395 (2010).
7. E. HENRY, P. ALSTRØM & M. T. LEVINSSEN, *Europhys. Lett.*, **52**, 27 (2000); M. YU. BRAZHNIKOV *et al.*, *Europhys. Lett.*, **58**, 510 (2002).
8. D. SNOUCK, M.-T. WESTRA & W. VAN DE WATER, *Phys. Fluids*, **21**, 025102 (2009).
9. H. XIA, M. SHATS & H. PUNZMANN, *Europhys. Lett.*, **91**, 14002 (2010).
10. É. FALCON, S. AUMAÎTRE, C. FALCÓN, C. LAROCHE & S. FAUVE, *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 064503 (2008).
11. A. ROYON-LEBEAUD, E. J. HOPFINGER & A. CARTELLIER, *J. Fluid Mech.*, **577**, 467 (2007) et références citées.
12. H. LAMB, *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, London, 6th Ed. (1975).
13. V. E. ZAKHAROV & N. N. FILONENKO, *Sov. Phys. Dokl.*, **11**, 881 (1967).
14. O. M. PHILLIPS, *J. Fluid. Mech.*, **4**, 426 (1958); A. C. NEWELL & V. E. ZAKHAROV, *Phys. Lett. A*, **372**, 4230 (2008).
15. E. A. KUZNETSOV, *JETP Lett.*, **80**, 83 (2004).
16. V. E. ZAKHAROV & N. N. FILONENKO, *J. App. Mech. Tech. Phys.*, **8**, 37 (1967).
17. L. DEIKE, C. LAROCHE & É. FALCON, *Europhys. Lett.*, **96**, 34004 (2011).
18. L. DEIKE, M. BERHANU & É. FALCON, *Phys. Rev. E*, **85**, 066311 (2012).
19. M. ONORATO *et al.*, *Phys. Rev. E*, **70**, 067302 (2004); M. ONORATO *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 114502 (2009).
20. É. FALCON & C. LAROCHE, *Europhys. Lett.*, **95**, 34003 (2011).
21. M. K. OCHI, *Ocean waves*, Cambridge University Press (1998).
22. G. Z. J. FORRISTALL, *Phys. Oceanogr.*, **30**, 1931 (2000).
23. H. SOCQUET-JUGLARD *et al.*, *J. Fluid. Mech.*, **542**, 195 (2005).
24. M. A. TAYFUN, *J. Geophys. Res.*, **85**, 1548 (1980).
25. P. COBELLI, A. PRZADKA, P. PETITJEANS, G. LAGUBEAU, V. PAGNEUX & A. MAUREL, *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 214503 (2011).