



## 15<sup>ÈMES</sup> JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE

22 - 24 novembre 2016 - Brest

# Interactions résonantes à quatre vagues en bassin

*Observation of resonant interactions among surface gravity waves*

F. Bonnefoy<sup>1</sup>\*, F. Haudin<sup>2</sup>, G. Michel<sup>3</sup>, B. Semin<sup>3</sup>,  
T. Humbert<sup>4</sup>, S. Aumaître<sup>4</sup>, M. Berhanu<sup>2</sup>, et E. Falcon<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ecole Centrale de Nantes, LHEEA, UMR 6598 CNRS, Nantes

<sup>2</sup>Université Paris Diderot, MSC, UMR 7057 CNRS, Paris

<sup>3</sup>Ecole Normale Supérieure, LPS, UMR 8550 CNRS, Paris

<sup>4</sup>Univ. Paris-Saclay, CEA-Saclay, SPEC, DRF, UMR 3680 CNRS, Gif-sur-Yvette

### Résumé

Nous étudions expérimentalement les interactions résonantes d'ondes de gravité dans un bassin de houle en profondeur infinie. Nous générons pour cela une houle bi-chromatique dont les directions des composantes forment un angle aigu et dont nous contrôlons indépendamment la cambrure et la fréquence. Ces deux ondes mères interagissent non-linéairement et donnent naissance à une onde fille dont les propriétés (taux de croissance et courbe de réponse résonante) sont pleinement caractérisés par nos essais. Tous nos résultats à faible cambrure sont en accord quantitatif avec la théorie des interactions résonantes à quatre vagues de Longuet-Higgins [5]. Ces expériences étendent aux angles aigus les mesures faites jusqu'à présent dans la configuration de vagues perpendiculaires. Enfin, des essais à cambrure plus forte montrent l'apparition d'ondes supplémentaires qui proviennent d'interactions non-résonantes et qu'on étudie quantitativement à l'aide des équations de Zakharov.

### Summary

We experimentally study resonant interactions of oblique surface gravity waves in a large basin. Our results strongly extend previous experimental results performed mainly for perpendicular or collinear wave trains. We generate two oblique waves crossing at an acute angle, while we control their frequency ratio, steepnesses and directions. These mother waves mutually interact and give birth to a resonant wave whose properties (growth rate, resonant response curve and phase locking) are fully characterized. All our experimental results at low steepness are found in good quantitative agreement with four-wave interaction theory (Longuet-Higgins [5]) with no fitting parameter. Off-resonance experiments are also reported and the relevant theoretical analysis is conducted and validated. Waves with stronger steepness produce new daughter waves that are explained by means of Zakharov theory.

---

\*Adresse email pour correspondance : felicien.bonnefoy@ec-nantes.fr

# 1 Contexte et objectifs :

Les interactions non-linéaires sont au cœur des échanges d'énergie prenant place lors de la propagation des vagues océaniques. Elles agissent comme terme source dans l'évolution du spectre de houle, au même titre que l'action du vent, la dissipation par moutonnement, le déferlement bathymétrique... En grande profondeur, les effets du troisième ordre (ou interactions à quatre vagues) induisent en effet des transferts d'énergie, faibles, entre les composantes du spectre, ce qui produit toutefois des modifications majeures du spectre en raison des grandes distances de propagation. D'importantes études ont été consacrées aux interactions à 4 vagues résonantes pour lesquels les taux de transfert sont maximaux [8, 5] mais relativement peu d'un point de vue expérimental ([6, 7, 9, 1]). Les conditions de résonance à 4 vagues s'écrivent  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$  et  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4$  où on note  $\omega_i$  la pulsation des ondes et  $\mathbf{k}_i$  leur vecteur d'onde (On note (1,2,3,4) le quartet d'ondes correspondant). Nous étudions plus particulièrement ici le cas d'une résonance dégénérée où les ondes 1 et 2 sont identiques ([5, 6, 7, 1]). Si on se place en milieu océanique considéré infini et si les deux ondes 1 et 3 sont initialement présentes seules (ondes mères) alors l'onde 4 de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_4 = 2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3$  apparaît naturellement et si sa pulsation vérifie  $\omega_4 = 2\omega_1 - \omega_3$  alors le quartet (1,1,3,4) est résonant et l'amplitude de l'onde fille croît linéairement au cours du temps comme l'a montré Longuet-Higgins [5]. Dans ce cas dégénéré, pour une onde 1 donnée ( $\mathbf{k}_1$ ), le lieu dans le plan  $(k_x, k_y)$  des vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_3$  qui forment avec  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_4 = 2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3$  un quartet d'ondes résonant, est montré sur la figure 1 à gauche en trait plein noir : il s'agit de la figure de huit de Phillips [8].

Pour des ondes générées en bassin cette fois, l'amplitude  $a_4$  de l'onde fille croît linéairement en fonction de la distance  $d$  au batteur cette fois, suivant une loi théorique ([5])

$$a_4^{res} = \varepsilon_1^2 \varepsilon_3 d G(\theta) , \quad (1)$$

où  $\varepsilon_i$  est la cambrure de l'onde  $i$  et  $G$  le taux de croissance qui dépend de la position sur la figure de huit de Phillips, autrement dit de l'angle  $\theta$  entre les 2 ondes mères résonantes. Le taux  $G$  est montré sur la figure 1, à droite; on remarque un maximum autour de  $\theta = \theta_m = 25^\circ$ . Dans les années soixante, des expériences historiques [6, 7] ont validé cette théorie en bassin avec la vérification du taux correspondant  $G = 0.42$ . Ce type d'essais a été repris aussi par Tomita [9]. A chaque fois, dans un bassin rectangulaire équipé de deux batteurs installés sur des murs adjacents, chaque batteur générant une onde mère. Ces dernières se propagent donc perpendiculairement et l'onde fille apparaît avec un angle de 9 degrés environ par rapport à l'onde mère la plus courte.

Les expériences que nous présentons dans ce papier sont destinées dans un premier temps à étendre la validation de la théorie des interactions résonantes de Longuet-Higgins [5] pour des directions de propagation différentes du seul cas perpendiculaire étudié à l'origine [6, 7, 9]. On en présente ici les principaux résultats qui valident la théorie à faible cambrure ([1]). Dans un second temps, des essais à grande distance ou grande cambrure montrent les limites de ladite théorie et l'utilisation de la théorie de Zakharov [10] apporte le cadre théorique nécessaire à la compréhension des interactions observées (voir Annexe).

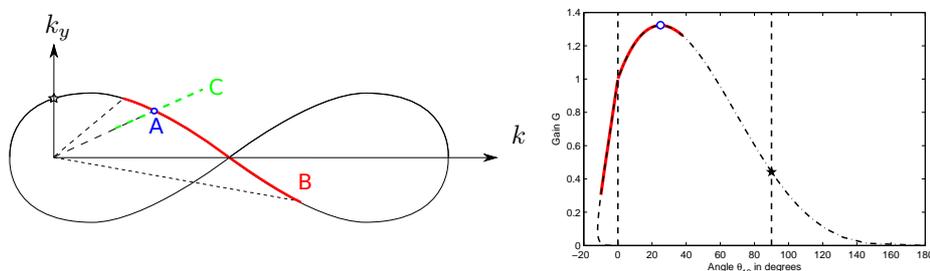


FIGURE 1 – A droite : lieux des essais expérimentaux sur la figure de huit de Phillips : expériences historiques (étoile noire) et expériences présentées (jeu A : point bleu, jeu B : trait plein rouge, jeu C : trait interrompu vert). A gauche : Taux de croissance  $G(\theta)$  de l'onde fille en fonction de l'angle  $\theta$  entre les ondes mères à la résonance : trait mixte noir (sont superposés les lieux précédents).

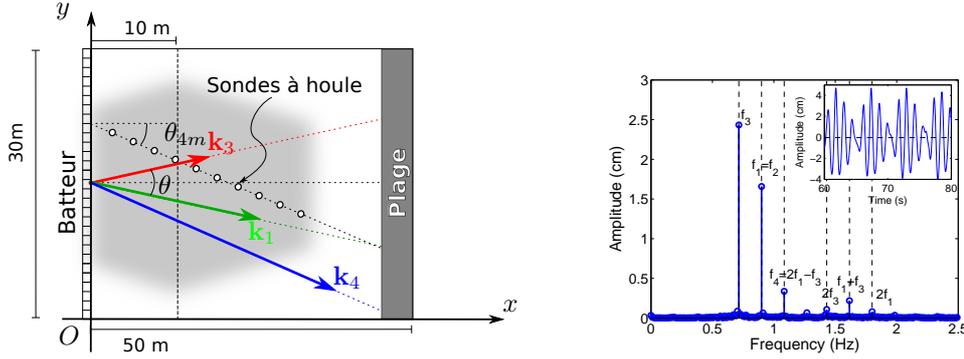


FIGURE 2 – À gauche : bassin de houle de l’ECN (zone grisée = zone homogène, cercles = sondes à houle et flèches = vecteurs d’onde, (onde 1 au milieu en vert, onde 3 en haut en rouge et onde 4 en bas en bleu)), à droite : Spectre fréquentiel de l’élévation mesurée à  $d = 21.5$  m. Les traits verticaux correspondent aux fréquences :  $f_3$ ,  $f_1$ ,  $f_4$ ,  $2f_3$ ,  $f_1 + f_3$ , et  $2f_1$ . Encart : évolution temporelle de l’élévation  $a(t)$ . Conditions d’essai  $r = r_m$ ,  $\theta = \theta_m$  et  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.05$ .

## 2 Expériences en bassin :

Nous générons des ondes bi-chromatiques (ondes mères 1 et 3) dans le bassin de houle de l’ECN de dimension  $50 \times 30 \times 5$  m ; nous observons l’apparition de l’onde fille de pulsation  $2\omega_1 - \omega_3$  en raison de l’interaction résonante dégénérée. L’angle  $\theta$  entre les ondes mères est varié entre  $-10^\circ$  et  $+40^\circ$  de manière à étendre les résultats expérimentaux précédents, obtenus pour  $\theta = 90^\circ$  uniquement. Dans la gamme d’angle visée, on peut générer les houles bi-chromatiques dans le bassin de l’ECN grâce au batteur segmenté et de plus, le taux de croissance est élevé dans cette gamme, ce qui conduit à des amplitudes de l’onde fille facilement mesurables à distance suffisante (5-20 m) du batteur.

Un réseau linéaire constitué de 10 sondes à houle résistives régulièrement espacées est placé dans le bassin, couvrant une longueur totale de 25 m. La figure 2 montre à gauche le schéma du bassin avec les vecteurs d’onde des ondes mères générées lorsque  $\theta = \theta_m = 25^\circ$ , ainsi que la position des sondes résistives. Le repère est donné sur la figure pour l’orientation des vagues. Le réseau de sondes est aligné suivant la direction de l’onde fille lorsque  $\theta = \theta_m$ . Dans ce cas là, les ondes mères sont générées avec des directions  $\pm 12.5^\circ$  et le réseau doit être placé avec une angle de  $-23^\circ$  dans le bassin, comme sur la figure 1 à droite.

Pour le batteur, on contrôle la fréquence des ondes mères, leur direction ainsi que leur amplitude  $a_i$  près du batteur, c’est-à-dire leur cambrure initiale  $\varepsilon_i = k_i a_i$ . Les fréquences sont choisies dans une gamme adaptée au bassin et permettant des distances de propagation importantes. La valeur  $f_1 = 0.9$  Hz est retenue, celle de  $f_3$  étant dépendante de l’angle  $\theta$ . La direction des ondes mères est choisie de manière à ce que primo l’angle entre les deux ondes mères soit l’angle  $\theta$  visé et deuxio que l’onde fille attendue se propage dans la direction du réseau de sonde (afin de bénéficier d’une distance d’interaction importante). Lors des essais pour un angle  $\theta$  jusqu’à  $40^\circ$  entre les ondes mères, on trouve avec l’aide de la figure de huit de Phillips que celles-ci doivent avoir une direction jusqu’à  $40^\circ$  par rapport à l’axe principal du bassin.

La génération de ces vagues bi-chromatiques obliques est assurée à l’aide du batteur segmenté multi-directionnel composé de 48 volets indépendants. Ces volets sont contrôlés avec la méthode de Dalrymple [2] tirant avantage des réflexions sur les murs. Cette phase est indispensable pour générer des houles obliques avec des directions atteignant  $40^\circ$  sur une zone homogène étendue au centre du bassin. Sur la figure 2 à gauche, la zone grisée correspond à la zone homogène où l’amplitude des vagues est uniforme. En dehors de cette zone, les réflexions sur les murs créent des ondes partiellement stationnaires. On place les sondes à l’intérieur de cette zone.

Dans ce papier, on présente deux catégories d’essais dites pour l’instant à *faible cambrure* et à *forte cambrure*. Les essais de faible cambrure ( $ka \simeq 0.05$ ) sont divisés en 3 jeux d’essais A, B et C. Le jeu noté A correspond au taux maximum de croissance ( $\theta = \theta_m$ ). Il s’agit du point A en bleu sur la figure de huit de Phillips qui est montrée sur la figure 1 à gauche. Le jeu B regroupe les essais dont les ondes mère en condition résonante sont générées pour des angles variables. Sur la figure 1, à gauche, un trait plein en rouge matérialise ces essais. Le jeu C enfin correspond à des ondes hors-résonance. On a choisi pour simplifier de conserver l’onde mère 1 ( $f_1 = 0.9$  Hz et  $\varepsilon_1 = 0.07$ ) et de varier l’onde mère 3 : la direction

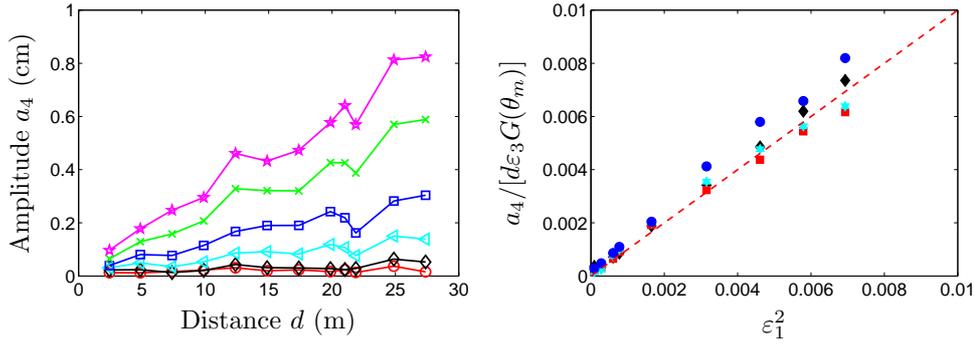


FIGURE 3 – Amplitude de l’onde résonante  $a_4$  pour  $\epsilon_3 = 0.05$  et  $r = r_m$ . A gauche : amplitude  $a_4$  selon la distance,  $d$ , pour différentes  $\epsilon_1 \times 10^3 = 10, 17, 28, 41, 56, 68$  (du bas vers le haut). A droite : amplitude normalisée  $a_4/[d\epsilon_3 G(\theta_m)]$  en fonction de  $\epsilon_1^2$  pour différentes distances  $d = 9.9$  (◆),  $14.9$  (■),  $19.9$  (\*), et  $24.9$  (●) m. La ligne en tiret, de pente un, est le résultat théorique de l’équation (1).

$\theta = \theta_m$  est fixe mais la fréquence de l’onde 3 est variée entre 0.9 et 1.6 (trait interrompu vert sur la figure 1 à gauche).

A droite de la figure 2, on montre en encart un exemple d’élévation mesurée sur une des sondes du réseau employé, sur lequel on observe un signal à battement, typique d’une houle bi-chromatique. Le spectre d’amplitude correspondant, estimé par une transformée de Fourier discrète, est tracé également sur la figure 2 à droite. On observe des pics correspondants aux ondes mères de fréquence  $f_1$  et  $f_3$ , aux harmoniques du second ordre ( $2f_1$ ,  $f_1 + f_3$  et  $2f_3$ ) et à l’onde fille de fréquence  $f_4 = 2f_1 - f_3$ .

Les essais à forte cambrure reprennent les mêmes conditions que les jeux A et C précédents. La cambrure des ondes mères est cependant variée dans une gamme allant jusqu’à  $ka = 0.14$ .

### 3 Résultats

En terme d’analyse dimensionnelle, l’équation (1) montre que la cambrure moyenne définie par  $\epsilon = (\epsilon_1^2 \epsilon_3)^{1/3}$  est le paramètre de cambrure significatif de l’interaction résonante dégénérée considérée. Les autres paramètres adimensionnels sont définis comme le rapport des cambrures des ondes mères  $\beta = \epsilon_1/\epsilon_3$ , la distance adimensionnelle  $k_4 d$ , la direction de chaque onde. On définit ici la distance non-linéaire  $k_4 d \epsilon^2$ .

D’après l’équation (1), on s’attend à ce que l’amplitude de l’onde 4 évolue comme  $\epsilon$  sur des distances non-linéaires caractéristiques de l’ordre de  $k_4 d \epsilon^2$ .

#### 3.1 A faible distance non-linéaire ( $k_4 d \epsilon^2 \ll 1$ )

##### 3.1.1 Au maximum du taux de croissance à résonance

On considère dans un premier temps le jeu A d’essais au maximum du taux de croissance où les ondes bi-chromatiques vérifient  $f_1/f_3 = r_m = 1.258$  et  $\theta = \theta_m = 25^\circ$ . A gauche sur la figure 3, le relevé de l’amplitude de l’onde 4 le long du réseau de sonde montre que l’onde fille croît linéairement en amplitude avec la distance  $d$  depuis le batteur, quelle que soit la cambrure. Les variations de pente illustre le fait que le taux de croissance dépend de la cambrure initiale de l’onde 1.

Plus en détail, on étudie comment le taux de croissance de l’onde fille varie en fonction de  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_3$ . Sur la figure 3 à droite, on vérifie que l’évolution de l’amplitude  $a_4$  de l’onde fille est proportionnelle à la cambrure de l’onde 1 mère au carré, comme attendu d’après l’équation (1).

L’étude de l’évolution de  $a_4$  en fonction de la cambrure de l’onde 3 mère montre une dépendance linéaire en  $\epsilon_3$ , comme attendu (non montré ici). De même, les essais mettent également en évidence un verrouillage de phase de l’onde fille dont la phase  $\phi_4$  s’exprime à partir de celles des ondes mères :  $\phi_4 = -\pi/2 + 2\phi_1 - \phi_3$  (non montré ici).

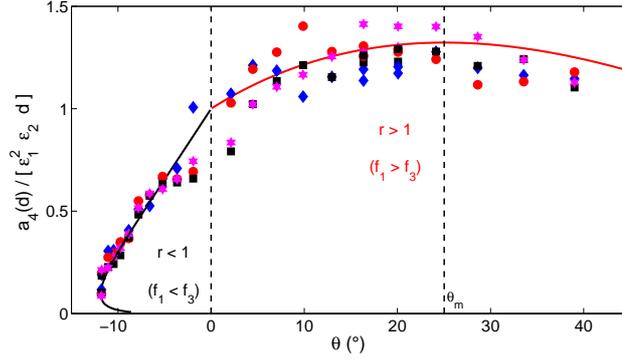


FIGURE 4 – Amplitude normalisée  $a_4$  en fonction de l’angle  $\theta$  pour différentes sondes : distance  $d = 7.8$  (losange), 9.9 (rond), 11.9 (carré), et 13.8 (\*) m. Trait plein : courbe de résonance théorique  $G[\theta(r)]$  pour  $r < 1$  (noir) et  $r > 1$  (rouge) d’après [5].  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.07$ .  $f_1 = 0.9$  Hz.  $0.83 \leq r \equiv f_1/f_3 \leq 1.38$ .

### 3.1.2 Pour des angles $\theta$ aigus

Dans un deuxième temps, avec la série B d’essais, on étudie le taux de croissance le long de la figure de huit (trait plein rouge sur la figure 1 à gauche). On montre sur la figure 4 l’amplitude de l’onde 4, qu’on normalise par le facteur  $\varepsilon_1^2 \varepsilon_3 d$  d’après les observations précédentes, en fonction de l’angle  $\theta$  entre les ondes mères. Les courbes en trait plein sont les prédictions théoriques de Longuet-Higgins [5]. On observe que sur toute l’étendue d’angle  $\theta$  testée, l’accord est très bon entre mesures et théorie.

### 3.1.3 Hors résonance

Enfin, la série C est constituée d’expériences hors-résonance. Dans ce cas, on génère deux ondes mères dont les vecteurs d’onde ne tombent pas sur la figure de huit de Phillips ; l’interaction dégénérée n’est pas en résonance (trait vert interrompu sur la figure 1 à gauche). Lors des essais, on observe qu’une onde fille apparaît dans le bassin ; son amplitude croît spatialement. On constate qu’elle prend automatiquement la pulsation  $\omega_4 = 2\omega_1 - \omega_3$ , il y a donc résonance en fréquence ou accord, sa direction n’étant a priori pas fixée.

Les vecteurs d’onde eux ne sont pas a priori accordés ; le désaccord en vecteur d’onde vaut  $\Delta \mathbf{k} = 2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4$ . On peut supposer que l’onde fille observée en bassin est celle croissant le plus rapidement et que cette situation correspond au désaccord minimum. Autrement dit, l’onde mère se propage selon  $2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3$  et le désaccord en nombre d’onde vaut  $\Delta k = |2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3| - k(2\omega_1 - \omega_3)$ .

On cherche à caractériser le taux de croissance de l’onde fille qui, comme le quartet est désaccordé, suit, non pas l’équation (1) mais une nouvelle formule

$$a_4 = \varepsilon_1^2 \varepsilon_3 d G(r, \theta) \left| \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta k d}{\frac{1}{2} \Delta k d} \right| = a_4^{res} \left| \text{sinc} \frac{\Delta k d}{2} \right|. \quad (2)$$

On voit apparaître le facteur de désaccord  $\left| \text{sinc} \frac{\Delta k d}{2} \right|$ . Cette formule (2) a été obtenue historiquement par Longuet-Higgins ([5]), toutefois avec des arguments faux basés sur une superposition d’onde liée et d’onde libre générée par le batteur, de même amplitude. On peut établir rigoureusement cette expression (2) à l’aide de l’équation de Zakharov (voir [1] et le Supplementary Material qui contient les détails théoriques).

La figure 5 montre à droite l’évolution de l’amplitude normalisée définie par  $a_4 / (\varepsilon_1^2 \varepsilon_3 d G(r_m))$  en fonction du désaccord  $\Delta k$  pour différentes distances  $d$ . Pour toutes les distances, on observe que le taux de croissance de l’onde fille diminue à mesure que le désaccord augmente. La bande passante dans laquelle le taux de croissance est significatif décroît à mesure qu’on s’éloigne du batteur, comme attendu d’après le terme sinc de l’équation (2). En suivant cette équation (2), on renormalise toutes ces courbes en normant le désaccord  $\Delta k$  par la demie-distance  $d/2$  sur la figure 5 à droite. On observe alors que toutes les courbes se recouvrent sur le sinus cardinal : le facteur de désaccord est correctement prédit par [5].

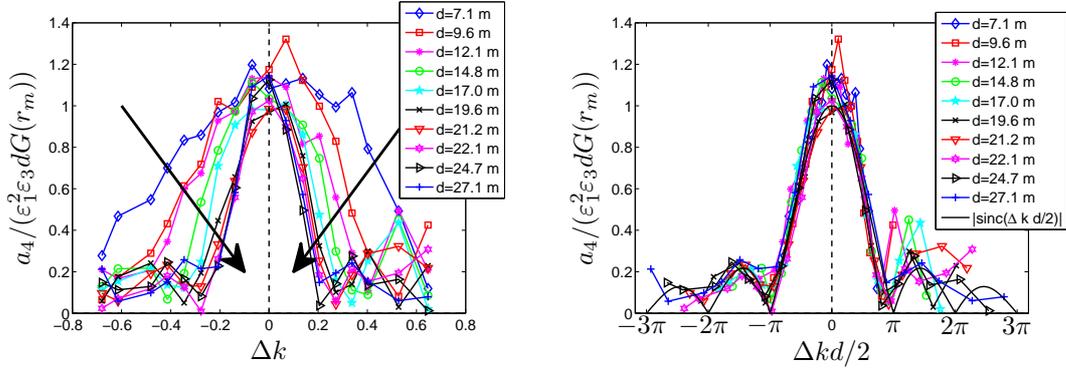


FIGURE 5 – Amplitude normalisée  $a_4/(\varepsilon_1^2\varepsilon_3dG(r_m))$  mesurée à différentes distances  $d$  hors-résonance ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.07$  et  $f_1 = 0.9$  Hz.). A gauche :  $a_4$  normalisée en fonction du désaccord  $\Delta k$ . Les symboles correspondent à différentes distances, de  $d = 7$  à  $27$  m (voir les flèches). A droite :  $a_4$  normalisée en fonction du désaccord normalisé  $\Delta kd/2$ . Ligne pleine : fonction  $|\text{sinc}\Delta kd/2|$  d’après l’estimation de [5] ou l’équation (2).

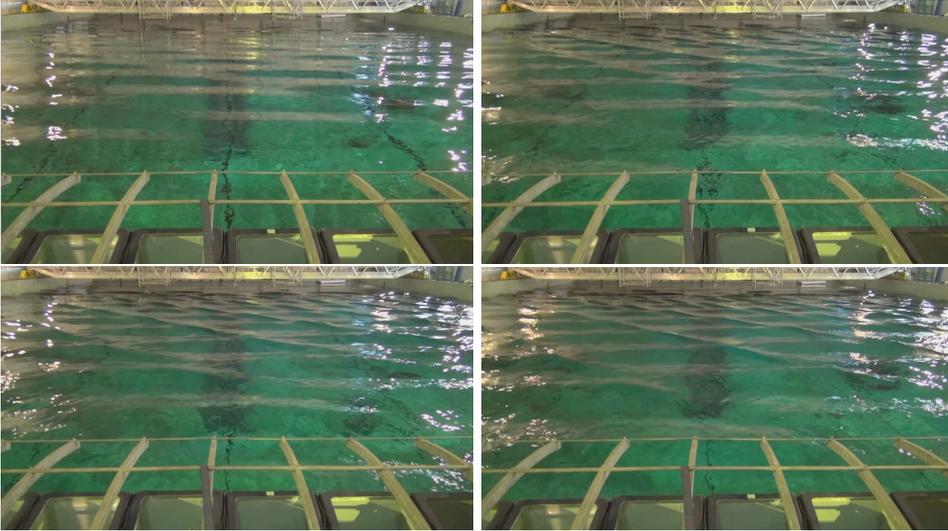


FIGURE 6 – Vue du bassin pour des ondes en interaction résonante dégénérée. D’en haut à gauche à en bas à droite, les cambrures sont  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.05, 0.1, 0.12$  et  $0.14$  (les autres paramètres sont les mêmes  $f_1 = 0.9$  Hz,  $r = r_m$  et  $\theta = \theta_m$ ).

### 3.2 A grande distance non-linéaire ( $k_4 d \varepsilon^2 \simeq 1$ )

Les résultats précédents valident la théorie de Longuet-Higgins [5], obtenue par une décomposition en série de perturbation au troisième ordre en cambrure. Les expériences présentées concernent des houles mères de faible cambrure pour lesquelles, compte tenu des distances parcourues, les échanges d'énergie restent faible et ne modifient pas l'amplitude des ondes mères. Cela constitue justement une hypothèse faite par [5], à savoir que les ondes mères sont d'amplitude constante.

A grande distance ou à forte cambrure, les transferts d'énergie entre les ondes du quartet viennent cependant modifier les résultats précédents.

Les mêmes essais ont donc été réalisés avec des cambrures plus fortes (jusqu'à  $ka = 0.15$  où les premiers déferlements apparaissent) de manière à étudier les modifications apportées. Pour simplifier, on présente ici uniquement les résultats tirés des essais avec des ondes mères de cambrure égale  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$  ( $\beta = 1$ ). On présente dans la suite les observations faites avec notamment un pompage de l'onde mère  $\mathbf{k}_1$  qui voit son amplitude diminuer au fur et à mesure de la propagation, une perte du verrouillage de phase du fait des vitesses de phase non-linéaires ainsi que l'apparition de composantes supplémentaires, en  $3f_1 - 2f_3$  notamment, dues à des interactions à 4 vagues en quasi-résonance avec l'onde fille et l'une des ondes mères.

La figure 6 montre quatre vues du bassin pour différentes cambrures ; ce sont des photos prises depuis le batteur lors de quatre essais en résonance dégénérée à cambrure  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.05, 0.1, 0.12$  et  $0.14$  (toute chose égale par ailleurs). En haut à gauche pour la cambrure faible, on peut observer uniquement les ondes mères superposées, l'amplitude de l'onde fille restant faible y compris à grande distance du batteur. Ensuite, lorsque la cambrure augmente, on voit apparaître des crêtes de plus en plus inclinées sur l'image : il s'agit en fait de paquets de vagues obliques se propageant avec une direction importante visible sur la figure, et à l'intérieur desquels les vagues se propagent avec une direction moins grande (les crêtes sont peu visibles sur la figure). Ces paquets sont formés de la superposition de plusieurs ondes filles comme on le verra par la suite.

Dans un premier temps, nous étudions en détail l'effet de la cambrure sur l'onde mère 1 et sur l'onde fille 4.

### 3.3 Pompage de l'onde 1

L'étude théorique du problème permet de trouver une solution pour l'évolution de l'onde mère aux distances intermédiaires  $k_4 d \varepsilon^2 < 1$  en tenant compte de l'évolution linéaire de l'amplitude de l'onde fille. On obtient la relation quadratique suivante

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{10}} = 1 - A \left( \frac{\varepsilon_{30}}{\varepsilon_{10}} \right)^{2/3} (k_4 d \varepsilon^2)^2 \quad (3)$$

où

$$B = \left( \frac{T_{1134}}{k_1^3} \right)^2 \frac{k_1}{k_4} \quad \text{et} \quad A = B \left( \frac{k_1}{k_3} \right)^{5/2}$$

avec l'échelle de distance  $D = \varepsilon^2 d$  où  $\varepsilon = (\varepsilon_{10}^2 \varepsilon_{30})^{1/3}$ . Cela signifie que l'onde mère voit son énergie diminuer au cours de la propagation en raison du transfert vers l'onde fille ; on parle de pompage par l'onde fille. Il est à noter qu'on trouve de manière analogue que l'onde mère 3 voit elle son amplitude augmenter (non montré ici). La figure 7 montre à gauche l'évolution spatiale de la cambrure de l'onde 1, avec les échelles de normalisation tirée de l'équation (3). On a ajouté une ligne en pointillé noir pour l'hypothèse de Longuet-Higgins [5], une ligne en pointillé rouge pour la formule approchée (3) et une ligne en trait plein noir pour la solution numérique de l'équation de Zakharov (voir Annexe). On constate que les courbes expérimentales de l'évolution spatiale de l'onde 4 suivent la loi approchée jusqu'à  $k_4 d \varepsilon^2 = 0.6$  puis la loi n'est plus suffisante pour décrire la pratique. La solution numérique des équations de Zakharov (ligne en trait plein noir sur la courbe) montre que l'amplitude de l'onde mère 1 passe par un minimum d'amplitude puis que le transfert s'inverse jusqu'à revenir à la situation de départ (récurrence). La taille finie du bassin utilisé ne permet pas, pour les longueurs d'onde choisies d'observer plus loin le comportement de l'onde mère 1. L'amplitude de l'onde mère 1 diminuant, on s'attend à ce que le taux de croissance de l'onde fille 4 diminue également jusqu'à un certain équilibre.

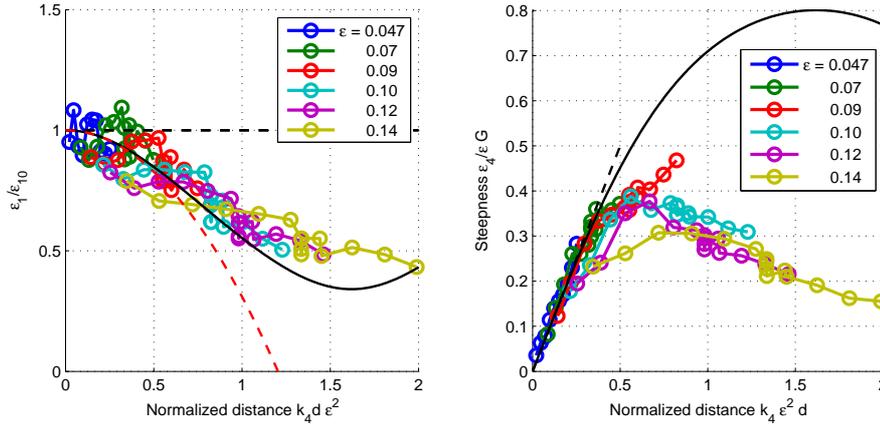


FIGURE 7 – Evolution des cambrures mesurées en condition de résonance avec  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$  (voir la légende). A gauche : cambrure mesurée de l’onde mère et prédictions théoriques (en tiret noir : théorie de Longuet-Higgins, en tiret rouge : modèle de Zakharov à distance intermédiaire, en trait plein noir : solution numérique des équations de Zakharov). A droite : cambrure mesurée de l’onde fille et oprédications théoriques (en tiret noir : théorie de Longuet-Higgins, en trait plein noir : solution numérique des équations de Zakharov).

### 3.4 Arrêt de la croissance de l’onde fille

La figure 7 à droite montre par exemple l’amplitude de l’onde fille normalisée par l’échelle caractéristique  $G\varepsilon$  en fonction de la distance non-linéaire  $k_4d\varepsilon^2$ . On a ajouté en pointillé noir la prédiction théorique de Longuet-Higgins [5] et en trait plein noir la solution numérique de l’équation de Zakharov (voir Annexe). On observe que les mesures à faible cambrure  $\varepsilon < 0.08$  se superposent et collent aux prédictions pour les distances non-linéaires inférieures à 0.3. On note toutefois une diminution du taux de croissance à plus grande distance non-linéaire.

A droite sur la figure 7, sont reportés également des résultats à plus forte cambrure ( $\varepsilon > 0.08$ ). On observe encore que les courbes suivent la première bissectrice jusqu’à la distance non-linéaire  $k_4d\varepsilon^2 = 0.3$  : il s’agit du comportement faiblement non-linéaire décrit plus haut. Pour des distances non-linéaires plus grandes, les courbes se séparent. Le comportement à grande distance non-linéaire dépend donc de la cambrure des ondes mères. On voit aussi que l’écart à la solution numérique de l’équation de Zakharov (solution auto-similaire) est nettement marqué. La théorie de Zakharov, qui prédit le pompage de l’onde 1, ne suffit pas à expliquer la diminution du taux de croissance. Il se produit donc un échange d’énergie non pris en compte dans les calculs or ces derniers sont basés sur l’hypothèse que seules les trois ondes 1, 3 et 4 sont présentes.

### 3.5 Résonances en cascade

Une analyse fréquentielle des essais à forte cambrure révèle l’apparition de nouvelles ondes aux fréquences  $f_5 = 3f_1 - 2f_3$  et  $f_6 = 4f_1 - 3f_3$ . Par exemple la figure 8 montre à gauche l’amplitude de Fourier relevée sur l’élévation mesurée à 21.5 m du batteur, pour un essai à la résonance au maximum du taux de croissance et pour des cambrures fortes égales  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.14$ . On identifie un premier groupe de 5 pics principaux avec dans l’ordre des fréquences des ondes mères  $f_3, f_1$  générées au batteur puis de 3 ondes filles  $f_4, f_5 = 2f_4 - f_1 = 1.27$  Hz et  $f_6 = 2f_4 - f_3 = 1.45$  Hz : les ondes 5 et 6 sont d’amplitude supérieure à l’onde 4 pour cet essai et à cette distance. On peut noter que les ondes filles en cascade prennent des fréquences du type  $Nf_1 - (N - 1)f_3$  avec par exemple  $N = 3$  pour l’onde 5 et  $N = 4$  pour l’onde 6. Un second groupe comprend les ondes liées du second ordre  $2f_3 = 1.42$  Hz,  $f_1 + f_3$ , et  $2f_1$ . On peut noter que le pic à  $f_1 + f_3$  indiqué par une flèche est en fait double : l’un des pics est effectivement  $f_1 + f_3 = 1.61$  Hz et le second correspond à l’onde 7  $f_7 = 5f_1 - 4f_3 = 1.64$  Hz (la fenêtre temporelle d’analyse dure 87 s et permet de résoudre ces 2 pics proches).

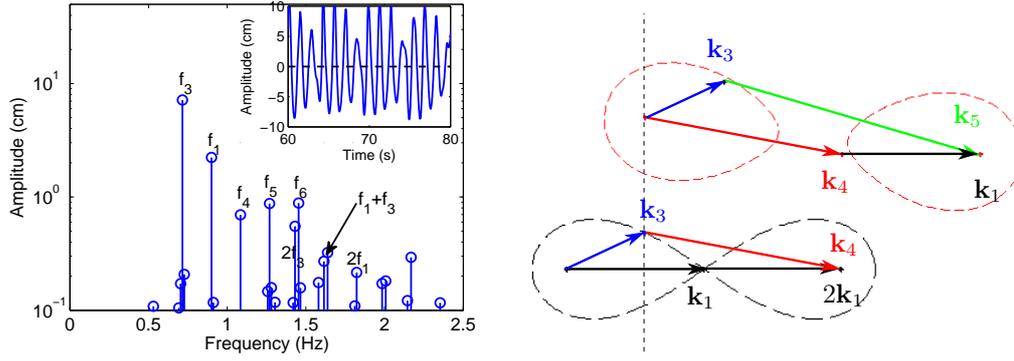


FIGURE 8 – A gauche : Spectre fréquentiel de l’élévation  $\eta(t)$ , mesurée à  $d = 21.5$  m. Les traits verticaux correspondent aux fréquences :  $f_3, f_1, f_4, f_5 = 2f_4 - f_1, 2f_3, f_6 = 2f_4 - f_3, f_1 + f_3$ , et  $2f_1$ . Encart : évolution temporelle de l’élévation  $\eta(t)$ . Conditions d’essai  $r = r_m, \theta = \theta_m$  et  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.14$ . A droite : Figures de huit pour décrire les interactions en cascade. En bas, figure de huit noire horizontale : quartet initial (1,1,3,4) (vecteurs d’onde noir, bleu et rouge) et en haut, figure de huit rouge inclinée : quartet (1,4,3,5) (vecteurs d’onde noir, rouge, bleu et vert).

## 4 Discussion :

L’existence des ondes 5 et 6 s’explique par le fait que l’interaction à 4 vagues au sein du quartet initial couple les ondes du quartet avec des ondes hors du quartet. De nouveaux quartets dégénérés appelés quartets ultérieurs ou quartets de cascade apparaissent donc lors de la propagation. Ainsi, l’onde 5 apparaît comme l’onde fille du quartet ultérieur (1,4,3,5) et l’onde 6 du quartet ultérieur (4,4,3,6). La figure 8 à droite montre en exemple les figures de huit intervenant pour l’onde 5. On trace la première figure de huit, noire et horizontale, pour le quartet résonant (1,1,3,4) de départ (vecteurs d’onde  $2\mathbf{k}_1$  (horizontal et noir),  $\mathbf{k}_3$  (bleu) et  $\mathbf{k}_4$  (rouge)). L’angle entre  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_3$  est  $25^\circ$ , ce qui correspond au taux de croissance résonant maximum. Ensuite, on trace une seconde figure de huit pour le quartet de cascade (1,4,3,5) produisant l’onde 5 (en rouge, inclinée et décalée vers le haut pour plus de clarté). Il met en jeu les vecteurs d’onde  $\mathbf{k}_1$  (noir),  $\mathbf{k}_4$  (rouge),  $\mathbf{k}_3$  (bleu) et  $\mathbf{k}_5$  (vert). Comme ce quartet (1,4,3,5) n’est pas dégénéré, on peut voir que la figure de huit comporte deux parties disjointes. Dans ce nouveau quartet, le vecteur d’onde  $\mathbf{k}_3$  tombe proche de la figure de huit (le quartet est quasi-résonant) dans une zone où le taux de croissance de l’onde fille concernée est élevé. On trouve que l’angle entre  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_5$  est de  $-16^\circ$  ; les ondes 4 et 5 ont des directions voisines. L’explication est similaire pour l’onde 6 pour former le quartet de cascade (4,4,3,6) : l’onde 6 forme un angle de  $-19^\circ$  avec l’onde 1.

On montre sur la figure 9 la mesure des cambrures des ondes, 5 à gauche et 6 à droite, pour des essais à cambrures égales variables à la résonance du quartet (1,1,3,4). On observe expérimentalement (lignes avec des ronds) une croissance significative des ondes de cascade 5 et 6, en retard par rapport à l’onde 4, et avec un taux de croissance comparable à celui de l’onde fille 4. Cette croissance forte se produit jusqu’à  $k_4 d \varepsilon^2 = 0.7$  puis les cambrures des ondes 5 et 6 saturent à des valeurs proches de  $0.5\varepsilon$ .

Pour confirmer la capacité de la théorie de Zakharov de décrire quantitativement les interactions en cascade observée, on intègre numériquement les équations de Zakharov (voir Annexe) et on trace les courbes sans point qui sont les cambrures prédites par l’équation de Zakharov utilisée en incluant les quartets (1,4,3,5) et (4,4,3,6). On observe que pour l’onde 5 (figure 9 à gauche), la cambrure mesurée lors des essais est bien reproduite lorsque  $\varepsilon < 0.1$  en termes de retard relatif à l’onde 4 et de taux de croissance, et ce jusqu’à la distance non-linéaire  $k_4 d \varepsilon^2 = 1$ . Pour des cambrures initiales au-delà de  $\varepsilon = 0.1$  le modèle s’écarte des mesures en surestimant le taux de croissance et en ne prédisant pas la saturation observée. Cette dernière est à relier au déferlement détecté lors des essais.

Pour l’onde 6 (figure 9 à droite), les solutions numériques sous-estiment largement les taux de croissance observés : il manque vraisemblablement des termes dans les équations utilisées.

La figure 10 montre à gauche la vue du champ de vagues en condition de résonance pour des cambrures d’ondes mère égales  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.14$ . Après calibration extrinsèque de la caméra utilisée pour les prises de vue, on enrichi l’image en traçant des droites équidistantes situées sur le plan horizontal de la surface

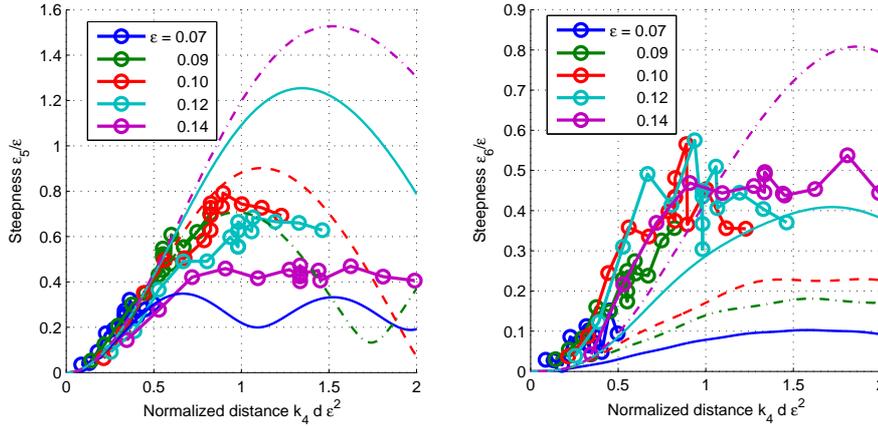


FIGURE 9 – Cambrure des ondes de cascade 5 et 6 pour des essais en condition de résonance avec  $\epsilon_1 = \epsilon_3$  (voir la légende). La cambrure est normalisée au moyen des cambrures mères initiales. Les lignes avec points sont les mesures, les lignes seules sont les résultats de simulation aux mêmes cambrures.

libre au repos, faisant un angle de  $-49^\circ$  avec l’axe principal du bassin et espacées de 4.2 m. Ces chiffres caractérisent les paquets de vagues formés et dépendent de la cambrure initiale comme on peut le voir sur la figure 6.

La figure 10 à droite affiche une vue zoomée qui montre l’orientation des crêtes à l’intérieur des paquets obliques : on a tracé des lignes en pointillés bleus alignées avec les paquets et des lignes blanches alignées avec les crêtes. On observe que les crêtes ont une direction d’angle plus faible que l’angle des paquets ( $-49^\circ$ ). On peut dire que les paquets obliques sont formés par la superposition des ondes se propageant vers la droite, *i.e.* l’onde 1 restante, l’onde 4 et les ondes de cascade 5 et 6, de directions respectives ( $-12.5$ ,  $-23.1$ ,  $-28.5$  et  $-31^\circ$ ). Pour cette cambrure initiale élevée, on observe que les crêtes déferlent à l’intérieur des paquets.

## 5 Conclusion :

Les expériences historiques des années 60 et 80 sur les interactions résonantes à 4 vagues ont été revisitées à l’aide d’essais en bassin de houle multi-directionnel. Le batteur segmenté piloté en tirant avantage des réflexions sur les murs latéraux permet d’accéder à des cas inaccessibles dans des bassin équipés de 2 batteurs plans perpendiculaires. Le taux de croissance théorique de l’onde fille donné par Longuet-Higgins est confirmé à faible distance non linéaire  $k_1 d \epsilon^2 < 0.5$  pour des ondes mères se propageant avec un angle aigu compris entre  $-10$  et  $40^\circ$ . De même hors résonance autour de l’angle  $\theta = 25^\circ$ . A plus forte cambrure, cette théorie est dépassée et l’intégration numérique de l’équation de Zakharov permet de prédire l’évolution des ondes mères (pompage de l’onde 1) à plus grande distance non linéaire  $k_1 d \epsilon^2 \simeq 1.5$

L’apparition de nouvelles ondes filles intervenant dans des quartets ultérieurs (1,4,3,5) et (4,4,3,6) est mise en évidence et l’évolution spatiale de leur cambrure est donnée. Ces ondes forment avec l’onde 1 et l’onde 4 des paquets de vague obliques dont la direction apparente dépend de la cambrure. Lorsque la cambrure des ondes mères est élevée, le déferlement apparaît en premier à l’intérieur de ces paquets pour les ondes courtes présentes dans ces paquets.

La cascade d’interactions observée est expliquée par la théorie de Zakharov des interactions à 4 vagues. Les quartets formés après l’apparition de l’onde fille 4 sont quasi-résonants et montrent un fort taux de croissance. La résolution numérique des équations de Zakharov incluant les ondes 5 et 6 permet de prédire quantitativement les observations expérimentales pour l’onde 5 mais pas pour l’instant pour l’onde 6. Le déferlement visible lors des essais peut jouer un rôle dans les différences observées entre simulations et expérience. Des essais plus systématiques sont nécessaires pour mieux caractériser le comportement des quartets ultérieurs et des résonances nouvelles.



FIGURE 10 – A gauche : Vue du champ de vagues en régime établi en condition de résonance avec  $\theta = \theta_m$  et  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.14$ . Les lignes pointillées blanches sur la partie droite de l'image ont été alignées avec les paquets de vagues obliques; elles sont espacées d'une distance constante de 4.2 m selon un angle de  $-49^\circ$  par rapport à l'axe du bassin.

A droite : Autre vue du même champ de vagues depuis une position latérale. Les lignes pointillées bleues ont été alignées avec les paquets de vagues obliques; les lignes continues blanches ont été alignées avec les crêtes.

## Annexe : Théorie de Zakharov

L'élévation de surface libre est constituée d'une superposition d'ondes libres et d'un ensemble d'ondes liées. La partie linéaire  $\eta_{lin}$  de l'élévation est construite comme la superposition d'onde libres qu'on écrit de la manière suivante

$$\eta_{lin}(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{k} \left( \frac{k}{2\omega} \right)^{1/2} [B(\mathbf{k}, t) \exp(-i\omega(k)t) + B^*(-\mathbf{k}, t) \exp(i\omega(k)t)] \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) . \quad (4)$$

où  $B$  est l'amplitude spectrale généralisée ou action,  $\omega$  la pulsation,  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde et  $k$  le nombre d'onde. L'équation de Zakharov régit l'évolution temporelle de l'action  $B$  [10] du fait des interactions à 4 vagues

$$i\partial_t B_1 = \int T_{1234} B_2^* B_3 B_4 \delta_{1+2-3-4} \exp(i\Delta_{1234}t) d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 , \quad (5)$$

où les pulsations sont  $\omega_i = \omega(\mathbf{k}_i)$ , le désaccord linéaire en fréquence est  $\Delta_{1234} = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4$ . On utilise aussi les notations suivantes,  $\delta_{1+2-3-4} = \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4)$  et  $B_i = B(\mathbf{k}_i, t)$ . Les coefficients d'interaction  $T_{1234} = T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$  sont les noyaux donnés dans [4] or [3].

Les ondes liées peuvent être évaluées par le biais des transformations canoniques ayant conduit à l'équation (5) (voir [3] pour les noyaux correspondants).

Pour l'interaction dégénérée étudiée ici, on suppose que l'élévation consiste en la superposition de 3 ondes seulement. L'action s'écrit alors  $B(\mathbf{k}, t) = B_1(t)\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) + B_3(t)\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_3) + B_4(t)\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_4)$  avec la condition de résonance  $2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4 = \mathbf{0}$ . Dans le cas d'un champ de vague homogène en espace, l'équation (5) conduit au système

$$i\partial_t B_1 = (\Omega_1 - \omega_1)B_1 + 2T_{1134} \exp(i\Delta\omega t) B_1^* B_3 B_4 , \quad (6a)$$

$$i\partial_t B_3 = (\Omega_3 - \omega_3)B_3 + T_{1134} \exp(-i\Delta\omega t) B_1^2 B_4^* , \quad (6b)$$

$$i\partial_t B_4 = (\Omega_4 - \omega_4)B_4 + T_{1134} \exp(-i\Delta\omega t) B_1^2 B_3^* , \quad (6c)$$

où  $\Delta_{1134} = 2\omega_1 - \omega_3 - \omega_4$  est le désaccord en fréquence linéaire. Les pulsations nonlinéaires  $\Omega_i$  satisfont aux relations de dispersion nonlinéaires suivantes

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= \omega_1 + T_{1111}|B_1|^2 + 2T_{1313}|B_3|^2 + 2T_{1414}|B_4|^2 , \\ \Omega_3 &= \omega_3 + 2T_{1313}|B_1|^2 + T_{3333}|B_3|^2 + 2T_{3434}|B_4|^2 , \\ \Omega_4 &= \omega_4 + 2T_{1414}|B_1|^2 + 2T_{3434}|B_3|^2 + T_{4444}|B_4|^2 , \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

On utilise dans la suite la notation  $T_{ij} = T_{ijij}$ . A partir d'une condition initiale donnée, on peut intégrer ces équations numériquement. Ou bien analytiquement, sous réserve d'hypothèses supplémentaires. Pour

cela, on prend une superposition initiale des 2 ondes mères 1 et 3. Aux temps courts, l'onde fille qui apparaît dans le champ de vagues est d'amplitude faible. Les ondes mères sont peu affectées, les relations de dispersion sont  $\Omega_1 = \omega_1 + T_{11}|B_{10}|^2 + 2T_{13}|B_{30}|^2$ ,  $\Omega_3 = \omega_3 + 2T_{13}|B_{10}|^2 + T_{33}|B_{30}|^2$  et leur action vaut

$$B_i(t) = B_{i0} \exp(-i(\Omega_i - \omega_i)t), \quad i = 1 \text{ et } 3. \quad (8)$$

En introduisant  $C_4$  tel que  $B_4(t) = C_4(t) \exp(-i(\Omega_4 - \omega_4)t)$ , avec la relation de dispersion  $\Omega_4 = \omega_4 + 2T_{14}|B_{10}|^2 + 2T_{34}|B_{30}|^2$ , on peut convertir l'équation (6c) en

$$\partial_t C_4 = -iT_{1134} \exp(-i\Delta\Omega t) B_{10}^2 B_{30}^*, \quad (9)$$

où  $\Delta\Omega = 2\Omega_1 - \Omega_3 - \Omega_4$  est le désaccord en fréquence non-linéaire. On voit que le comportement de  $C_4$  est régi par le transfert d'énergie dans le quartet et par un terme d'évolution nonlinéaire des pulsations autre que la relation de dispersion nonlinéaire. On peut intégrer l'équation (9)

$$B_4 = -iT_{1134} B_{10}^2 B_{30}^* \frac{\sin(\Delta\Omega t/2)}{\Delta\Omega/2} \exp(-i(\Omega_4 - \omega_4 + \Delta\Omega/2)t). \quad (10)$$

Cette solution est valable tant que  $|B_4| \ll |B_{10}|$  et  $|B_{30}|$ . La formule  $\varepsilon_i = \sqrt{2k_i^3/\omega_i} B_i$  permet de convertir cette solution en cambrure et on passe à l'évolution spatiale d'ondes générées en bassin en remplaçant le temps  $t$  par  $x = c_g t$  où  $c_g = \omega_4/2k_4$  est la vitesse de groupe de l'onde 4 la plus lente. Ces deux conversions permettent de retrouver les équations (1) et (2) avec en plus les relations de dispersion non-linéaires données plus haut.

A plus forte cambrure, l'établissement des équations (6c) montre l'apparition des ondes de cascade avec les équations d'évolution suivantes

$$i\partial_t B_5 = (\Omega_5 - \omega_5)B_5 + 2T_{1435} \exp(i\Delta_{1435}t) B_3^* B_1 B_4, \quad (11a)$$

$$i\partial_t B_6 = (\Omega_6 - \omega_6)B_6 + T_{4436} \exp(i\Delta_{4436}t) B_3^* B_4^2, \quad (11b)$$

$$(11c)$$

avec  $\Delta_{1435} = \omega_1 + \omega_4 - \omega_3 - \omega_5$  et  $\Delta_{4436} = 2\omega_4 - \omega_3 - \omega_6$  les désaccords linéaires.

## Références

- [1] F. Bonnefoy, F. Haudin, G. Michel, B. Semin, T. Humbert, S. Aumaître, M. Berhanu, and E. Falcon. Observation of resonant interactions among surface gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 805, 2016.
- [2] R.A. Dalrymple. Directional wavemaker theory with sidewall reflection. *J. Hydraulic Research*, 27(1) :23–34, 1989.
- [3] P. A. E. M. Janssen. On some consequences of the canonical transformation in the hamiltonian theory of water waves. *J. Fluid Mech.*, 637 :1–44, 2009.
- [4] V. P. Krasitskii. On reduced equations in the hamiltonian theory of weakly nonlinear surface waves. *J. Fluid Mech.*, 272 :1 – 20, 1994.
- [5] M. S. Longuet-Higgins. Resonant interactions between two trains of gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 12 :321–32, 1962.
- [6] M. S. Longuet-Higgins and N. D. Smith. An experiment on third-order resonant wave interactions. *J. Fluid Mech.*, 25 :417–435, 1966.
- [7] L. F. McGoldrick, O. M. Phillips, N. E. Huang, and T. H. Hodgson. Measurements of third-order resonant wave interactions. *J. Fluid Mech.*, 25 :437–456, 1966.
- [8] O. M. Phillips. On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. part I. the elementary interactions. *J. Fluid Mech.*, 9 :193–217, 1960.
- [9] H. Tomita. Theoretical and experimental investigations of interaction among deep-water gravity waves. *Report of Ship Res. Inst., NMRI*, 26(5) :251–350, 1989.
- [10] V. Zakharov. Stability of periodic waves of finite amplitude on a surface of a deep fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2 :190–198, 1968.