N° d'ordre : 191-97 Année 1997

THESE

présentée devant

L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE LYON

pour l'obtention du

DIPLOME DE DOCTORAT

(arrêté du 30 Mars 1992)

de

L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD – LYON I

PAR

Eric FALCON

Comportements dynamiques associés au contact de Hertz : processus collectifs de collision et propagation d'ondes solitaires dans les milieux granulaires

---

soutenue le 08 Juillet 1997

devant le jury composé de MM.

Mr.	Bideau Daniel	Professeur à l'Université Rennes I	Rapporteur
Mr.	Coste Christophe	Maître de conférences à l'E.N.S. Lyon	
Mr.	Fauve Stéphan	Professeur à l'E.N.S. Lyon	
Mr.	Perrin Bernard	Professeur à l'Université Paris VII	Rapporteur
Mr.	Vialle Jean–Louis	Professeur à l'Université Lyon I	

Université Claude Bernard – Lyon I –

Président de l'Université	M. le Professeur M. Dechavanne
Vice–Président Fédération Santé	M. le Professeur J. Doury
Vice–Président Fédération Sciences	M. le Professeur Y. Lemoigne
Vice–Président du Conseil Scientifique	M. le Professeur J. Remillieux
Vice–Présidents des Centres d'Evaluation et de Coordination Thématiques :	
- Sciences de la Matière et Technologies	M. J. F. Jal, Chercheur C.N.R.S.
- Sciences de la Vie et de la Santé	M. le Professeur L. Collet
Vice–Président du Conseil des Etudes et de la Vie Universitaire	M. le Professeur J. C. Duplan
Secrétaire Général	M. J. Flacher
Fédération Santé	
UFR de Médecine Lyon R.T.H. Laënnec	Directeur : M. le Pr. P. Perrin
UFR de Médecine Lyon Grange–Blanche	Directeur : Mme le Pr. H. Pellet
UFR de Médecine Lyon Nord	Directeur : M. le Pr. L. M. Patricot
UFR de Médecine Lyon Sud	Directeur : M. le Pr. J. P. Gerard
UFR d'Odontologie	Directeur : M. le Pr. J. Doury
Institut des Sciences Pharmaceutiques et Biologiques	Directeur : M. le Pr. C. Collombel
Institut des Techniques de Réadaptation	Directeur : M. le Pr. M. Eyssette
Département de Formation et Centre de Recherche en Biologie Humaine	Directeur : M. le Pr. P. A. Bryon
Département de Formation à la Recherche et à l'Evaluation Pédagogique	Directeur : M. le Pr. M. Laville
Fédération Sciences	
UFR de Mathématiques Appliquées, de Gestion et d'Economie	Directeur : M. le Pr. J. C. Augros
UFR de Physique	Directeur : M. le Pr. J. L. Vialle
UFR de Biologie	Directeur : M. le Pr. D. Debouzie
UFR de Mécanique	Directeur : M. le Pr. J. N. Gence
UFR de Génie Electrique et des Procédés	Directeur : M. le Pr. G. Gilles
UFR des Sciences de la Terre	Directeur : M. le Pr. S. Elmi
UFR de Mathématiques	Directeur : M. le Pr. J. M. Morvan
UFR d'Informatique	Directeur : M. le Pr. D. Vandorpe
UFR de Chimie et Biochimie	Directeur : M. le Pr. J. P. Scharff
UFR S.T.A.P.S.	Directeur : M. le Pr. P. Thiriet
Observatoire de Lyon	Directeur : M. le Pr. R. Bacon
Institut des Sciences et des Techniques de l'Ingénieur de Lyon	Directeur : M. le Pr. P. Trompette
Département de 1er cycle Sciences	Directeur : M. le Pr. P. Poncet
I.U.T. A	Directeur : M. le Pr. J. Gielly
I.U.T. B	Directeur : M. le Pr. J. Pivot

Remerciements

Que Monsieur Jean–Pierre Hansen, directeur du laboratoire de Physique de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, trouve ici mes remerciements les plus vifs pour m'avoir permis de réaliser cette thèse au sein de son laboratoire.

Je tiens tout d'abord à remercier les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail, et en particulier Messieurs Daniel Bideau et Bernard Perrin qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je sais gré à Monsieur Jean–Louis Vialle de m'avoir fait l'honneur de présider ce jury.

Ma gratitude et mes profonds remerciements vont ensuite à mes deux directeurs de thèse qui m'ont initié au travail de recherche d'une façon très différente et très complémentaire. Que Messieurs Stephan Fauve et Christophe Coste trouvent ici un témoignage de ma reconnaissance pour m'avoir proposé ce travail et pour l'avoir dirigé.

Je tiens à dire à Monsieur Stephan Fauve combien je suis pleinement conscient de la chance d'avoir pu bénéficier de sa remarquable clarté d'esprit et de son habileté à reconnaître le phénomène physique essentiel sous-jacent à une complexité apparente. Je remercie tout particulièrement Monsieur Christophe Coste qui a fait preuve d'une constante disponibilité, de remarquables qualités humaines ainsi que d'une très grande patience vis–à–vis de mes innombrables questions. Il m'a constamment apporté son savoir–faire expérimental, sa rigueur théorique et son analyse critique. Ensemble, ils ont su me communiquer leur passion pour la recherche et je souhaite leurs témoigner ici toute ma gratitude et toute mon amitié.

Je dois une immense reconnaissance à Monsieur Claude Laroche dont le rôle dans le déroulement de cette thèse a été essentiel. C'est lui qui m'a appris les techniques d'usinage, les astuces expérimentales et qui m'a soutenu lors de la période la plus difficile de cette thèse. Outre l'immense savoir–faire expérimental qu'il m'a apporté, il m'est resté de cette collaboration une amitié profonde. Je lui adresse ici ma profonde gratitude et mes plus sincères remerciements.

Je tiens à exprimer ma profonde reconaissance à Monsieur Krishna Kumar, du Indian Statistical Institute de Calcutta, pour son étroite collaboration lors des deux mois de Juin et Juillet 1995, où il se trouvait à Lyon. Le sable du Gange ainsi que sa « magic powder », qu'il avait apporté d'Inde, m'ont permis de faire du chapitre V de cette thèse ce qu'il est.

J'adresse des remerciements tout particuliers à Monsieur Stefan Luding, de l'Université de Stuggart, avec qui nous avons débuté nos discussions scientifiques sur les milieux granulaires lors d'un G.D.R. en 1994. Je lui suis très reconnaissant, outre ces bénéfiques discussions, d'avoir bien voulu comparer les résultats de ses simulations numériques avec certain de mes résultats expérimentaux du chapitre II de cette thèse.

J'aimerais remercier Monsieur S. Gavrilyuk, de l'Institut Lavrentyev à Novosibirsk [1], pour ses discussions instructives et pour une introduction à la bibliographie russe concernant le sujet du chapitre IV. Je remercie aussi Monsieur V. F. Nesterenko, de l'Institut Lavrentyev à Novosibirsk [2], pour m'avoir envoyé ses publications sur le sujet.

Je tiens également à remercier ceux qui par leurs remarques, leurs commentaires ou bien leurs discussions m'ont permit d'apprendre bien des choses : Messieurs E. Clément de l'Université Pierre et Marie Curie à Paris, F. Melo de l'Université de Santiago, S. Warr de l'Université de Cambridge et W. R. Young de l'Université de Californie, San Diego, La Jolla.

1. Adresse actuelle : Université de Marseille.
2. Adresse actuelle : Université de Californie, San Diego, La Jolla.

Toutes les expériences présentées dans cette thèse n'auraient jamais vu le jour sans le précieux concours à la fois technique et de conception de Messieurs Djamel Bouraya et Claude Laroche. Je leur suis très reconnaissant de cette collaboration fructueuse et je tiens tout particulièrement à remercier Monsieur Djamel Bouraya pour le montage expérimental du chapitre IV.

Plusieurs organismes ont participé au financement de cette thèse : le réseau de laboratoire G.E.O. (Géomatériaux Environnement et Ouvrages) qui a sélectionné notre thème d'étude pour recevoir un financement de 80 kF et faire partie du projet « Comportement et microstructure des matériaux granulaires » et le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche qui m'a accordé une bourse doctorale pour une durée de trois ans. Je les en remercie.

La rédaction du chapitre IV et V de cette thèse s'est effectuée au Laboratoire de Physique de la Matière Condensée à l'Ecole Normale Supérieure à Paris. Je remercie Messieurs Bernard Perrin et Tristan Baumberger de leur bienveillance et de m'avoir permis de rédiger dans les meilleurs conditions possibles.

Je voudrais particulièrement remercier trois enseignants qui, à travers leur cours, ont éveillé en moi l'envie de connaître et de comprendre et m'ont transmis – et de quelle façon – leur passion pour la physique : Monsieur Brunaz, au lyçée Saint–Exupéry à Lyon, Monsieur Michel Lambert, à l'Université Lyon I et Monsieur Stephan Fauve, à l'Ecole Normale Supérieure de Lyon.

Cette thèse s'est déroulée dans le laboratoire de Physique de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon avec le soutien actif de nombreuses personnes. J'exprime toute ma reconnaissance à toutes les personnes du laboratoire qui, de près ou de loin, m'ont confirmé qu'un tel travail ne peut se mener à terme que dans un environnement où la bonne humeur prime. Ceux–ci se reconnaîtront.

Je ne peux finir sans exprimer ma gratitude aux deux secrétaires du laboratoire de l'E.N.S. Lyon, M^mes^ Marie–Pierre Fuchs et Marie–Claude Gatte, ainsi qu'à la bibliothécaire M^lle^ Dominique Talon qui, tout au long de ces trois années, m'ont aidé pour les questions administratives ou la recherche bibliographique.

Je remercie aussi pour leur patience et leurs lectures attentives tous ceux qui ont contribué à la tâche ingrate de correction du manuscrit. Merci à Monsieur Grégoire Lecerf qui a développé puis m'a transmis la version française du fichier de style bibliographique sous LaTeX.

Enfin, que ma famille reçoive ici dans son ensemble la marque de ma reconnaissance pour son aide et sa gentillesse.

Ma dernière pensée revient à Catherine qui, tout au long de cette thèse, a su m'accompagner avec patience...

Lyon, le 04 Juillet 1997

Résumé de la thèse

L'étude de la matière granulaire a connu un regain d'intérêt parmi les physiciens au cours de ces dernières années [1, 2]. Les problèmes considérés concernent principalement la statique (géométrie et compacité des empilements, contraintes statiques [3, 4]) ou les écoulements (convection [5, 6], excitations de la surface libre [7, 8, 9], fluidisation [10, 11, 12]) des matériaux granulaires. Le sujet de cette thèse se situe à un niveau intermédiaire et concerne la dynamique du contact entre deux grains et l'étude de la propagation des déformations au sein d'un milieu granulaire. Le rôle des contacts apparaît fondamental pour l'étude d'un tel milieu puisque les « informations » (ondes de compression dans du sable, lignes de force dans un empilement, ...) ne peuvent transiter que par l'intermédiaire de ces contacts. De même, le rôle des collisions inélastiques entre deux grains s'avère déterminant pour la compréhension du comportement dynamique d'un milieu granulaire. Dans cet esprit, l'étude des collisions binaires normales (voir le Chap. II) peut faciliter la compréhension des propriétés de ces contacts et constitue une première étape vers l'étude des collisions à plusieurs corps (voir le Chap. III) ou des milieux granulaires vibrés (voir le Chap. V). Cette thèse s'est développée autour des quatre expériences résumées ci–dessous.

Chap. I Dans cette introduction générale, nous rappelons rapidement la théorie de Hertz du contact entre deux corps élastiques, ainsi que son extension directe : la théorie de l'impact normal entre deux corps élastiques. L'approche de ces théories est, dans un premier temps, réalisée à partir d'arguments dimensionnels afin de s'affranchir de la lourdeur des expressions mathématiques (provenant de la géométrie des corps en contacts) tout en conservant la « physique » sous–jacente. Dans un deuxième temps, nous énonçons les résultats de la théorie de Hertz pour un contact et un impact entre deux sphères ou entre une sphère et un plan. Cette théorie de l'impact élastique ne tient cependant pas compte de l'énergie dissipée au cours d'un choc. Puisqu'en pratique de l'énergie est toujours perdue lors d'une collision, nous examinons alors les différents mécanismes possibles de perte d'énergie au cours d'une collision.

Chap. II Dans une deuxième partie, nous étudions expérimentalement le comportement d'une bille rebondissant sur un plan horizontal, massif et stationnaire. Initialement, la bille est lâchée sous l'effet de la gravité, sans vitesse, d'une certaine hauteur au dessus de ce plan. Lorsque la durée d'une collision devient de l'ordre du temps de vol entre deux rebonds successifs, c.-à-d. à la fin des rebonds, nous avons observé que la bille ne rebondit plus mais oscille sur la surface, avec une période caractéristique, avant de s'immobiliser. Une expression analytique de cette période a été obtenue et est en bon accord avec les résultats expérimentaux. Nous avons aussi mesuré, pour chaque rebond, le cœfficient de restitution et la durée de la collision. Pour pratiquement tous les rebonds, le cœfficient de restitution est essentiellement constant et proche de 1. Lorsque la vitesse d'impact v_{imp} tend vers zéro, c.-à-d. pour les tous derniers rebonds, nous avons observé une forte décroissance du cœfficient de restitution. De plus, pour ces très basses vitesses d'impact, la durée de la collision est plus longue que celle prévu par la théorie de Hertz. Une expression intégrale de la durée de collision a alors été obtenue.

Un modèle non dissipatif, fondé sur une interaction non linéaire entre la bille et la surface (le contact de Hertz), donne des résultats en bon accord avec les expériences lorsque la gravité est prise en compte au cours de l'interaction. Ce modèle permet alors de décrire à la fois la dynamique du contact de tous les rebonds et les oscillations de la bille sur le plan.

Les différents mécanismes de dissipation d'énergie au cours d'un rebond ont été exposés.

Nous avons souligné qu'à basse vitesse d'impact, ces pertes d'énergie sont principalement dues à une dissipation viscoélastique. Un modéle numérique dissipatif, fondé sur un mécanisme exclusivement viscoélastique, conduit à une évolution du cœfficient de restitution similaire à celle obtenue expérimentalement. De plus, nous avons souligné que la forte décroissance du cœfficient de restitution lorsque $v_{imp} \to 0$ ne provient pas de l'apparition d'un nouveau mécanisme de dissipation, mais du fait que le système dissipe l'énergie d'une façon différente : lorsque la force de pesanteur est prépondérante devant la force élastique, le système dissipe plus d'énergie que lorsque la force de pesanteur est négligeable au cours de l'interaction.

Chap. III Dans une troisième partie, nous étudions la dynamique de la collision d'une colonne de N billes avec un mur stationnaire. Initialement, les billes sont en contact et au repos, et sont lâchées sous l'effet de la gravité d'une hauteur h_0 au dessus du mur.

Dans le cas d'un mur rigide et à hauteur de chute fixée, nous avons montré expérimentalement que la force maximale ressentie par le mur est indépendante du nombre de billes. Nous avons aussi mesuré, en fonction de N, la durée de collision, la vitesse de l'onde de déformation et un cœfficient de restitution effectif de la colonne. Une onde de déformation est émise au début de la collision et se propage, vers le haut, le long de la colonne avec une vitesse indépendante du nombre de billes. Cette vitesse est mesurée comme étant un ordre de grandeur plus faible que la vitesse des ondes longitudinales dans le matériau constituant les billes. La mesure du cœfficient de restitution effectif de l'ensemble de la colonne montre alors que plus le nombre de billes de la colonne est important, plus l'énergie dissipée lors de la collision est grande. De plus, nous avons souligné que l'indépendance de la force maximale avec N est reliée à la propagation de l'onde de déformation à travers la colonne et dépend de la rigidité du mur. En outre, nous sommes capable de définir de façon précise le mot « rigidité ». Une expression analytique de la vitesse de telles ondes a été obtenue et est en accord avec les résultats expérimentaux.

Un modèle numérique non dissipatif, fondé sur l'interaction non linéaire de Hertz, donne des résultats en très bon accord avec l'expérience. De plus, numériquement, nous avons montré qu'après la phase de compression entre la colonne et le mur, les billes se séparent les unes des autres avec des vitesses et des distances inter-billes très différentes. Deux sortes de détachements des billes de la colonne ont alors été observé numériquement : un en dessous du nombre critique $N = 5$ et un pour $N \geq 5$. Pour $N \geq 5$, les billes du haut de la colonne se détachent les unes après les autres de la colonne avec une vitesse plus grande que leur vitesse initiale. Les billes du bas rebondissent alors, vers le haut, en bloc avec une vitesse inférieure à leur vitesse initiale.

Notre travail montre de plus que la collision de N billes inélastiques avec un mur stationnaire (c.-à-d. pas d'énergie injectée au cours de la collision) est régie par deux mécanismes fondamentaux : la dispersion d'énergie à travers toute la colonne et la dissipation d'énergie lors de la collision inélastique. Le rôle de la dispersion d'énergie est de redistribuer l'énergie, au cours de la collision, à l'intérieur de tout le système. Cette redistribution dépend essentiellement de la loi d'interaction entre deux billes (c.-à-d. la loi de Hertz pour des interactions réalistes). La dispersion d'énergie à travers le système conduit alors à l'effet de détachement des billes de la colonne et à une distance typique de séparation entre chaque bille. Nous avons vu numériquement que cette distance typique augmente avec N. D'un autre coté, puisque de l'énergie est toujours perdue lors de la collision, la dissipation tend à réduire cette distance typique de séparation entre chaque bille. Nous avons vu expérimentalement que l'énergie dissipée augmente avec N. La dissipation et la dispersion sont par conséquent deux effets antagonistes.

Finallement, ces mécanismes ne sont pas spécifiques aux expériences unidimensionnelles et doivent être très important pour les expériences plus réalistes à deux ou trois dimensions : l'effet purement dispersif (c.-à-d. l'effet de détachement des billes) est probablement un mécanisme précurseur de la fluidisation des milieux granulaires vibrés tandis que la prépondérance des effets dissipatifs peut conduire à la phase condensée (ou dite « en amas ») de ces mêmes milieux.

Chap. IV La relation entre la force exercée entre deux particules voisines et leur distance d'approche est fortement non linéaire (contact de Hertz). On peut alors s'attendre a des effets importants des non linéarités sur la propagation des ondes de compression dans ce type de milieu. L'étude du comportement acoustique d'un réseau unidimensionnel de billes élastiques soumises a une contrainte statique présente à la fois un caractère non linéaire et une structure discrète. Un tel système est intéressant en tant qu'exemple de milieu granulaire modèle ainsi qu'en tant que réseau non linéaire. L'étude de la propagation d'une onde de compression d'amplitude moyenne ou forte dans une chaîne de 51 billes en acier, soumises à une compression statique, nous a permis de mettre en évidence les résultats suivants :

- en régime linéaire, on retrouve les résultats classiques d'une chaîne de masses ponctuelles, reliées par des ressorts identiques. La vitesse de propagation des ondes de grandes longueurs d'ondes, c.-à-d. la vitesse du son dans le réseau, tout comme la fréquence de coupure du réseau dépendent de la compression statique à la puissance 1/6.

- en régime fortement non linéaire, des études théoriques prédisent l'existence d'ondes solitaires supersoniques, qui conservent leur forme sur une distance de propagation grande devant leur taille. Nous avons mis en évidence la propagation d'impulsions de grande amplitude dans la chaîne. Nous avons pu mesurer la vitesse de ces ondes en fonction de leur amplitude et la comparer favorablement à sa valeur théorique. La forme des impulsions est aussi tout à fait conforme aux prédictions théoriques, ce qui permet de les identifier aux ondes solitaires annoncées.

Chap. V Dans une dernière partie, nous avons mis en évidence l'apparition de nouvelles instabilités à la surface d'une couche épaisse[3] de matière granulaire soumise à une excitation sinusoïdale verticale. Les grains utilisés dans cette expérience 3–D sont non cohésifs, de forme quelconque, et possèdent un taille typique relativement faible (entre 60 et 200 μm). La petite taille des grains ainsi que l'épaisseur relativement importante de la couche rend prépondérant le rôle de l'air. La dynamique d'une telle poudre doit être fortement dissipative, puisque le choix de grains de formes irrégulières permet d'augmenter la dissipation dûe aux frottements solides et aux collisions inélastiques entre grains. Le comportement dynamique des systèmes fortement dissipatifs étant très riche, nous espérions observer des phénomènes nouveaux dans de tels milieux granulaires hautement dissipatifs. Tel est le cas, puisqu'en plus des instabilités déjà recensées dans la littérature, c.-à-d. la formation spontanée d'un tas conique et les ondes progressives à sa surface, nous observons l'apparition de nouvelles instabilités. A basse fréquence d'excitation, la formation de « cannelures » à la surface du tas est observée, ainsi que la formation d'hexagones, à plus haute amplitude de vibration, lorsque le tas disparaît et la surface redevient horizontale. A haute fréquence, la surface horizontale du matériau granulaire présente un régime d'ondes stationnaires constituées de lignes de même fréquence que la fréquence excitatrice. Tous ces phénomènes ont lieu pour des matériaux granulaires très

3. Approximativement, entre 50 et 200 fois la taille typique d'une particule

dissipatifs et sont indépendants des parois latérales du récipient les contenant. Le principal mécanisme pour leur formation est le mouvement convectif des grains induit par la présence du gaz intersticiel, c.-à-d. l'air. En effet, ces phénomènes disparaissent lorsque les expériences sont répétées sous vide. Ces phénomènes sont fondamentalement différents de ceux observés à la surface d'une fine couche de matière granulaire, et qui proviennent soit d'une « instabilité paramétrique », de même nature que celles observées dans les fluides visqueux peu profonds soumis à des vibrations verticales, soit de l'interaction de cette dernière avec une « instabilité de doublement de période ».

Table des matières

Notations

Symbole	Signification	Dimensions	Notes
a	Rayon du contact de Hertz	$[L]$	
c_l	Vitesse du son	$[LT^{-1}]$	$c_l = \sqrt{E/\rho}$
E	Module d'Young	$[ML^{-1}T^{-2}]$	
F	Force	$[MLT^{-2}]$	
m	Masse	$[M]$	$m = 4\pi R^3\rho/3$
n	Numéro du rebond	$[-]$	
N	Nombre de billes	$[-]$	
g	Accélération de la pesanteur	$[LT^{-2}]$	
h	Hauteur de chute	$[L]$	
H	Epaisseur de la cible	$[L]$	
$H[\cdot]$	Fonction Heaviside	$[-]$	
K	Cœfficient de la loi de Hertz		
	pour un contact sphère–plan	$[ML^{1/2}T^{-2}]$	*cf.* Eq. (I.24)
k	Cœfficient de la loi de Hertz		
	pour un contact sphère–sphère	$[ML^{1/2}T^{-2}]$	*cf.* Eq. (I.20)
P	Pression	$[ML^{-1}T^{-2}]$	
R	Rayon d'une bille	$[L]$	
t	Temps	$[T]$	
v_{imp}	Vitesse d'impact	$[LT^{-1}]$	
v_g	Vitesse du centre de masse	$[LT^{-1}]$	
$\mathcal{B}[\cdot\ ,\ \cdot]$	Fonction Beta	$[-]$	
δ	Interpénétration	$[L]$	
ϵ	Cœfficient de restitution	$[-]$	
$\Gamma[\cdot]$	Fonction Gamma	$[-]$	
λ	Paramètre d'inélasticité	$[-]$	*cf.* Eqs. (I.43)
ν	Cœfficient de Poisson	$[-]$	
ρ	Densité	$[ML^{-3}]$	
τ	Temps de collision	$[T]$	

Caractéristiques des matériaux

Matériau	E (N/m^2)	ν	ρ (kg/m^3)	c_l (m/s)
Carbure de Tungstène	$53,4 \times 10^{10}$	$0,22$	13800‡ 14950†	6240 6380†
Acier Inox 17%	$21,6 \times 10^{10}$	$0,276$	7850‡	5250
Bronze $(92Cu/08Sn)$	11×10^{10}\$	—	8800 † \$	—
Laiton $(60Cu/40Zn)$	$10,4 \times 10^{10}$	$0,374$	8600‡ 8500†	3480
Duralumin 17S	$7,15 \times 10^{10}$	$0,335$	2790‡	5150
Verre (pyrex)	$6,2 \times 10^{10}$	$0,24$	2320‡ 2520†	5170
PVC	$1,4 - 4,1 \times 10^9$‡	$\simeq 0,25$♯	1400♯	—
Plexiglas©	4×10^9	$0,4$	1180‡	1840
Teflon©	$4,1 \times 10^8$†	—	2150†	436†
Hêtre	—	—	$700 - 900$‡	3340‡

Références

American Institute of Physics Handbook, edited by D. E. Gray, McGraw–Hill, New–York, 3rd edition, 1972.

† Catalogue Marteau & Lemarié. *Le spécialiste de la bille.* Mars 1994.

‡ *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, edited by R. C. Weast, CRC Press, USA, 60th edition, 1981.

♯ Documentation Technique Société Anonyme des Manufactures des Glaces et Produits chimiques de St–Gobain, Chauny et Cirey. *Le travail et les applications du Lucoflex©.* 1955.

\$ *Metals Handbook*, edited by T. Lyman, American Society for Metals, USA, 1948.

« Que savons–nous si des créations de mondes
ne sont point déterminées par des chutes de
grains de sable? »

VICTOR HUGO, *Les Misérables*, III, 3

« ... il me semble que je n'ai jamais été qu'un
enfant jouant sur une plage, m'amusant à
trouver ici où là un galet plus lisse
ou un coquillage plus beau que d'ordinaire,
tandis que, totalement inconnu, s'étendait
devant moi le grand océan de la vérité... »

ISAAC NEWTON

« To see a world in a grain of sand
And a heaven in a wild flower,
Hold infinity in the palm of your hand
And eternity in an hour. »

WILLIAM BLAKE, *Auguries of Innocence*

Chapitre I

Introduction générale

« ... And yet I feel that it is right : to get information for myself and for others direct from nature gives me so much more satisfaction than to be always learning it from others and for myself alone...
... When I am only studying books I am never free of the feeling that I am a perfectly useless member of society. »

HEINRICH RUDOLPH HERTZ,
Lettre à ses parents, datée du 24 Novembre 1878

R. DOWSON, *History of Tribology*, Longman, London, 1979, Annexe A.13, p. 569–571

I.1 De la loi de Hooke à la loi de Hertz...

La mécanique des corps solides, considérés comme des milieux continus, constitue le contenue de *la théorie de l'élasticité* [13, 14, 15]. Les équations fondamentales de cette théorie furent établies dans les années 1820 par Cauchy et Poisson.

Les corps solides se déforment, sous l'action de forces appliquées, en changeant de forme et de volume. Dans le cas de petites déformations et pour des corps isotropes, la théorie de l'élasticité linéaire permet de trouver une relation linéaire entre les composantes du tenseur de déformation et celles du tenseur des contraintes. La déformation du corps est alors proportionnelle aux forces appliquées. Cette loi, valable pour les petites déformations est connue sous le nom de *loi de Hooke*. Si ces déformations sont de plus homogènes, cette loi fait intervenir deux cœfficients de proportionnalité : *le module d'Young* E et *le coefficient de Poisson* ν du matériau constituant le corps. Dans le cas d'une compression selon une seule direction, le cœfficient de Poisson s'interprète comme le rapport de l'extension transverse sur la compression longitudinale tandis que le module d'Young représente le rapport de la pression de compression longitudinale sur l'allongement relatif longitudinal selon

$$contrainte = E \times déformation \ . \tag{I.1}$$

Considérons maintenant deux billes sphériques de même matériau et de même rayon R. Lorsque ces sphères ne sont pas comprimées l'une contre l'autre, le contact a lieu en un point O, comme le montre la Fig. (I-1)(a).

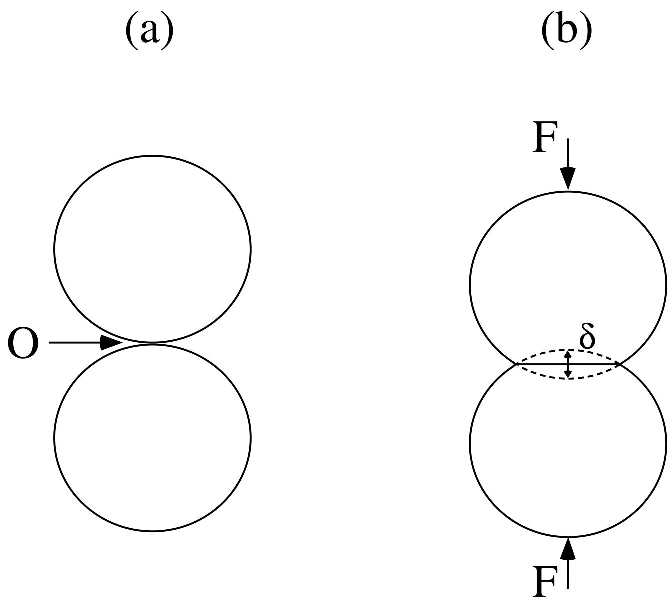


FIG. I-1 – *(a) : contact de deux billes identiques au point O en l'absence de force de compression, (b) : compression des deux billes sous l'action d'une force F. Le rapprochement des centres des billes par rapport à l'état non comprimé correspond à la distance d'interpénétration notée δ.*

Lorsque les sphères sont comprimées l'une contre l'autre, une déformation locale apparaît dans une petite région de forme circulaire autour du point de contact initial O. Cette région sera appelée par la suite *la région de contact*. En supposant R très grand devant le rayon a de cette région, cette dernière peut être considérée comme une surface circulaire. On suppose que ce plan tangent de contact reste stationnaire au cours de la compression et l'on note δ la distance de rapprochement des centres des sphères au cours de la compression (voir Fig. (I-1)(b)). δ sera aussi appelée la distance d'interpénétration. Dans l'état comprimé, la force F qui initialement agissait sur les sphères en un point O, est maintenant essentiellement distribuée dans la région de contact de volume a^3 [16]. Soit P la pression moyenne agissant sur la surface de contact. La loi de Hooke souligne que la déformation relative u entre les deux sphères est proportionnelle à la pression exercée selon

$$P = E \times u \ , \tag{I.2}$$

où E représente le module d'Young du matériau constituant les billes. L'ordre de grandeur de la déformation relative correspond au rapport entre le déplacement à l'intérieur de cette région sur la longueur typique de cette région

$$u \sim \frac{\delta}{a} \ . \tag{I.3}$$

En utilisant le théorème de Pythagore et en négligeant[1] les termes d'ordres supérieurs en δ, on obtient facilement l'ordre de grandeur de la région de contact

$$a \sim \sqrt{\delta R} \ . \tag{I.4}$$

En supposant la distribution de force F homogène dans toute la région de contact, la pression exercée sur chaque bille est

$$P \sim \frac{F}{a^2} \ . \tag{I.5}$$

En introduisant les Eqs. (I.3) et (I.5) dans l'Eq. (I.2) et en utilisant l'Eq. (I.4), le rapprochement des centres des sphères s'exprime sous la forme

$$\delta \sim \left(\frac{F}{ER^{1/2}}\right)^{2/3} \ . \tag{I.6}$$

Cette loi, appelée *loi de Hertz*, montre que l'interpénétration entre les billes est une fonction non linéaire de la force qui les comprime. La loi de Hooke apparaît donc comme l'ingrédient essentiel de la loi de Hertz. Finalement, en combinant les Eqs. (I.4) et (I.6), la taille de la région de contact est

$$a \sim \left(\frac{FR}{E}\right)^{1/3} \ . \tag{I.7}$$

I.2 ... en passant par la durée de collision

Considérons maintenant le cas où les deux billes précédentes rentrent en collision l'une avec l'autre, avec une vitesse relative v_{imp}. En supposant que cette vitesse est beaucoup plus

1. Cette approximation revient à supposer que les déplacements des points de la sphère, dûs à la déformation, sont négligeables en dehors de la région de contact (voir la Ref. [16]).

faible que la vitesse des ondes sonores à l'intérieur du matériau constituant les billes, nous vérifierons *a posteriori* que leurs vibrations peuvent être négligées et qu'ainsi les expressions obtenues dans le § I.1, sous des conditions statiques, peuvent être utilisées. Il est à noter que la théorie de Hertz cesse d'être valide bien avant que la vitesse relative des deux billes soit de l'ordre de grandeur de la vitesse du son, puisque les déformations causées par la collision dépassent déjà la limite élastique du matériau (voir § I.3.2).

Le temps de collision est obtenu à partir de la conservation de l'énergie, au cours du choc, écrite dans le référentiel du centre de masse du système. Au cours de la collision, l'interpénétration δ varie et l'énergie cinétique associée à ce mouvement est

$$E_{cin} \sim m \left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 , \tag{I.8}$$

où m est la masse d'une bille et t le temps. L'énergie potentielle de déformation des sphères s'écrit alors, d'après Eq. (I.6)

$$E_{pot} \sim F\delta \sim \delta^{5/2} R^{1/2} E . \tag{I.9}$$

Juste avant l'impact, l'énergie du mouvement relatif est

$$E_{cin_0} \sim m v_{imp}^2 , \tag{I.10}$$

et la conservation de l'énergie donne alors

$$m v_{imp}^2 \sim m \left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + \delta^{5/2} R^{1/2} E . \tag{I.11}$$

De cette équation est déduite δ_{max} l'interpénétration maximale

$$\delta_{max} \sim \left(\frac{m v_{imp}^2}{E\sqrt{R}}\right)^{2/5} . \tag{I.12}$$

En utilisant l'Eq. (I.12) et le fait que $m \sim \rho R^3$ où ρ est la densité du matériau constituant les billes, l'ordre de grandeur de l'interpénétration maximale par rapport au rayon d'une bille est

$$\frac{\delta_{max}}{R} \sim \left(\frac{v_{imp}}{c_l}\right)^{4/5} , \tag{I.13}$$

où $c_l = \sqrt{E/\rho}$ est la vitesse longitudinale des ondes sonores dans le matériau constituant les billes. δ_{max} sera par conséquent très inférieure à R puisque nous avons supposé $v_{imp} \ll c_l$. Le temps de collision τ correspondant au temps pendant lequel les deux billes restent en contact, est alors exactement deux fois le temps mis pour que δ varie de zéro jusqu'à sa valeur maximale. En réécrivant l'Eq. (I.11), le temps de collision est

$$\tau \sim 2 \int_0^{\delta_{max}} \frac{m^{1/2} d\delta}{\sqrt{m v_{imp}^2 - \delta^{5/2} R^{1/2} E}} . \tag{I.14}$$

En changant la variable d'intégration de l'Eq. (I.14) par $w = \delta/\delta_{max}$ et en utilisant (I.12), l'ordre de grandeur du temps de collision s'écrit

$$\tau \sim \left(\frac{m^2}{RE^2 v_{imp}}\right)^{1/5} . \tag{I.15}$$

La durée de la collision est ainsi d'autant plus grande que la vitesse d'impact est petite. En utilisant l'Eq. (I.12), l'Eq. (I.15) devient

$$\tau \sim \frac{\delta_{max}}{v_{imp}} , \tag{I.16}$$

tandis que le temps de propagation t_s que met le son pour parcourir une distance de l'ordre d'un rayon de bille est

$$t_s \sim \frac{R}{c_l} . \tag{I.17}$$

Ainsi, en utilisant l'Eq. (I.13),

$$\frac{\tau}{t_s} \sim \left(\frac{c_l}{v_{imp}}\right)^{1/5} . \tag{I.18}$$

Comme nous avons supposé $v_{imp} \ll c_l$, la durée de collision est ainsi très grande par rapport au temps que met le son pour parcourir une distance de l'ordre d'un rayon de bille. Les modes de vibrations de la bille ne sont ainsi pas excités efficacement.

Nous avons obtenu à partir d'arguments dimensionnels à la fois le comportement de la taille de la région de contact et de l'interpénétration en fonction de la force de compression ainsi que l'évolution du temps de collision et de l'interpénétration maximale en fonction de la vitesse d'impact lors d'une collision entre deux sphères. Pour obtenir les expressions des cœfficients multiplicatifs, nous devons nous tourner vers l'étude de la théorie de Hertz.

I.3 La théorie de Hertz

Durant les vacances de Noël 1880, à l'age de 23 ans, Heinrich Hertz[2] établit la théorie statique du contact élastique entre deux corps solides, en résolvant les équations de l'élasticité linéaire. Lorsque deux corps sont comprimés, de façon statique, la théorie de Hertz, publiée en 1882[3], permet, sous certaines conditions, de déterminer la dimension de l'aire de contact et la distribution des contraintes et déformations dans la zone de contact de ces deux corps[4]. Ces résultats sont alors reliés à la pression de contact, à la géométrie des solides et à leurs modules d'élasticité. Sa théorie du contact élastique lui permit alors de développer une théorie quasi–statique de l'impact normal entre deux corps élastiques.

2. Pour un résumé de l'ensemble de ses travaux voir la Ref. [17].
3. Pour une traduction anglaise de la publication originale voir la Ref. [18].
4. Les mêmes résultats furent obtenus, de façon indépendante, par J. Boussinesq [19] en Janvier 1883.

I.3.1 Théorie du contact entre deux corps élastiques

Considérons deux solides qui amenés en contact, ne se touchent qu'en un point ou le long d'une ligne. Sous l'action d'une très faible compression, ils se déforment au voisinage de ce point ou de cette ligne de façon à ce que l'aire de contact soit de dimension finie et petite par rapport aux dimensions des deux corps. La théorie du contact élastique [13, 14, 15, 20] prédit alors la forme de cette aire de contact et les distributions de déformation et de contrainte des deux corps au voisinage de la région de contact.

Les hypothèses de ce calcul sont au nombre de quatre. Les surfaces de chaque corps sont supposées être sans frottements afin que seule une pression normale puisse être transmise entre ces surfaces, au cours de la compression. De plus, ces surfaces sont supposées comme étant topographiquement lisses à la fois sur l'échelle microscopique (absence de petites irrégularités de surface qui conduiraient à un contact discontinu ou à des fortes variations de la pression de contact) et macroscopique (les profils de surfaces sont continus dans la région de contact au moins jusqu'à leurs dérivées secondes). Les dimensions significatives de l'aire de contact doivent être petite par rapport aux dimensions de chaque corps et au rayon de courbure relatif des surfaces. Enfin, dans l'intention de calculer des déformations locales, chaque corps doit être considéré comme un milieu semi–infini.

FIG. I-2 – *Heinrich Rudolf Hertz (1857–1894)*

Partant de l'équation de la surface de chaque corps au voisinage de leur point de contact, Hertz écrit ensuite deux relations entre la distribution de la pression de contact et chaque composante normale des déplacements des deux surfaces sous l'effet de cette pression. En combinant ces deux relations, Hertz remarque que la relation intégrale ainsi obtenue est analogue à celle donnant l'expression du potentiel créé par une distribution de charges uniforme à l'intérieur d'un ellipsoïde fortement aplati. Cette analogie avec le problème d'électrostatique permet alors de déterminer la distribution de la pression à l'intérieur de la surface de contact et de conclure que le domaine de contact est délimité par une ellipse quelque soit la géométrie initiale des corps. Le rapprochement δ entre les deux corps ainsi que les demi–axes de l'ellipse de contact sont alors déterminés en fonction d'intégrales elliptiques et de la force F qui comprime les deux corps. Le principal résultat est que le rapprochement δ est proportionnel à $F^{2/3}$ ou inversement la force pressante est proportionnelle à $\delta^{3/2}$ quelque soit la forme des corps en contact. Nous présentons ci–dessous les principaux résultats concernant le contact entre deux sphères de même rayon ou entre une sphère et un plan :

Contact sphère–sphère

Soit deux sphères de même rayon R et de même matériau. La force de contact F s'exprime en fonction de la largeur d'interpénétration δ selon [20]

$$F = k\delta^{3/2} \ , \tag{I.19}$$

où k dépend uniquement du rayon des sphères et des cœfficients élastiques (module d'Young E_s et cœfficient de Poisson ν_s) du matériau constituant les sphères selon

$$k \equiv \frac{\sqrt{2R}}{3} \frac{E_s}{1-\nu_s^2} \ . \tag{I.20}$$

Le domaine de contact est un cercle de rayon a tel que [20]

$$a = \left(\frac{F}{k}\right)^{1/3} \sqrt{\frac{R}{2}} \ , \tag{I.21}$$

tandis que la pression maximale, P_{max}, se trouve au centre de ce disque, est égale à une fois et demi la valeur de la pression moyennée sur ce disque et s'écrit [20]

$$P_{max} = \frac{3k^{2/3}}{\pi R} F^{1/3} \ . \tag{I.22}$$

Contact sphère–plan

Considérons le contact d'une sphère de rayon R avec un plan. La force de contact F s'exprime en fonction de la largeur d'interpénétration δ selon [20]

$$F = K\delta^{3/2} \ , \tag{I.23}$$

où K dépend uniquement du rayon de la sphère et des cœfficients élastiques (module d'Young E_i et cœfficient de Poisson ν_i) des matériaux constituant la sphère ($i = s$) et le plan ($i = p$), et s'écrit

$$K \equiv \frac{4\sqrt{R}}{3} \left(\frac{1-\nu_s^2}{E_s} + \frac{1-\nu_p^2}{E_p} \right)^{-1} \ . \tag{I.24}$$

Le domaine de contact est un cercle de rayon

$$a = \left(\frac{F}{K}\right)^{1/3} \sqrt{R} \ , \tag{I.25}$$

tandis que la pression maximale, P_{max}, se trouve au centre de ce disque, est égale à une fois et demi la valeur de la pression moyennée sur ce disque et s'écrit [20]

$$P_{max} = \frac{3K^{2/3}}{2\pi R} F^{1/3} \; . \tag{I.26}$$

Afin déterminer un ordre de grandeur relatif des quantités ci–dessus, considérons le cas d'une bille sphérique posée, sous l'effet de la gravité, sur une surface plane possédant des propriétés élastiques similaires à celles de la bille. Pour une bille en acier inoxydable, de rayon $R = 2,5\ cm$, reposant sur un plan de même nature, la déformation de ces deux corps est, d'après les caratéristiques de l'acier inoxydable (voir p. 16) et les Eqs. (I.23) et (I.25),

$$a \simeq 0,1\ mm \qquad \delta \simeq 0,4\ \mu m \; . \tag{I.27}$$

δ est par conséquent une quantité très inférieure à a.

I.3.2 Théorie de l'impact normal entre deux corps élastiques

« *... For two steel spheres as large as the earth, impinging with an initial velocity of 10 mm/s, the duration of contact would be nearly 27 hours.* »

Heinrich Rudolph HERTZ, *J. reine und angew. Math.*, **92**,*156-171 (1881)*

La théorie de l'impact normal entre deux corps élastiques est due à H. Hertz [5] et est une extension directe de sa théorie statique du contact élastique sans frottements présentée au § (I.3.1). Elle ne tient pas compte de la dissipation d'énergie au cours de l'impact puisque la compression à l'endroit du contact est considérée comme étant créée graduellement et de façon complètement réversible. La compression locale est ainsi considérée comme un effet statique. Cette théorie est dite *quasi–statique* dans le sens où les déformations sont supposées se restreindre au voisinage de l'aire de contact et être données par la théorie statique : les très légères déformations engendrées par les ondes élastiques à l'intérieur des corps impactants sont ainsi négligées et chaque corps est supposé se déplacer à la vitesse du centre de masse durant toute la durée de l'impact. Ainsi, la collision binaire de Hertz est généralement décrite [20, 21] comme une collision entre deux corps parfaitement rigides, chacun équipé frontalement d'un ressort ; la déformation étant concentrée dans la partie déformable (les ressorts), la partie indéformable (les corps rigides) se déplaçant à la vitesse du centre de masse. Nous examinerons dans un premier temps les hypothèses de la théorie de l'impact de Hertz puis nous présenterons le cas de la collision normale entre une sphère et un plan.

Les hypothèses

La théorie de l'impact de Hertz est obtenue à partir de la théorie statique de l'élasticité linéaire. Elle doit vérifier par conséquent à la fois les hypothèses d'élasticité et de quasi–staticité.

La limite élastique est vérifiée si la collision se réalise sans dissipation d'énergie : pas de frottements, d'énergie absorbée par les matériaux impactants et de déformations plastiques de ces derniers. En pratique, la plupart des matériaux cessent de se déformer de façon élastique lorsque la contrainte maximale lors du contact est supérieure ou égale à la pression

5. Pour une traduction anglaise de la publication originale voir la Ref. [18].

limite d'élasticité de l'un des deux matériaux constituant les solides entrant en contact. Par exemple, pour un contact entre deux sphères en acier, cette limite est dépassée pour des vitesses d'impact de l'ordre de $0,3\ m/s$ [20, 22], la plupart des chocs entre métaux étant élastique–plastiques pour des vitesses supérieures à cette limite [20]. Cependant, la théorie de l'impact reste encore valide si le volume de la région où a lieu la déformation plastique est assez petit devant le volume qui est déformé élastiquement lors de l'impact ; en pratique celà correspond à des vitesses d'impact de l'ordre de huit fois la vitesse critique pour observer un début d'indentation plastique [22].

La limite quasi–statique impose que le champ des contraintes, à l'intérieur des corps impactants, ne varie pas trop pendant toute la durée de la collision, c'est–à–dire que l'influence de la propagation des ondes élastiques sur ce champ soit négligeable et notamment les oscillations propres de chaque corps qui se créent lors de la collision. Dans le cas de deux corps de dimensions et de rayons de courbure de même ordre de grandeur, *e.g.* deux sphères, cette condition implique que la durée d'impact doit être beaucoup plus grande que la plus longue période de vibration propre d'une sphère élastique [13, 14, 23] ou que le temps nécessaire aux ondes élastiques pour traverser une distance de l'ordre de son diamètre (voir annexe A). Ces deux conditions équivalentes exigent respectivement, d'après Love [14] et l'Eq. (I.18), que la vitesse d'impact soit suffisamment petite devant la vitesse du son dans les matériaux constituant les corps en collision, selon

$$\left(\frac{v_{imp}}{c_l}\right)^{1/5} \ll 1 \ . \tag{I.28}$$

Dans le cas où l'un des deux corps est très massif ou de dimension très grande devant l'autre, *e.g.* une sphère et un plan, le critère de Love (Eq. (I.28)) n'est plus applicable puisque les ondes émises lors de la collision ne peuvent revenir au point d'impact. Dans ce cas, l'hypothèse de quasi–staticité est vérifiée si l'énergie de vibration absorbée par le corps massif sous forme d'onde élastique est une fraction négligeable de l'énergie totale d'impact [20, 23]. Cette condition correspond au critère de Hunter [20, 23], qui se réduit essentiellement à [6]

$$\left(\frac{v_{imp}}{c_l}\right)^{3/5} \ll 1 \ . \tag{I.29}$$

Ainsi, le critère de Hunter (Eq. (I.29)) ou celui de Love (Eq. (I.28)) permet de déterminer la vitesse d'impact limite au–dela de laquelle l'hypothèse de quasi–staticité n'est plus valable. Cependant, la vitesse du son dans un métal étant de l'ordre de $5000\ m/s$ (voir le tableau p. 16), bien avant que cette limite ne soit atteinte, les déformations dues à la collision dépassent la limite d'élasticité des matériaux. L'hypothèse d'élasticité est par conséquent la condition la plus restrictive de la théorie de l'impact de Hertz.

En gardant l'approche quasi–statique de Hertz, le problème de l'impact d'une sphère sur un plan indéformable a été traité récemment [24] sans négliger la déformation globale de la sphère et en tenant compte de l'influence de la courbure locale de la surface sphérique sur l'évaluation de la force de contact résultante. La durée de collision alors trouvée est plus grande que celle obtenue par la théorie de Hertz mais la correction reste cependant peu importante [7].

6. Se reporter à la Ref. [23], pour l'expression exacte de ce critère.

7. L'écart relatif est de 2,5% pour une sphère en acier, de rayon $3\ cm$, heurtant le plan indéformable avec une vitesse d'impact de $1\ m/s$.

La collision sphère–plan

L'expression analytique de la durée d'impact, lors d'une collision entre deux corps, est formulée dans de nombreux ouvrages [13, 14, 15, 20]. Nous nous restreindrons ici à présenter le cas de la collision entre une sphère et un plan.

Considérons une sphère de rayon R, de masse m et de vitesse v_{imp} rentrant en collision avec un plan immobile, semi–infini et supposé sans frottement. Dès l'instant où la sphère rencontre le plan, en un point de contact O, des forces de compression F apparaissent et donnent alors naissance à des déformations des deux corps au voisinage du point O. On notera, par la suite, δ la distance d'interpénétration entre ces deux corps, due aux déformations élastiques. Au cours de la collision, la vitesse de la sphère est alors modifiée et s'écrit

$$v(t) = \frac{d\delta}{dt} \ , \tag{I.30}$$

où t est le temps à partir du début de l'impact. En utilisant la relation entre F et δ donnée par l'Eq. (I.23), pour un contact élastique statique entre une sphère et un plan, l'énergie potentielle de déformation s'écrit, à une constante près,

$$E_{pot} = \frac{2}{5} K \delta^{5/2} \ , \tag{I.31}$$

où K est le cœfficient du contact sphère–plan de la loi de Hertz. En vertu de la conservation de l'énergie lors d'une collision élastique, il vient

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + \frac{4K}{5m}\delta^{5/2} = v_{imp}^2 \ . \tag{I.32}$$

Lorsque la vitesse v de la sphère s'annule ($d\delta/dt = 0$), l'interpénétration est alors maximale pour

$$\delta_{max} = \left(\frac{5m}{4K}\right)^{2/5} v_{imp}^{4/5} \ . \tag{I.33}$$

Puisque le contact est parfaitement élastique, la déformation est parfaitement réversible. Ainsi, le temps que met l'interpénétration δ pour passer de sa valeur initiale $\delta = 0$ à δ_{max} puis pour revenir à sa valeur initiale, correspond au temps total de la collision τ qui s'écrit, en utilisant l'Eq. (I.32),

$$\tau = 2 \int_0^{\delta_{max}} \frac{d\delta}{\sqrt{v_{imp}^2 - \frac{4K}{5m}\delta^{5/2}}} \ . \tag{I.34}$$

En changeant la variable d'intégration de l'Eq. (I.34) par $x = \delta/\delta max$ et en utilisant

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{5/2}}} = \frac{2}{5}\mathcal{B}\left[\frac{2}{5} \ , \ \frac{1}{2}\right] = \frac{2}{5}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma[2/5]}{\Gamma[9/10]} \ , \tag{I.35}$$

avec $\mathcal{B}[y,z]$, la fonction Beta[8] des réels positifs y et z, et $\Gamma[z]$ la fonction Gamma[9] du réel z, la durée de la collision est

$$\tau = \frac{4\sqrt{\pi}}{5}\frac{\Gamma[2/5]}{\Gamma[9/10]}\left(\frac{5m}{4K}\right)^{2/5} v_{imp}^{-1/5} \ . \tag{I.36}$$

8. Pour une définition de la fonction Beta voir l'équation 8.380.11 de la Ref. [25].
9. Pour une définition de la fonction Gamma voir les équations 8.310.1 et 8.384.1 de la Ref. [25].

En substituant l'Eq. (I.24) et la densité de la sphère $\rho = 3m/(4\pi R^3)$ dans l'Eq. (I.36), on remarque que la durée de la collision est proportionnelle au rayon de la sphère et inversement proportionnelle à $v_{imp}^{1/5}$.

La force maximale F_{max} ayant lieu au cours de la collision entre le plan et la bille est, d'après l'Eq. (I.23),

$$F_{max} = K\delta_{max}^{3/2}. \tag{I.37}$$

En utilisant les Eqs. (I.24) et (I.33), l'Eq. (I.37) devient

$$F_{max} = \left(\frac{5m}{4}\right)^{3/5} K^{2/5} v_{imp}^{6/5}. \tag{I.38}$$

Enfin, Deresiewicz [26] a déterminé numériquement l'évolution de l'interpénétration δ pendant la collision et a montré qu'elle pouvait être approchée selon

$$\delta(t) \simeq \delta_{max} \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right), \qquad 0 \leq t \leq \tau \ . \tag{I.39}$$

Pour une sphère en acier inoxydable de rayon $R = 2,5\ cm$ tombant d'une hauteur h sur un plan de même nature, l'ordre de grandeur du temps de collision est, d'après les Eqs. (I.24) et (I.36) et les valeurs numériques du tableau p. 16,

$$\begin{aligned} \tau &\simeq 130\ \mu s \quad \text{pour} \quad h = 1\ m\ , \\ \tau &\simeq 250\ \mu s \quad \text{pour} \quad h = 1\ mm\ , \end{aligned} \tag{I.40}$$

tandis que l'interpénétration maximale est, d'après les Eqs. (I.24), (I.33) et le tableau p. 16,

$$\begin{aligned} \delta_{max} &\simeq 0,2\ mm \quad \text{pour} \quad h = 1\ m\ , \\ \delta_{max} &\simeq 10\ \mu m \quad\ \ \text{pour} \quad h = 1\ mm\ . \end{aligned} \tag{I.41}$$

I.4 La collision inélastique

La théorie de Hertz de l'impact élastique, présentée au § I.3.2, ne tient pas compte de l'énergie dissipée au cours d'un choc. Cependant, en pratique, de l'énergie est toujours perdue lors d'une collision. Cette perte d'énergie, assimilable à une dissipation effective, provient de phénomènes de différentes natures et est généralement quantifiée par le *cœfficient de restitution* ϵ, défini, lors d'une collision binaire, selon

$$\epsilon \equiv \frac{v_f}{v_{imp}}, \tag{I.42}$$

où v_{imp} et v_f représentent respectivement les vitesses relatives avant et après le choc. Les deux cas extrêmes $\epsilon = 1$ et $\epsilon = 0$ correspondent, respectivement, à la limite élastique et complètement inélastique. Ce cœfficient est généralement considéré comme une constante empirique inhérente aux matériaux entrant en collision. Mais, en réalité, il est fonction de la vitesse d'impact [10] et des dimensions des corps en collision, ainsi que de leurs propriétés

10. Observée pour la première fois en 1834 par Hodgkinson, la dépendance du cœfficient de restitution avec la vitesse d'impact a été étudiée expérimentalement par Raman [27] en 1918.

élastiques et viscoélastiques. Nous examinerons ci–dessous les différents mécanismes de perte d'énergie intervenant au cours d'une collision et conduisant ainsi à une valeur du cœfficient de restitution inférieure à l'unité.

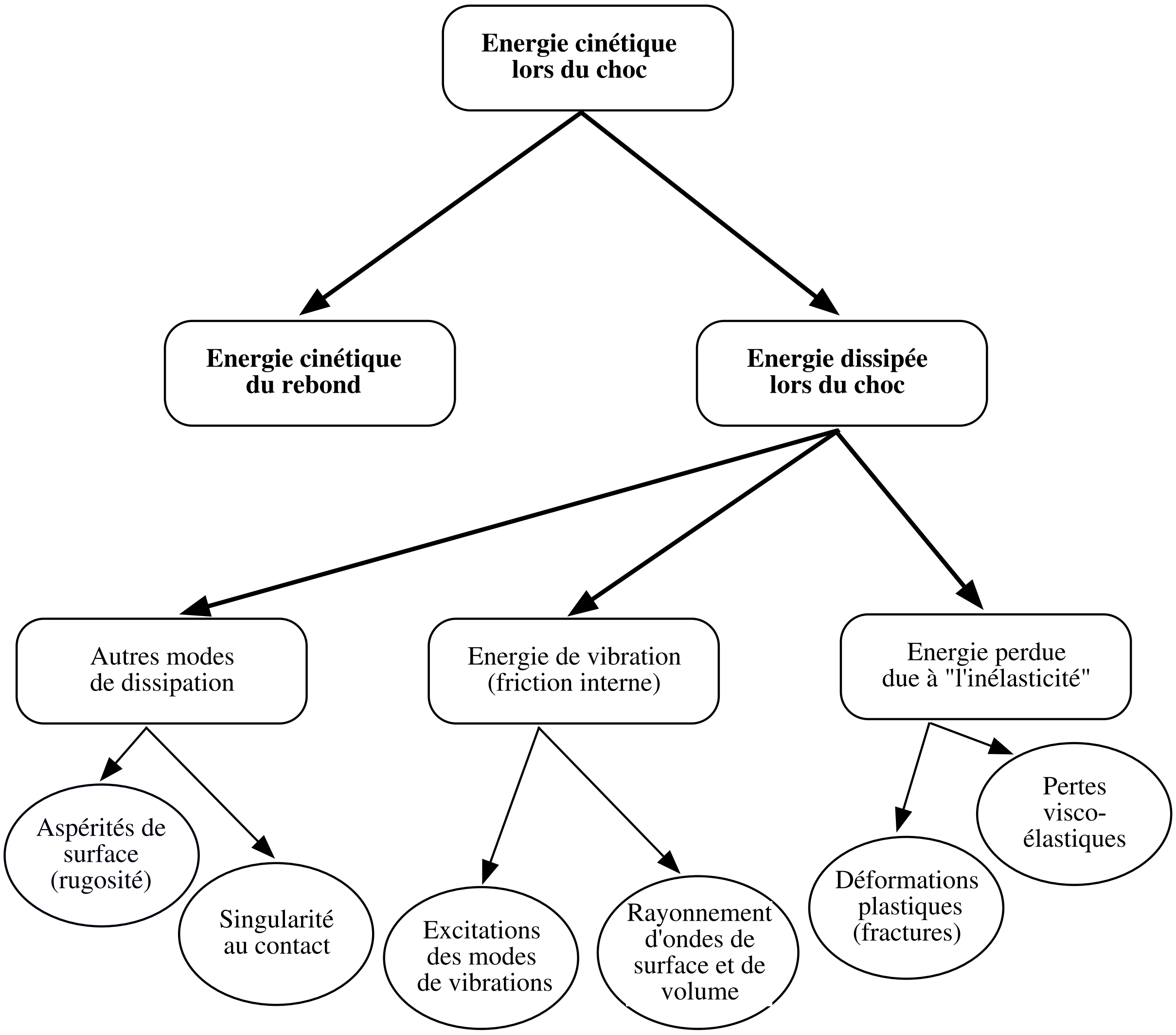


FIG. I-3 – *Schéma retraçant les divers mécanismes de dissipation possible lors d'une collision réelle entre une bille et un plan immobile.*

Considérons le cas non restrictif d'une sphère entrant en collision normale avec un plan immobile. Le choc est élastique si toute l'énergie cinétique de collision est convertie en énergie de déformation élastique, lors du processus de déformation, puis reconvertie en énergie cinétique pour que la bille rebondisse. En pratique, une très faible quantité d'énergie est toujours dissipée lors d'un tel cycle de charge et de décharge. Plusieurs mécanismes peuvent être à l'origine de cette dissipation et se regroupent en trois grandes classes (voir Fig. I-3) :

- perte d'énergie due aux vibrations rayonnées dans la cible (ondes de surface et de volume et modes de vibrations) et aux vibrations résiduelles stockées dans la bille après la collision ;

- énergie dissipée due à *l'inélasticité* des corps en collision pouvant provenir soit des propriétés viscoélastiques, soit de la déformation plastique de la bille et de la cible ;

- autres modes de dissipation possible dues aux aspérités de surface et aux *singularités* de contact.

I.4.1 Energie dissipée sous forme d'ondes élastiques

Pour une collision décrite par la théorie de Hertz, ne faisant pas intervenir de déformations plastiques ni de vibrations de flexion de la cible, l'énergie absorbée par la cible, lors de l'impact, sous forme d'ondes élastiques a été étudiée théoriquement par Hunter [23] puis par Reed [28]. Ils ont obtenu une expression du cœfficient de restitution et ont montré que l'énergie dissipée sous cette forme décroît lorsque la vitesse d'impact diminue. Ces études sont en accord avec les mesures du cœfficient de restitution lors d'impacts de billes en acier sur des plaques de verre, d'acier ou de tungstène [28, 29]. Pour différentes vitesses d'impact et une épaisseur de cible grande devant le diamètre de la bille, afin de pouvoir négliger l'énergie dissipée sous forme de vibrations de flexion de la cible, Tillett [29] reporte que l'énergie perdue par émission d'ondes élastiques est de l'ordre de 1%. Puisque l'énergie d'une onde élastique dépend des constantes élastiques du matériau dans lequel se propage l'onde, l'énergie dissipée sous cette forme sera nécessairement petite (de l'ordre de 1%) quel que soit le matériau utilisé, puisque les constantes élastiques pour différents matériaux sont du même ordre de grandeur que celles du verre ou de l'acier (*cf.* tableau p. 16).

I.4.2 Energie dissipée sous forme de vibrations de flexion de la cible

Le cœfficient de restitution est indépendant de la taille finie de la cible, si celle–ci est suffisamment épaisse, c.-à-d. supérieure de quelques diamètres de bille impactante [29, 30, 31]. Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, le cœfficient de restitution diminue lorsque la vitesse d'impact augmente. Au cours de l'impact d'une sphère de rayon R sur une plaque supposée infiniment étendue et d'épaisseur finie H, et la théorie de Zener [31] montre que l'énergie dissipée sous forme de modes de flexion de la cible augmente avec la vitesse d'impact et le rapport R/H. Bien qu'il serait nécessaire de considérer tout les modes de vibration pour une étude complète, pour une plaque de faible épaisseur le mode le plus important est celui de flexion [29], la théorie de Zener donne alors une bonne approximation. En outre, cette étude ne tient pas compte des autres mécanismes de dissipation possibles (sous forme d'ondes élastiques, de déformations plastiques et de nature viscoélastique). Zener déduit que l'expression du cœfficient de restitution ϵ est une fonction d'un seul paramètre sans dimension λ, appelé *paramètre d'inélasticité* du choc, et défini comme

$$\lambda \equiv \frac{\pi^{3/5}}{\sqrt{3}} \left(\frac{\rho_s}{\rho_p}\right)^{3/5} \left(\frac{v_{imp}}{v_0}\right)^{1/5} \left(\frac{R}{H}\right)^2 \left(\frac{\tilde{E}_s}{\tilde{E}_s + \tilde{E}_p}\right)^{2/5}, \tag{I.43a}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{\tilde{E}_p}{\rho_p}} \quad \text{et} \quad \tilde{E}_i = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \quad \text{avec} \quad i = s, p\ ; \tag{I.43b}$$

v_{imp} est la vitesse d'impact de la bille ; E_s, ν_s, ρ_s sont, respectivement, le module d'Young, le cœfficient de Poisson et la densité de la sphère et E_p, ν_p, ρ_p les quantités correspondantes pour la plaque. La dépendance du cœfficient de restitution ϵ avec λ, qui est obtenue par intégration numérique d'une équation différentielle, est telle que ϵ décroît très rapidement lorsque λ augmente (pour $\lambda = 0$; $\epsilon = 1$ et pour $\lambda = 0,5$; $\epsilon = 0,44$). Ainsi, pour une épaisseur de cible H suffisamment grande devant R, le cœfficient de restitution est indépendant de la vitesse d'impact. L'énergie dissipée sous forme de vibrations de flexion est alors négligeable. Enfin, notons que pour une vitesse d'impact de $1,1\ m/s$ et lorsque le rapport entre l'épaisseur de la cible en verre et le diamètre d'une bille en acier trempé varie de 19 à 2,4 ; Koller *et al.* [32] ont montré que l'énergie perdue varie de 0,7% à 3,6% correspondant, respectivement, aux cas où l'énergie dissipée est due exclusivement à l'émission d'ondes élastiques et à l'effet combiné de l'émission d'ondes élastiques et d'oscillations de flexion de la cible.

I.4.3 Energie dissipée due aux propriétés viscoélastiques

La dissipation viscoélastique lors d'une collision est due au fait qu'un solide possède une viscosité intrinsèque. Un tel solide est habituellement représenté par un modèle constitué d'un ressort et d'un amortisseur en parallèle. En ne tenant compte que des effets dissipatifs de cette nature, Kuwabara et Kono [33] puis récemment Hertzsch [34] et Brilliantov [35] ont généralisé le calcul de Hertz à des matériaux viscoélastiques, en mettant à profit la similitude entre le tenseur des contraintes élastiques et le tenseur des contraintes visqueuses. Dans le régime quasi–statique, ils ont obtenu une expression de la force de contact entre deux corps viscoélastiques s'écrivant, dans le cas d'un contact sphère–plan,

$$F = K\left(\delta^{3/2} + \frac{3}{2} D \delta^{1/2} \frac{d\delta}{dt}\right), \qquad \text{(I.44)}$$

où D est un cœfficient de dissipation dépendant des propriétés élastiques (module d'Young et cœfficient de Poisson) et visqueuses (cœfficient de viscosité en volume et en cisaillement) des deux matériaux constituant la sphère et le plan. Une expression du cœfficient de restitution est alors obtenu [33], pour une force visqueuse donnée par l'Eq. (I.44) et dans la limite $\epsilon \to 1$, selon $1 - \epsilon \sim v_{imp}^{1/5}$. Cette dépendance du cœfficient de restitution avec la vitesse d'impact a été vérifiée expérimentalement [33] et comparée [34, 35] à d'autres résultats expérimentaux [36, 37, 38].

I.4.4 Energie dissipée due aux déformations plastiques

Lorsque la vitesse d'impact dépasse une certaine vitesse critique, le choc d'une sphère sur une plaque produit des déformations élastique–plastiques sur les surfaces des deux corps impactants. De l'énergie est alors nécessaire pour produire de telles indentations plastiques. Cette vitesse critique est très petite pour la majorité des choc entre corps métalliques[11]. A des vitesses beaucoup plus élevées des déformations complètement plastiques de nature irréversible ont lieu. Lorsque la vitesse limite pour produire de telles déformations est atteinte[12], les études expérimentales [27, 39, 40] et théoriques[13] [20, 40] montrent que le cœfficient de restitution est proportionnel à la puissance $-1/4$ de la vitesse d'impact. Lorsque les vitesses d'impact sont comprises entre la vitesse d'impact critique pour produire des indentations élastiques–plastiques et celle pour produire des déformations complètement plastiques, le cœfficient de

11. La vitesse d'impact critique pour produire des indentations plastiques dans les métaux est de l'ordre de $0.1\ m/s$ (voir la Table 11.3 p. 366 de la Ref. [20])

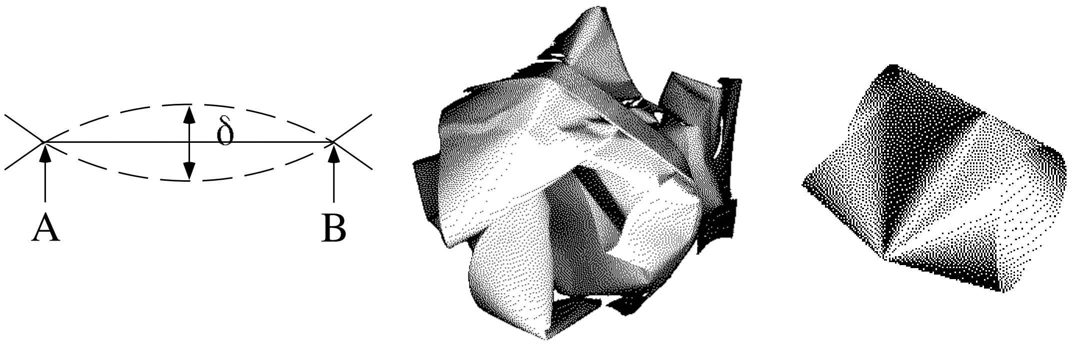
12. La vitesse d'impact critique pour produire des indentations complètement plastiques dans les métaux est de l'ordre de $5\ m/s$ (voir la Table 11.3 p. 366 de la Ref. [20])

13. Voir aussi la Ref. [41] pour une approche théorique différente.

restitution est pratiquement constant à basse vitesse et diminue lentement à plus haute vitesse [20, 22, 30, 42, 43].

I.4.5 Energie dissipée due aux singularités de contact

Lorsque deux corps sont comprimés l'un par rapport à l'autre (voir Fig. I-1), une région de contact est créée. Dans le cas de deux sphères ou d'une sphère et d'un plan, le disque de contact est délimité par une ligne circulaire définie comme l'intersection entre la zone de contact et les surfaces des corps. Cette ligne est une ligne composée d'une infinité de point *anguleux* (voir Fig. I-4(a)). Un tel comportement se rencontre aussi lorsqu'une feuille de papier est froissée ou lors du flambage d'une tôle métallique, puisque ces actions donnent naissance à des déformations localisées autour de points et de lignes anguleux séparant deux surfaces planes selon un certain angle (voir Fig. I-4(b–c)). Récemment, il a été montré [44, 45], de façon théorique et numérique, que la plus grande partie de l'énergie de déformation est concentrée pour la formation de ces points et lignes. Ainsi, au cours de la compression de deux sphères, on peut se demander [46] quelle quantité d'énergie est nécessaire pour la création et l'évolution de la ligne circulaire anguleuse et quelle est la quantité d'énergie dissipée au cours de ce processus. De plus, si l'on suppose que l'interpénétration δ entre les deux sphères, croît au cours du temps, comme $\delta \sim t$, l'Eq. (I.4) montre que la rayon du disque de contact a, et par conséquent la ligne circulaire qui le délimite, se comporte comme $\sqrt{t}$. Ainsi, la vitesse à laquelle se propage cette ligne au cours du temps croît comme $1/\sqrt{t}$ et tend alors vers une limite singulière au tout début de la compression. Par conséquent, on peut se demander si, au tout début du choc, cette singularité (déformation initiale de grande vitesse) se manifeste par une dissipation finie [47].



(a) (b) (c)

FIG. I-4 – *(a) Coupe verticale des sphères en contact de Hertz. L'intersection entre la ligne de contact et les deux lignes (assimilées à des lignes droites dans la région très proche du contact) fait apparaître deux points anguleux A et B. Les traits en pointillés correspondent au cas où les sphères s'interpénétreraient sans se déformer ; (b) Morceau de papier froissé avec les mains (d'après la Ref. [44]) ; (c) Simulation du flambage d'un cylindre (d'après la Ref. [44]).*

Chapitre II

La disparition de la « singularité collisionnelle »

II.1 Introduction

La dynamique des milieux granulaires donne lieu à une très grande variété de phénomènes tels que la convection [5, 6], les excitations de la surface libre [7, 8, 9] et la fluidisation [10, 11, 12]. Dans tous les cas, le rôle des collisions inélastiques entre deux grains ou entre un grain et le conteneur est fondamental pour la compréhension du comportement dynamique de tels milieux dissipatifs. Dans cet esprit, des systèmes de dimensions beaucoup plus grandes peuvent être aussi considérés comme des « gaz granulaires ». Par exemple, l'évolution dynamique et l'épaisseur des anneaux planétaires, *e.g.* ceux de Saturne, sont principalement déterminées par les propriétés des nombreuses collisions inélastiques ayant lieu entre les particules constituant ces anneaux [36, 37, 38].

Tandis qu'au fil des ans de nombreuses tentatives [12, 48, 49, 50, 51] ont été entreprises afin de formaliser la rhéologie complexe des gaz granulaires dissipatifs, quelques récentes études théoriques et numériques montrent le rôle déterminant des collisions inélastiques à l'intérieur de ces milieux qui révèlent alors un comportement dynamique surprenant. Par exemple, lorsqu'un gaz granulaire de sphères dures inélastiques se trouve initiallement dans un état thermalisé, puis évolue librement sans apport d'énergie ; la dynamique inélastique d'un tel système, en train de « se refroidir », conduit à la formation de quatre régimes distincts : le régime cinétique, le régime de cissaillement, le régime dit « en amas » et le régime dit « effondré » [52]. Deux d'entre eux conduisent à la formation de structures pour des systèmes 1D ou 2D : les amas [53, 54] ou « l'effondrement inélastique » [54, 55, 56, 57]. L'effondrement inélastique est un type spécial d'amas tel que l'inélasticité conduise un groupe de particules à avoir un nombre infini de collisions en un temps fini. Dans un l'effondrement inélastique, les particules viennent effectivement en contact les unes avec les autres, tandis que dans un amas les particules sont très proches mais ne sont pas en contact. La plupart des personnes travaillant sur l'effondrement inélastique considère que ce phénomène est qualitativement analogue au comportement d'une bille inélastique rebondissant infiniment sur le sol. En effet, si au cours de chaque rebond, on suppose que la collision est instantanée et inélastique, il est facile de montrer que la bille s'immobilise après avoir rebondit un nombre infini de fois en un temps fini. Cet effet de nature théorique sera appelé, par la suite, « la singularité collisionnelle ».

De même que le rôle des collisions inélastiques, le rôle des contacts entre grains est fondamental pour l'étude des milieux granulaires puisque la dissipation à lieu principalement au cours de ces contacts. Dans cet esprit, l'étude des collisions binaires normales peut faciliter la compréhension des propriétés de ces contacts et constitue une première étape vers l'étude des collisions à plusieurs corps (voir le Chap. III). Bien qu'il y ait eu énormément de travaux reliés à la dynamique des collisions binaires inélastiques [20, 39, 58] ainsi qu'à la mesure de l'énergie perdue au cours de tels collisions [22, 23, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 48], il y a une très grande dispersion dans les résultats obtenus. Cependant, à grande vitesse d'impact, c.-à-d. lorsque des déformations complètement plastique ont lieu (voir le § (I.4.4)), l'évolution du cœfficient de restitution [1] ϵ en fonction de la vitesse d'impact est très bien connue expérimentalement [39, 40] et théoriquement [20, 40]. A très basse vitesse d'impact, l'évolution de ϵ avec la vitesse d'impact ainsi que les mécanismes responsables d'une possible dissipation restent des problèmes ouverts.

Dans ce chapitre, nous étudions expérimentalement le comportement d'une bille rebon-

1. Pour une collision binaire, le cœfficient de restitution ϵ a été définie au § (I.4) selon l'Eq. (I.42).

dissant sur un plan horizontal, massif et stationnaire. Initialement, la bille est lâchée sous l'effet de la gravité, sans vitesse, d'une certaine hauteur au dessus de ce plan. Ce système est bien adapté pour savoir si la singularité collisionnelle ainsi que, par extension, l'effondrement inélastique, ne sont que des concepts de nature théorique où s'ils possèdent aussi de réelles ramifications expérimentales. Bien évidemment, expérimentalement, un nombre infini de rebonds en un temps fini ne sera jamais atteint puisqu'en pratique la durée d'une collision est non nulle. Cependant, il n'est pas trivial de comprendre comment la singularité collisionnelle doit disparaître et au détriment de quel mécanisme. Finalement, ce problème soulève plusieurs questions : Est-ce que la durée entre deux rebond successifs tend vers zéro ? Combien de rebonds effectue la bille avant de s'immobiliser ? Comment évolue le cœfficient de restitution et la durée de collision lorsque la vitesse d'impact de la bille tend vers zéro ? Quels sont les mécanismes de perte d'énergie au cours d'un rebond à très basse vitesse d'impact ?

Un modèle élementaire décrivant les rebonds d'une bille inélastique sur une surface horizontale sera présenté au § (II.2). Dans ce modèle, pour chaque rebond, la collision sera supposée instantanée. Ce modèle montre alors que la bille s'immobilise après avoir effectué un nombre infini de rebonds en un temps fini. Cependant, les résultats expérimentaux montrent qu'il est nécessaire de tenir compte de la durée finie des rebonds. Le modèle élementaire est par conséquent inapproprié pour décrire de façon réaliste le comportement de la bille. Le dispositif expérimental sera présentée au § (II.3). Les résultats expérimentaux seront exposés et analysés au § (II.4). Dans ce paragraphe nous présentons l'observation des rebonds de la bille jusqu'à son immobilisation. De plus, lorsque la durée d'une collision devient de l'ordre du temps de vol entre deux rebonds successifs, nous observons que la bille ne rebondit plus mais oscille sur le plan, avec une période caractéristique. A cause de la dissipation inhérente au système expérimental, l'amplitude des oscillations de la billes décroît vers zéro jusqu'à l'immobilisation de la bille. Pour chaque rebond, les mesures du cœfficient de restitution et du temps de collision ont été réalisées. Le cœfficient de restitution est mesuré essentiellement constant et proche de 1 au cours de pratiquement tous les rebonds jusqu'à ce qu'il décroisse lorsque la vitesse d'impact tend vers zéro, c.-à-d. pour les derniers rebonds. La durée de collision est en bon accord avec celle calculée par la théorie de Hertz (voir le Chap. I) au cours de pratiquement tous les rebonds. Pour les derniers rebonds, c.-à-d. à très basse vitesse d'impact, le temps de collision est plus long que celui prévu par la théorie de Hertz. Au § (II.5), nous présenterons un modèle non dissipatif ainsi que les résultats qui en découlent. Ce modèle permet de décrire à la fois la dynamique du contact des derniers rebonds et les oscillations de la bille sur le plan. Une expression analytique de la période des oscillations de la bille sera obtenue ainsi qu'une expression intégrale du temps de collision. Finalement, au § (II.6), nous présenterons un modéle numérique dissipatif qui permettra de donner une interprétation de l'évolution du cœfficient de restitution en fonction de la vitesse d'impact de la bille.

II.2 Modèle élémentaire de la chute d'une sphère rebondissant sur une surface plane

Une bille de masse m est lâchée d'une hauteur h_0 sans vitesse initiale. La bille tombe verticalement sur la surface horizontale parfaitement lisse, d'un corps parfaitement rigide de masse infinie, puis rebondit un certain nombre de fois avant de s'immobiliser.

Lors de la chute libre, on suppose que la bille n'est soumise qu'à l'action de la gravité. On négligera par la suite la force de frottement due à l'air. De plus, lors de chaque rebond, on suppose que le temps de contact est négligeable, c'est–à–dire que les chocs sont considérés comme instantanés. Les chocs sont supposés inélastiques : une partie de l'énergie de la bille est dissipée lors de chaque choc, ce qui revient à dire que la vitesse de la bille après un choc est plus faible que celle qu'elle possédait avant ce choc et que, par conséquent, la hauteur des rebonds diminue au cours du temps. Soit ϵ le rapport entre la vitesse après le choc et la vitesse avant le choc. Ce rapport, appelé cœfficient de restitution (voir l'Eq. (I.42)), est supposé constant pour tous les rebonds. Comme la résistance de l'air est négligée, la vitesse de la bille avant le $n+1^{ième}$ rebond correspond à la vitesse que possédait la bille après le $n^{ième}$ rebond. Ainsi, si v_n est la vitesse de la bille avant le $n^{ième}$ rebond, ϵ s'écrit alors

$$\epsilon = \frac{v_{n+1}}{v_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \ . \tag{II.1}$$

En utilisant les notations de la Fig. (II-1) et le fait que ϵ reste constant quel que soit le choc, on peut exprimer la vitesse avant le $n^{ième}$ rebond en fonction du cœfficient de restitution et de la vitesse v_1 de la bille juste avant le premier impact

$$v_n = \epsilon v_{n-1} = \epsilon^n v_1 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \ . \tag{II.2}$$

On montre facilement, en utilisant la relation fondamentale de la dynamique pour un corps en chute libre, que la bille heurte le sol pour la première fois au bout d'un temps $t_0 = \sqrt{2h_0/g}$ avec une vitesse $v_1 = \sqrt{2h_0 g}$ où g représente l'accélération de la gravité.

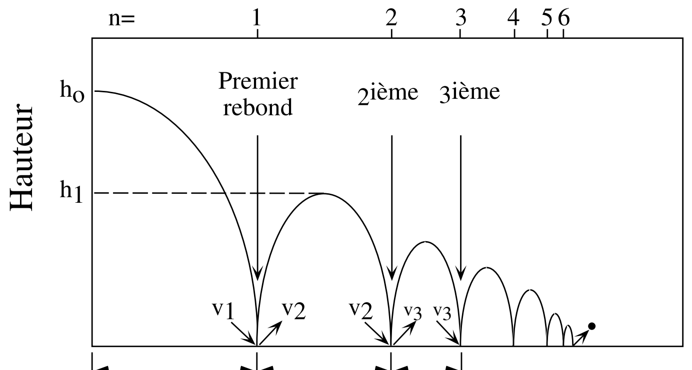


FIG. II-1 – *Représentation schématique des premiers rebonds.*

En utilisant l'Eq. (II.2) et la loi de la chute libre, on déduit que la hauteur h_n à laquelle s'élève la bille après le $n^{ième}$ rebond est

$$h_n = \epsilon^{2n} h_0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \ . \tag{II.3}$$

Soit t_n le temps de vol de la bille entre le $n^{ième}$ et le $n+1^{ième}$ rebond. Connaissant h_n, en procédant de la même façon que précédemment et en supposant que la durée d'une collision est nulle, on montre que

$$t_n = \epsilon^{n-1} t_1 = \epsilon^n \sqrt{\frac{8h_0}{g}} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \; . \tag{II.4}$$

La bille s'immobilise au bout d'un temps $\mathcal{T}_\infty$

$$\mathcal{T}_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} t_n = t_0 + t_1 \times \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n-1} = \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}, \tag{II.5}$$

puisque $\epsilon < 1$. Par conséquent, la bille s'immobilise après avoir rebondit un nombre infini de fois en un temps fini $\mathcal{T}_\infty$.

Soit ζ_n le temps écoulé entre le lâcher initial et le $n^{ième}$ rebond, c.-à-d. , $\zeta_n = \sum_{i=0}^{n} t_i$. La fréquence des rebonds ν_n pour le $n^{ième}$ rebond est alors

$$\nu_n \equiv \frac{dn}{d\zeta_n} = \frac{1}{\ln \epsilon}(\zeta_n - \mathcal{T}_\infty)^{-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots). \tag{II.6}$$

Par conséquent, la fréquence des rebonds tend vers l'infini lorsque la bille s'immobilise, c.-à-d. lorsque $\zeta_n \to \mathcal{T}_\infty$ ou $n \to \infty$. Ce phénomène est appelé « le son de la singularité » [54]. Cependant, comme on le verra, dans la partie expérimentale (voir le § (II.4.1) et la Fig. (II-3)), il est nécessaire de tenir compte de la durée finie des collisions. Ce modèle élémentaire, négligeant ces temps de collision, est donc inacceptable pour obtenir une description satisfaisante de la dynamique de la bille.

II.3 Dispositif expérimental

Une bille en carbure de tungstène, de 8 mm de diamètre, est maintenue à l'extrémité d'un tube vertical en laiton à l'intérieur duquel un vide partiel est obtenu à l'aide d'une pompe. La tolérance sur le diamètre et la sphéricité de la bille est respectivement $\pm$ 1 μm et $\pm$ 0, 8 μm. Le tube est fixé à une platine de translation micrométrique permettant un réglage très fin de la hauteur du lâcher initial. Une vanne permet une très lente arrivée d'air à l'intérieur du tube en laiton afin que la bille soit libérée sans vitesse initiale à l'aplomb d'un capteur d'impact piézoélectrique PCB $200B02$ vissé dans une plaque de duralumin de 30 cm de largeur et de longueur et de 2 cm d'épaisseur. L'ensemble est solidaire d'une table à pieds réglables afin d'obtenir une horizontalité optimale, comme le montre la figure (II-2). Le capteur d'impact est relié à un oscilloscope digital capable de faire des acquisitions « mono–coup » de 50000 points avec un taux d'échantillonnage allant jusqu'à 10 ns/pt. La hauteur du lâcher initial h_0 est de 2 mm afin d'éviter de se trouver dans la limite plastique du matériau constituant le capteur. Pour une telle hauteur de chute, la force de frottement de l'air sur le mouvement de la bille est négligeable (voir annexe B). Afin d'obtenir une bonne résolution sur l'oscilloscope (5 $\mu s/pt$), seuls les derniers rebonds sont enregistrés. Pour toutes les expériences, la durée totale des rebonds est de l'ordre de 1, 28 s et le retard au déclenchement de l'oscilloscope est de 1, 08 s. Seules les dernières 0, 20 s de signal sont donc enregistrées, ce qui correspond environ à une centaine de rebonds mesurables.

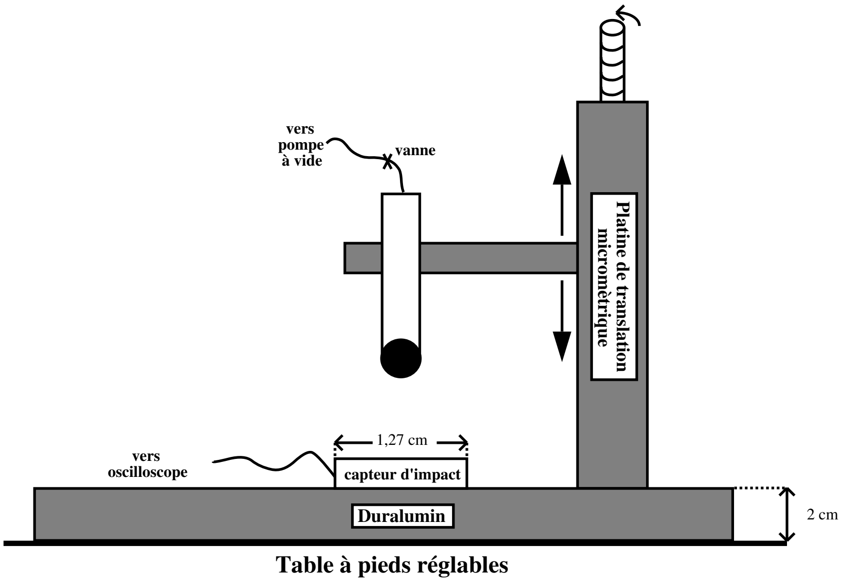


FIG. II-2 – *Dispositif expérimental. Le schéma n'est pas à l'échelle.*

La reproductibilité des mesures dépend fortement du lâcher de la bille (hauteur initiale fixe, pas de vitesse initiale de translation et de rotation), de la tolérance sur le diamètre de la bille et sur sa sphéricité, de l'état de surface de la cible ainsi que de son horizontalité. La principale caractéristique de ce dispositif (voir aussi la Ref. [59]) est qu'il libère la bille de façon reproductible et qu'il permet de s'affranchir des problèmes rencontrés avec d'autres méthodes de lâcher : soit avec un électro–aimant (influence de l'aimantation sur la bille induisant un courant qui modifie la reponse du capteur piézoélectrique), soit par l'intermédiaire d'un diaphragme et d'une vis (rotation de la bille au moment du lâcher). Une tolérance, sur le diamètre et sur la sphéricité de la bille, inférieure à $\pm$ 10 μm et $\pm$ 5 μm respectivement permet d'obtenir la totalité des rebonds sur le capteur jusqu'à l'arrêt de la bille. Pour des billes de natures différentes (*e.g.* verre, nylon, polyuréthane), qui possèdent des tolérances supérieures aux limites précédentes, il n'est pas possible de maintenir tous les rebonds sur le capteur, même par un réglage extrêmement précis de l'horizontalité. En effet, à chaque rebond, la bille acquiert une vitesse de rotation infime, vitesse due aux écarts de sphéricité et de diamètre, qui devient de plus en plus significative au fur et à mesure que le nombre des rebonds croît, jusqu'à ce que la bille rebondisse en dehors du capteur.

II.4 Résultats expérimentaux

II.4.1 Temps de collision

En pratique, la durée d'une collision étant non nulle, il est nécessaire d'introduire les variables suivantes : f_n, le temps de vol de la bille entre le $n^{ième}$ et le $n+1^{ième}$ rebond, d_n, le temps total écoulé entre le $n^{ième}$ et le $n+1^{ième}$ rebond, et τ_n la durée de la $n^{ième}$ collision

$$d_n = \tau_n + f_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \ . \tag{II.7}$$

Pour le modèle élémentaire du § (II.2), supposant $\tau_n = 0$ quel que soit n, on a évidemment $t_n = d_n = f_n$. La figure (II-3) montre l'évolution au cours de l'expérience de $\ln(f_n)$ et de $\ln(d_n)$ en fonction du « numéro » du rebond $n - N_0$. N_0 correspond au nombre de rebonds effectués par la bille pendant le retard au déclenchement de l'oscilloscope. Jusqu'à ce que les temps de collision deviennent significatifs, les deux courbes de la Fig. (II-3) restent confondues et sont alors décrites par une relation linéaire entre $\ln(t_n)$ et $n - N_0$ avec $t_n = d_n = f_n$ puisque $\tau_n \ll f_n$. Prenons le logarithme népérien des deux membres de l'Eq. (II.4), et identifions respectivement la pente et l'intersection à l'ordonnée de la ligne droite à $\ln(\epsilon)$ et à $\ln(\sqrt{8h_0/g}) + N_0 \ln(\epsilon)$. Nous mesurons alors expérimentalement les valeurs $\epsilon = 0,974$ et $N_0 = 80$. Ainsi, tant que $\tau_n \ll f_n$, le modèle élémentaire du § (II.2) est en accord avec les résultats expérimentaux puisque ϵ est constant.

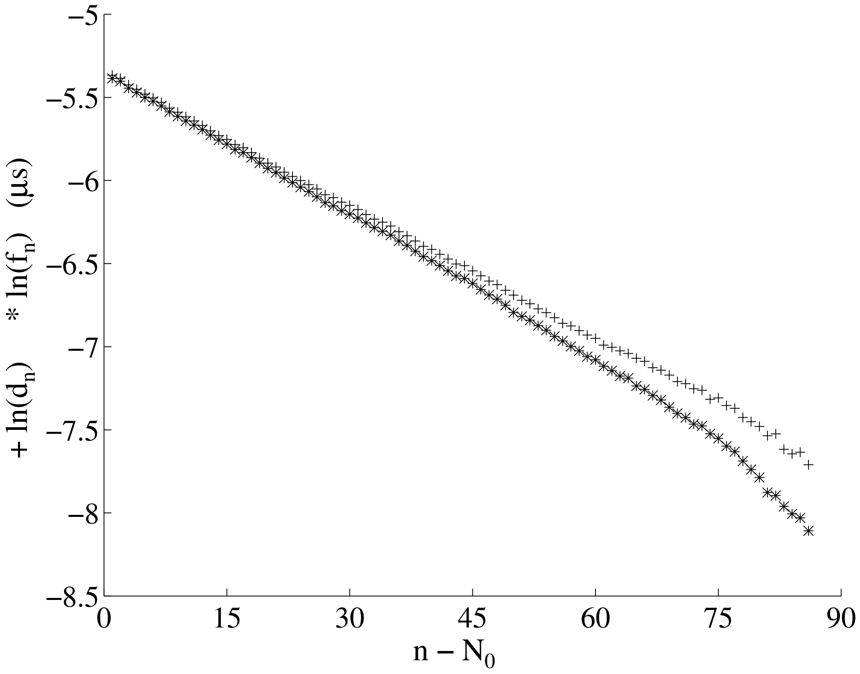


FIG. II-3 – *Evolution de* $\ln(f_n)$ $(*)$ *et* $\ln(d_n)$ $(+)$ *en fonction de* $n - N_0$ *pour une bille en carbure de tungstène lâchée d'une hauteur* $h_0 = 2$ *mm.* N_0 *correspond au nombre de rebonds effectués par la bille pendant le retard au déclenchement de l'oscilloscope (*1.08 *s). La durée entre les deux derniers rebonds mesurés est de* 301 μs $(*)$ *et de* 448 μs $(+)$.

En ne tenant pas compte de τ_n, Bernstein [60, 61] mesure une loi non linéaire entre $\ln(t_n)$ et n, lors de l'étude des 20 premiers rebonds d'une bille en acier lâchée d'une hauteur d'un mètre sur une plaque de marbre. Ses observations diffèrent considérablement des notres puisque sa hauteur de chute est 500 fois plus grande que la notre, et par conséquent une importante quantité d'énergie est dissipée lors de chaque impact (voir le § (I.4)). Il est à noter que Smith *et al.* [62] reprirent l'étude de Bernstein en interfaçant complètement l'expérience avec un ordinateur. Bien que leurs conditions expérimentales soient peu claires, leurs résultats semblent qualitativement similaires à ceux de Bernstein.

La théorie de Hertz, développée au § (I.3.2), prédit que le temps τ que dure la collision entre une bille de vitesse v et un plan au repos suit une loi $\tau \propto v^{-1/5}$ (voir l'Eq. (I.36)). Ainsi, d'après cette théorie, plus la vitesse avant le choc est petite, plus le temps que dure le choc doit être grand. Il est clair, d'après la Fig. (II-3), que le temps de collision croît avec le nombre de rebond. Les valeurs des temps de collision τ_n de chaque rebond sont déduites de la figure (II-3) selon l'Eq. (II.7). L'évolution de τ_n est représentée, sur la figure (II-4), en fonction de $v_n^{-1/5}$, les valeurs de v_n étant déduites des valeurs de f_n multipliées par le facteur $(g/2)$. La droite en traits pleins de la figure (II-4) correspond à $\tau = Av^{-1/5}$ dérivée de la théorie de Hertz. La constante A est déterminée expérimentalement par l'intermédiaire d'un deuxième oscilloscope enregistrant les deux premiers rebonds. La mesure du temps de collision du tout premier rebond ($\tau_1 = 52,4\,\mu s$), connaissant la hauteur de chute ($h_0 = 2\ mm$) donc la vitesse d'impact de la bille, permet de déduire alors la valeur de cette constante $A = 37,92 \times 10^{-6}\ m^{1/5}s^{4/5}$. La figure (II-4) est en très bon accord avec la théorie de Hertz jusqu'à des valeurs de $v_n^{-1/5} \simeq 3\ m^{-1/5}/s^{1/5}$. Au–delà de cette valeur, c'est–à–dire pour de très faibles valeurs de vitesse d'impact, correspondant aux derniers rebonds mesurés, un écart à la loi de Hertz semble se dessiner, malgré les erreurs expérimentales : le temps de collision a tendance à croître beaucoup plus rapidement que ne le laisserait présager la loi de Hertz.

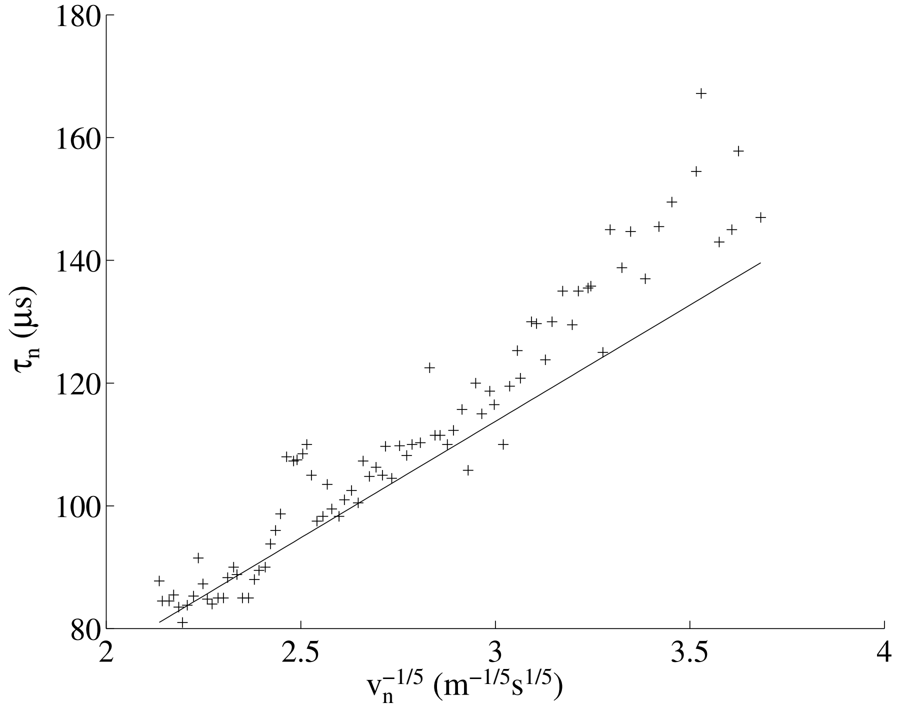


FIG. II-4 – *Durée du $n^{ième}$ rebond τ_n en fonction de $v_n^{-1/5}$. Les croix représentent les points expérimentaux. La droite d'équation $\tau = Av^{-1/5}$ est issue de la théorie de Hertz, avec $A = 37,92 \times 10^{-6}\ m^{1/5}s^{4/5}$.*

II.4.2 Période des oscillations de la bille sur le capteur

Le signal délivré, au cours du temps, par le capteur d'impact est reproduit sur la Fig. (II-5). Seule la fin du signal a été représentée. La double flèche indique l'instant de la dernière mesure pour f_n et d_n de la Fig. (II-3) où la durée entre les deux derniers rebonds mesurés ($300\,\mu s$) est de l'ordre de deux fois le temps de collision du dernier rebond mesuré. Lorsque le temps de collision devient de l'ordre du temps de vol entre deux rebonds, il n'est plus possible de définir la fin et le début de deux chocs successifs et ainsi de mesurer précisément f_n ou d_n.

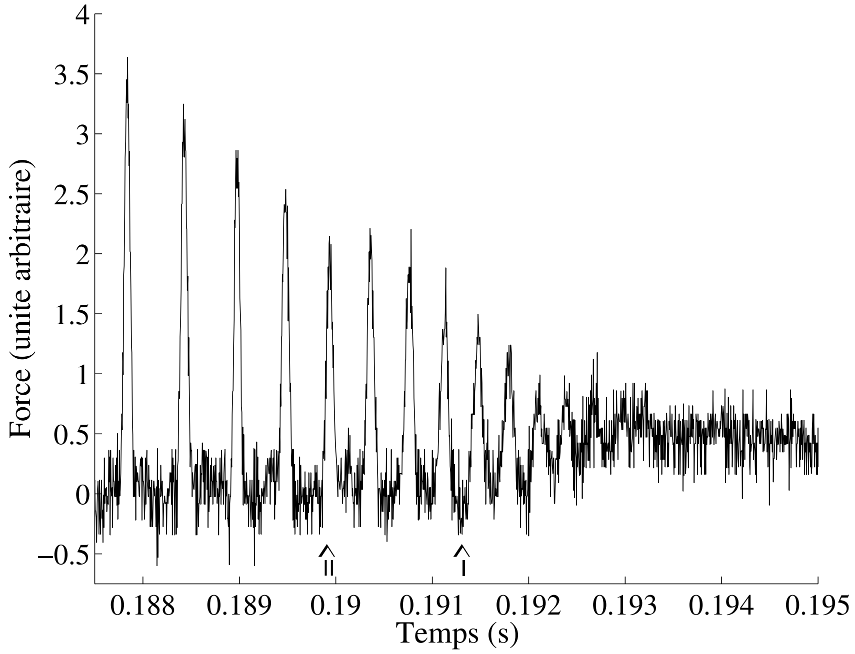


FIG. II-5 – *Signal délivré par le capteur d'impact pour les ultimes rebonds. La double flèche indique l'instant de la dernière mesure pour f_n et d_n. La flèche simple indique le moment où la bille commence à osciller sur le capteur sans décoller de ce dernier.*

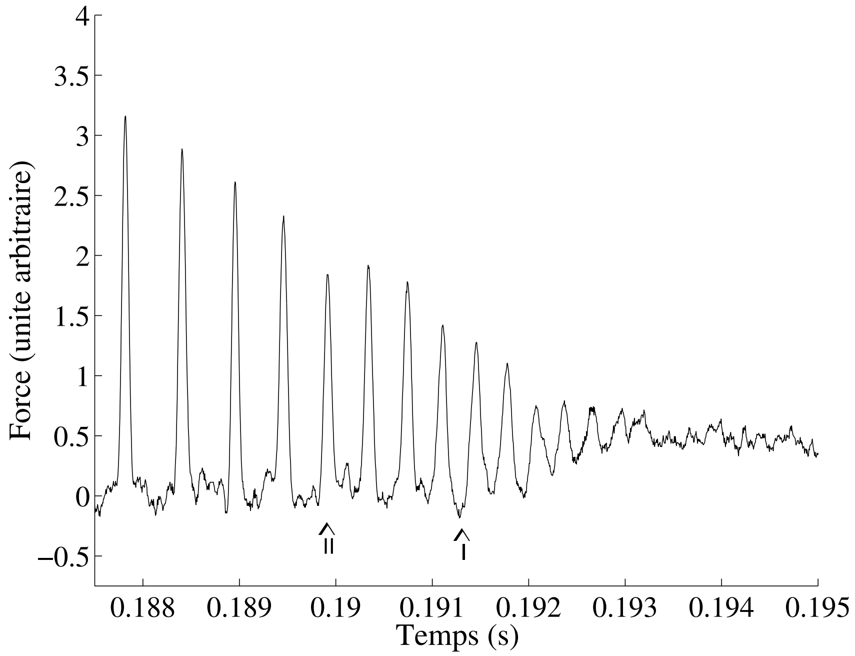


FIG. II-6 – *Lissage du signal de la Fig. (II-5) par une moyenne arithmétique sur 8 points (35 μs). La double flèche indique l'instant de la dernière mesure pour f_n et d_n. La flèche simple indique le moment où la bille commence à osciller sur le capteur sans décoller de ce dernier.*

En effet, il est aisé de déterminer le début et la fin des chocs pour les premiers rebonds en raison des variations rapides du signal, tandis que pour les derniers rebonds (situés entre la double flèche et la flèche simple de la figure (II-5) ou (II-6)), ces variations sont extrêmement lentes.

La flèche simple indique la fin des rebonds et le début des oscillations du signal. En effet, comme on le voit sur la Fig. (II-5), au–delà de la flèche le signal a tendance à osciller jusqu'à ce que le bruit expérimental ne permette plus de détecter ces oscillations d'amplitude trop faible. Pour des temps supérieurs à celui indiqué par la flèche, la force ressentie par le capteur oscille autour d'une valeur moyenne constante et non nulle. Ceci provient du fait que le capteur ressent le poids de la bille : la bille semble ne plus décoller et « passe tout son temps » sur le capteur en oscillant avant de s'immobiliser.

Après le dernier rebond, la vitesse d'impact est si faible que la bille n'a pas le temps de finir son cycle quasi–élastique de charge puis de décharge avant de ressentir à nouveau de façon significative la pesanteur, et ne peut ainsi décoller du capteur.

Afin de mesurer l'ordre de grandeur de la période des oscillations de la bille, le signal, enregistré sur l'oscilloscope et représenté partiellement sur la Fig. (II-5), a été transféré vers un ordinateur pour pouvoir l'analyser. Pour augmenter le rapport signal sur bruit, chaque point de la courbe lissée de la Fig. (II-6) a été redéfini à partir d'un point du signal original, de même abscisse, qui a été moyenné de façon arithmétique par les 4 points qui le précédaient et les 4 qui le suivaient. Nous pouvons alors mesurer la fréquence typique du signal de la courbe lissée de la Fig. (II-6) pour les cinq dernières oscillations, conduisant à la période des oscillations de la bille

$$T_{exp} = 297\ \mu s \pm 20\ \mu s \tag{II.8}$$

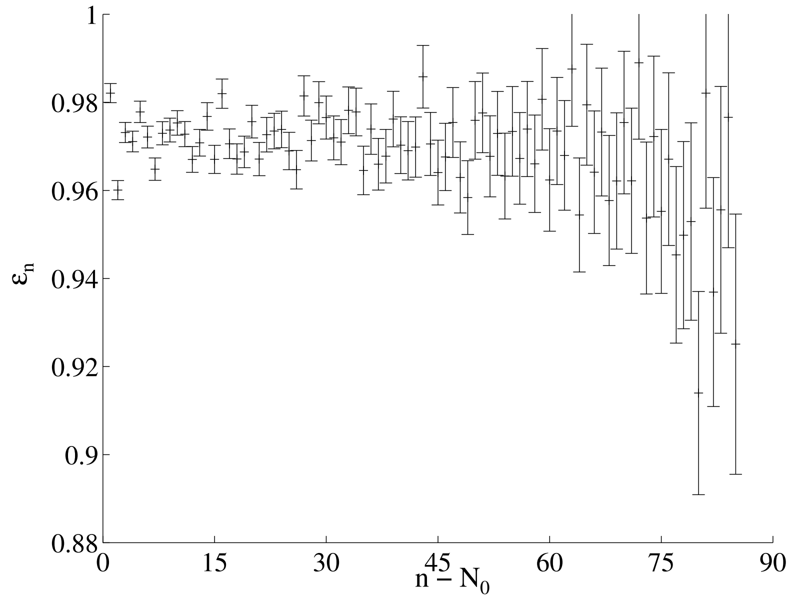


FIG. II-7 – *Evolution du cœfficient de restitution en fonction du numéro du rebond pour une bille en carbure de tungstène lâchée d'une hauteur $h_0 = 2$ mm. N_0 correspond au nombre de rebonds effectués par la bille pendant le retard au déclenchement de l'oscilloscope $(1,08\ s)$. Les barres d'erreurs correspondent à $\pm\triangle\epsilon_n = \pm\triangle f_n(1+\epsilon_n)/f_n$ avec $\triangle f_n = 5\ \mu s$.*

II.4.3 Cœfficient de restitution

Pour une collision donnée, le cœfficient de restitution a été défini au § (I.4) selon l'Eq. (I.42) comme le rapport entre la vitesse de la bille après le choc sur celle avant le choc. Les valeurs du cœfficient de restitution sont déduites de celle des temps de vol entre deux rebonds successifs. En utilisant les notations des § (II.2) et (II.4.1), et le fait que la résistance de l'air est négligeable, le cœfficient de restitution, pour le $n^{ième}$ impact s'écrit

$$\epsilon_n = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{f_{n+1}}{f_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \; . \tag{II.9}$$

La figure (II-7) montre l'évolution du cœfficient de restitution ϵ_n en fonction du numéro du rebond pour $n > N_0$. Pour les premiers $N_0 = 80$ rebonds (correspondant au $1,08\ s$ du signal non présenté ici), le cœfficient de restitution est essentiellement constant et égal en moyenne à $0,97$. Pour $n > N_0$, la valeur du cœfficient de restitution, pour chaque rebond, est déduite, d'après l'Eq. (II.9), des dernières $200\ ms$ du signal enregistré par le capteur de force. Contrairement à l'hypothèse du modèle élémentaire du § (II.2), ϵ_n n'est pas une constante pour tous les rebonds mais fluctue autour de la valeur moyenne $0,97$ avant de décroître pour les derniers rebonds. Ainsi, le cœfficient de restitution n'est pas uniquement une propriété des matériaux entrant en collision, mais aussi une caractérisation de la dynamique du choc et notamment de la dissipation d'énergie qui a eu lieu au cours du choc.

Les différents mécanismes de dissipation d'énergie intervenant au cours d'un rebond ont été discuté au § (I.4). Essayons d'étudier l'importance relative de certains de ces mécanismes :

- Energie dissipée sous forme d'ondes élastiques

  La théorie de Hunter et Reed (voir le § (I.4)) appliquée à l'impact d'une bille en carbure de tungstène sur une plaque d'acier inoxydable[2] à une vitesse d'impact[3] de $0,2\ m/s$ conduit à une énergie dissipée sous forme d'ondes élastiques égale à $0,7\%$ de l'énergie cinétique de la bille avant l'impact. Par conséquent, la variation du cœfficient de restitution due à l'énergie perdue sous cette forme est inférieure à $0,7\%$ lorsque la vitesse d'impact décroît de $0,2$ à $0\ m/s$.

- Energie dissipée sous forme de vibrations de flexion de la cible

  Appliquons la théorie de Zener (voir le § (I.4)) à une bille en carbure de tungstène entrant en collision avec une plaque de duralumin, d'épaisseur $H = 20\ mm$, avec une vitesse $v_{imp} = 0,2\ m/s$. D'après les Eqs. (I.43), le paramètre d'inélasticité est alors très petit, c.-à-d. $\lambda = 0,0154$, correspondant à un cœfficient de restitution de 0,975. Pour ce calcul, les propriétés des matériaux en carbure de tungstène et en duralumin ont été utilisées (voir le tableau p. 16). La dépendance de ϵ avec la vitesse d'impact est ainsi inférieure à $2,5\%$. Expérimentalement, une étude préliminaire avec différentes épaisseurs de plaque ($H = 5\ mm$, $10\ mm$ et $15\ mm$) a montré que ϵ diminuait lorsque la vitesse d'impact augmentait. L'épaisseur finalement choisie ($H = 20\ mm$) conduit à ce que le cœfficient de restitution, à chaque rebond de la bille, soit constant et indépendant de la vitesse d'impact.

- Energie perdue due aux déformations plastiques

2. Le capteur de force recouvert d'acier inoxydable est assimilé à une plaque en acier inoxydable massif.
3. Une vitesse d'impact de $0,2\ m/s$ correspond à une hauteur de chute libre de $2\ mm$.

La vitesse de l'impact initial étant de $0,2\ m/s$, le critère énoncé au § (I.4) montre que tous les rebonds sont tels qu'aucune déformation plastique de la cible et/ou de la bille n'intervient.

Excepté pour les tous derniers rebonds, la perte de vitesse est, d'après la Fig. (II-7), de l'ordre de 2,6% correspondant ainsi à un effet combiné des pertes d'énergie sous forme d'ondes élastiques, de flexion de la cible et du comportement viscoélastique de la bille et de la cible. Les fluctuations autour de la valeur moyenne peuvent s'expliquer par le fait que la valeur du cœfficient de restitution est très sensible à la moindre imperfection de la surface de la cible puisque le rayon de contact est très petit (de l'ordre de $10^{-4}\ m$ à $10^{-6}\ m$ quand la vitesse d'impact varie de $10^{-1}\ m/s$ à $10^{-5}\ m/s$). Bien que l'incertitude sur la mesure de ϵ_n soit de plus en plus grande lorsque la vitesse d'impact diminue, ϵ_n a tendance à diminuer pour les tous derniers rebonds mesurés. Comme l'énergie dissipée sous forme d'ondes élastiques et sous forme viscoélastique ou de flexion de la cible doit diminuer lorsque la vitesse diminue (voir le § (I.4)), la décroissance de ϵ_n sur la Fig. (II-7) pourrait être la preuve de l'apparition d'un nouveau mécanisme de dissipation. Cependant, comme nous le verrons au § (II.6), il n'en sera rien.

II.5 Modèle conservatif

Dans ce paragraphe, on se propose de montrer que l'interaction non linéaire de Hertz, seule, ne permet pas de décrire les derniers rebonds et les oscillations de la bille sur le capteur, qui ont été observés expérimentalement au § (II.4). Pour cela, la loi de contact de Hertz sera modifiée en tenant compte de l'influence de la gravité lors de l'interaction entre la bille et le capteur. Dans toute cette partie, on utilisera un modèle conservatif qui ne pourra bien évidemment pas décrire les phénomènes dissipatifs intrinsèques à l'expérience et qui seront introduits ensuite dans le modèle du § (II.6).

Soit x la variable, mesurant la distance entre la bille et le sol[4], située sur un axe vertical dirigé vers le bas d'origine la surface du sol. Une interpénétration entre la bille et la table correspondra donc à une valeur de x positive, alors que le décollement de la bille depuis la table sera compté négativement. Si la dissipation est négligée, la bille est soumise, au cours du temps, à son poids, pour x quelconque, et à son interaction avec le sol, lorsque $x > 0$, que l'on peut décrire par la loi non linéaire de Hertz. La dynamique de la bille est alors la suivante

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - K|x|^{3/2}H[x] \quad \text{où} \quad H[x] = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{II.10}$$

avec $m = 4\times10^{-3}\ kg$ la masse de la bille en carbure de tungstène de rayon R et $g = 9,81\ m/s^2$ l'accélération de la gravité. La constante K représente le cœfficient de la loi de Hertz pour un contact sphère-plan (voir § (I.3.1)) et est définie par l'Eq. (I.24). En utilisant les propriétés du carbure de tungstène (module d'Young E_s et cœfficient de Poisson ν_s) et $R = 4\ mm$, une bonne estimation de K est obtenue si on prend les valeurs du module d'Young E_p et du cœfficient de Poisson ν_p du capteur comme étant ceux de l'acier inoxydable massif. En utilisant alors les caractéristiques du tableau p. 16 et l'Eq. (I.24), on obtient

$$K = 1,392 \times 10^{10}\ kgm^{1/2}s^{-2}. \tag{II.11}$$

4. En pratique, le « sol » correspond au capteur. On gardera cette dénomination dans la suite.

On s'intéresse exclusivement aux temps où la bille reste en contact avec le sol, c.-à-d. pour $x > 0$. Dans cette limite, l'Eq. (II.10) devient

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{K}{m}x^{3/2}. \tag{II.12}$$

Le poids de la bille peut être négligée lors de son interaction avec le sol si le deuxième terme du membre de droite de l'Eq. (II.12) est très grand devant g, c.-à-d. pour des distances d'interpénétration x telles que

$$x \gg \left(\frac{mg}{K}\right)^{2/3} \sim 10^{-8}\ m. \tag{II.13}$$

Lorsque la bille est lâchée d'une hauteur de l'ordre du millimètre, la distance maximale d'interpénétration est de l'ordre du micromètre. Les effets de la gravité lors de l'interaction sont donc négligeable pour les premiers rebonds. Cependant, à la fin des rebonds, les vitesses d'impact sont très faibles et la bille peut ne pénétrer que sur une distance de l'ordre de $10^{-8}\ m$; la dynamique des rebonds est alors affectée, de façon significative, par la gravité.

L'Eq. (II.12) peut se mettre sous la forme d'une équation décrivant le mouvement d'une masse ponctuelle dans un potentiel $V(x)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dV}{dx} \quad \text{où} \quad V(x) = -gx + \frac{2K}{5m}x^{5/2} + C, \tag{II.14}$$

où C est une constante d'intégration qui sera déterminée par les conditions initiales. Cette énergie potentielle correspond à la somme d'une énergie potentielle élastique positive et d'une énergie potentielle de gravité négative. La dynamique du système est régie par la compétition entre ces deux énergies. La forme de ce potentiel est représentée sur la Fig. (II-8). L'abscisse x_0 du minimum du potentiel est

$$x_0 = \left(\frac{mg}{K}\right)^{2/3} \simeq 2 \times 10^{-8}\ m, \tag{II.15}$$

et l'intersection de $V(x)$ avec l'axe des abscisses, pour $C = 0$, est

$$x_c = \left(\frac{5mg}{2K}\right)^{2/3} \simeq 3,68 \times 10^{-8}\ m. \tag{II.16}$$

Supposons que lors d'un contact entre la bille et le sol, la bille réalise son cycle de charge de $x = 0$ jusqu'à une distance d'interpénétration maximale x_{max} où sa vitesse s'annule. A cet instant, la bille possède uniquement de l'énergie potentielle $V(x_{max})$, somme d'une énergie potentielle élastique et de gravité. Si cette énergie potentielle totale est suffisamment grande ($V(x_{max}) > 0$), c.-à-d. si x_{max} est suffisamment grand ($x_{max} > x_c$), la bille aura emmagasiné assez d'énergie potentielle élastique pour pouvoir réaliser entièrement son cycle de décharge et pour décoller de la table. D'un autre côté, si $x_{max} \leq x_c$, l'énergie potentielle emmagasinée à la fin du cycle de charge sera trop faiblement élastique ($V(x_{max}) \leq 0$), pour que la bille puisse finir son cycle de décharge. Dans ce cas là, la bille ressent son propre poids de façon significative, avant qu'elle ait pu décoller de la table, ce qui a pour effet d'augmenter l'interpénétration x et ainsi de faire subir à la bille un mouvement oscillant d'amplitude constante puisque l'on suppose, dans ce modèle, que le contact se fait sans dissipation d'énergie.

Les résultats précédents, basés sur la simple étude du potentiel $V(x)$, peuvent être confirmés en intégrant numériquement l'Eq. (II.12). A $t = 0$, on suppose que la bille a fini son cycle de charge et se trouve en $x(0) = x_{max}$ où sa vitesse est nulle ($\dot{x}(0) = 0$). Avec ces conditions initiales, on peut étudier le mouvement de la bille pour différentes valeurs de x_{max}.

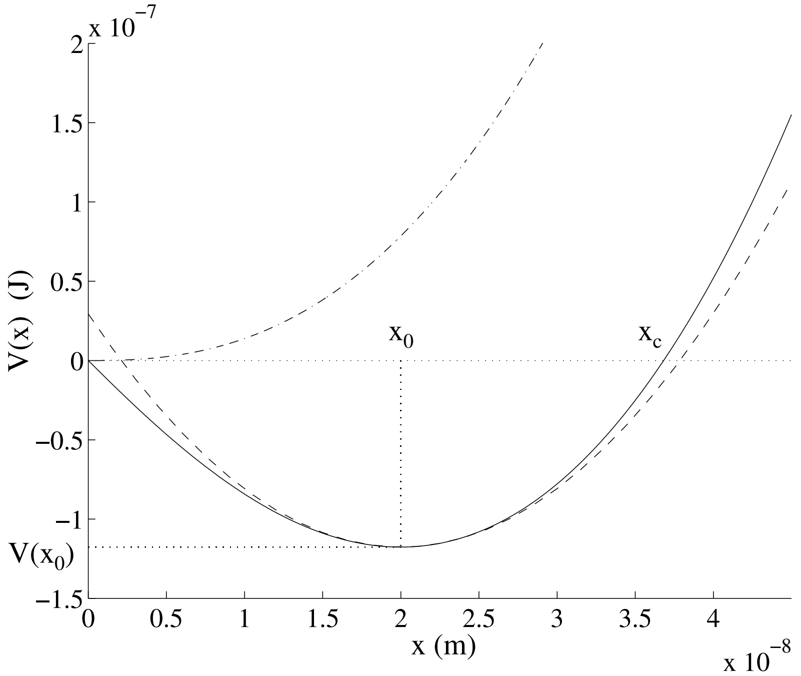


FIG. II-8 – *Allure du potentiel* $V(x) = -gx + \frac{2K}{5m}x^{5/2} + C$*, avec* $C = 0$*, en fonction de la distance d'interpénétration* x *(en traits pleins).* x_0 *correspond à l'abscisse du minimum de* $V(x)$*.* x_c *correspond à l'interpénétration maximale critique telle que pour* $x_{max} > x_c$ *la bille décolle de la table tandis que pour* $x_{max} \leq x_c$ *la bille oscille indéfiniment sur la table autour de* x_0*. Allure du potentiel* $V(x)$ *au voisinage de* x_0 *:* $V(x) \approx V(x_0) + \frac{3K}{4m}x_0^{1/2}(x - x_0)^2$ *(en traits pointillés) et du potentiel d'interaction de Hertz* $V^*(x) = \frac{2K}{5m}x^{5/2} + C$ *avec* $C = 0$ *(en traits mixtes) en fonction de* x*.*

La figure (II-9) montre l'évolution, au cours du temps, de l'interpénétration x, lors du cycle de décharge, pour quatre valeurs de x_{max}. Lorsque la bille est lâchée d'une hauteur de 2 mm, l'interpénétration maximale vaut $x_{max} = 2,6\ \mu m$, et par conséquent la pesanteur est négligeable devant la force élastique (voir l'Eq. (II.13)). Le cycle de décharge est donc régi par la loi de Hertz, comme le montre la Fig. (II-9a), jusqu'au moment où la bille décolle de la table, après $42,8\ \mu s$ de contact. La figure (II-9b) montre l'évolution de x, pour une durée de contact grande par rapport à la précédente, c.-à-d. pour x_{max} tellement petit qu'il est nécessaire de tenir compte des effets de poids de la bille lors du cycle de décharge. Cependant x_{max} est légèrement supérieure à x_c, ce qui permet à la bille d'avoir emmagasiné suffisamment d'énergie élastique pour pouvoir décoller de la table. La différence entre la courbe en pointillés de la Fig. (II-9b), solution de Hertz classique, et la courbe en traits pleins, solution de l'Eq. (II.12), est significative du rôle important de la gravité lors de l'interaction. Pour $x_{max} \leq x_c$, la bille n'a plus assez d'énergie élastique pour pouvoir quitter la table (voir la Fig. (II-8)) et oscille en restant indéfiniment en contact avec la table, puisque le système est conservatif (voir les Figs. (II-9c–d)).

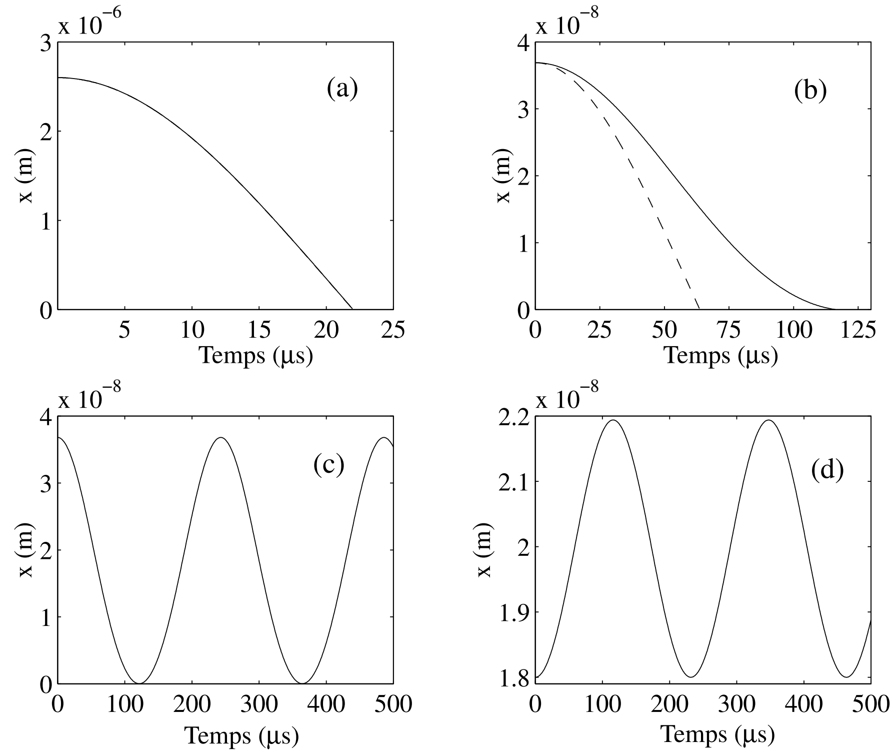


FIG. II-9 – *Evolution de l'interpénétration x, au cours du temps, pour différentes valeurs de x_{max} : (a) $x_{max} = 2,6 \times 10^{-6}$ m $\gg x_c$; (b) $x_{max} = 3,69 \times 10^{-8}$ m $> x_c$; (c) $x_{max} = 3,68 \times 10^{-8}$ m $= x_c$; (d) $x_{max} = 1,8 \times 10^{-8}$ m $< x_c$. Les courbes en traits pointillés des Figs. (a–b) sont déduites de la loi de Hertz où la gravité est négligée. Les courbes en traits pleins correspondent aux résultats de l'intégration numérique de l'Eq. (II.12). Il est à noter que les deux courbes de la Fig. (a) sont confondues. La période des oscillations des Figs. (c) et (d) est, respectivement, 242 et 231 μs. Les calculs, pour les Figs. (a–b), divergent lorsque la bille quitte la table ($x < 0$) alors que ceux des Figs. (c–d) sont stoppés au bout de 500 μs.*

II.5.1 Influence de la gravité sur le temps de collision

En multipliant l'Eq. (II.12) par dx/dt et en intégrant par rapport à t, on a

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = gx - \frac{2K}{5m}x^{5/2} + C, \qquad \text{(II.17)}$$

où la constante d'intégration C est déterminée par trois conditions indépendantes : à $t = 0$, $x(0) = 0$ et $(dx/dt)|_{t=0} = v_{imp}$ d'une part, et d'autre part la vitesse de la bille s'annule lorsque $x = x_{max}$. Ainsi,

$$C = \frac{1}{2}v_{imp}^2 = -gx_{max} + \frac{2K}{5m}x_{max}^{5/2}. \qquad \text{(II.18)}$$

La relation liant la vitesse d'impact v_{imp} de la bille juste avant le choc et l'interpénétration maximale produite lors du choc est alors

$$v_{imp} = \sqrt{\frac{4K}{5m} x_{max}^{5/2} - 2g x_{max}}. \tag{II.19}$$

Le second terme sous la racine carrée est la correction apportée à la loi de Hertz due à l'effet de la gravité. En effet, la relation entre l'interpénétration x^*_{max} obtenue par la loi de Hertz et la vitesse d'impact v_{imp} s'écrit, d'après l'Eq. (I.33),

$$v_{imp} = \sqrt{\frac{4K}{5m} {x^*_{max}}^{5/2}}. \tag{II.20}$$

Ainsi, à vitesse d'impact donnée, le modèle de Hertz modifié par la gravité détermine une interpénétration maximale x_{max} différente de celle obtenue par la théorie de Hertz seule x^*_{max}.

L'Eq. (II.17) définie le point représentatif de l'évolution de l'interpénétration x dans l'espace des phases $(dx/dt, x)$, pour une valeur donnée de l'énergie totale C, c.-à-d. de la vitesse d'impact v_{imp} (voir l'Eq. (II.18)). La figure (II-10a) montre le diagramme des phases pour le modèle de Hertz modifié par la pesanteur, c.-à-d. pour le potentiel $V(x)$ de l'Eq. (II.14). La figure (II-10b) montre le diagramme des phases pour le modèle de Hertz seul, c.-à-d. pour le potentiel $V^*(x)$ (voir la Fig. (II-8)). Chacune des courbes de chemin en traits pleins corresponds à un rebond de la bille pour une certaine valeur de $C > 0$, c.-à-d. pour $x_{max} > x_c$. Lorsque $v_{imp} \to 0$ $(C \to 0)$, les courbes de chemin en traits pleins tendent soit vers un cycle limite (en traits mixtes sur la Fig. (II-10a)) soit vers le point $(0, 0)$ sur la Fig. (II-10b)). Cette différence provient du fait que lorsque $v_{imp} \to 0$, $x_{max} \to x_c$ pour le modèle de Hertz modifié par la pesanteur, tandis que $x^*_{max} \to 0$ pour le modèle de Hertz seul. Cela signifie que lorsqu'une bille est posée sur une table sans vitesse, la bille est légèrement compressée sur une distance maximale x_c lorsque la pesanteur est prise en compte, alors qu'aucune déformation n'intervient pour le modèle de Hertz seul. Pour une valeur négative de l'énergie totale, c.-à-d. pour $x_{max} < x_c$, les courbes de chemin en traits pointillés sur la Fig. (II-10a)) sont des cycles limites correspondant aux oscillations de la bille autour de la distance d'interpénétration x_0.

En séparant les variables de temps et d'espace dans l'Eq. (II.17), nous pouvons l'intégrer, et en utilisant le fait que la durée totale du contact est le double du temps que met la bille pour passer de $x = 0$ à $x = x_{max}$ (puisqu'il n'y a pas de dissipation), la durée totale du contact s'écrit

$$\tau = 2 \int_0^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{v_{imp}^2 + 2gx - \frac{4K}{5m} x^{5/2}}}. \tag{II.21}$$

Avec $\nu = x/x_{max}$, l'Eq. (II.21) devient

$$\tau = 2 \frac{x_{max}}{v_{imp}} \int_0^1 \frac{d\nu}{\sqrt{1 + a\nu - b\nu^{5/2}}}, \tag{II.22}$$

où a et b sont des fonctions de x_{max} telles que

$$\frac{1}{a} = \frac{2K}{5mg} x_{max}^{3/2} - 1 \quad , \quad \frac{1}{b} = 1 - \frac{5mg}{2K x_{max}^{3/2}}. \tag{II.23}$$

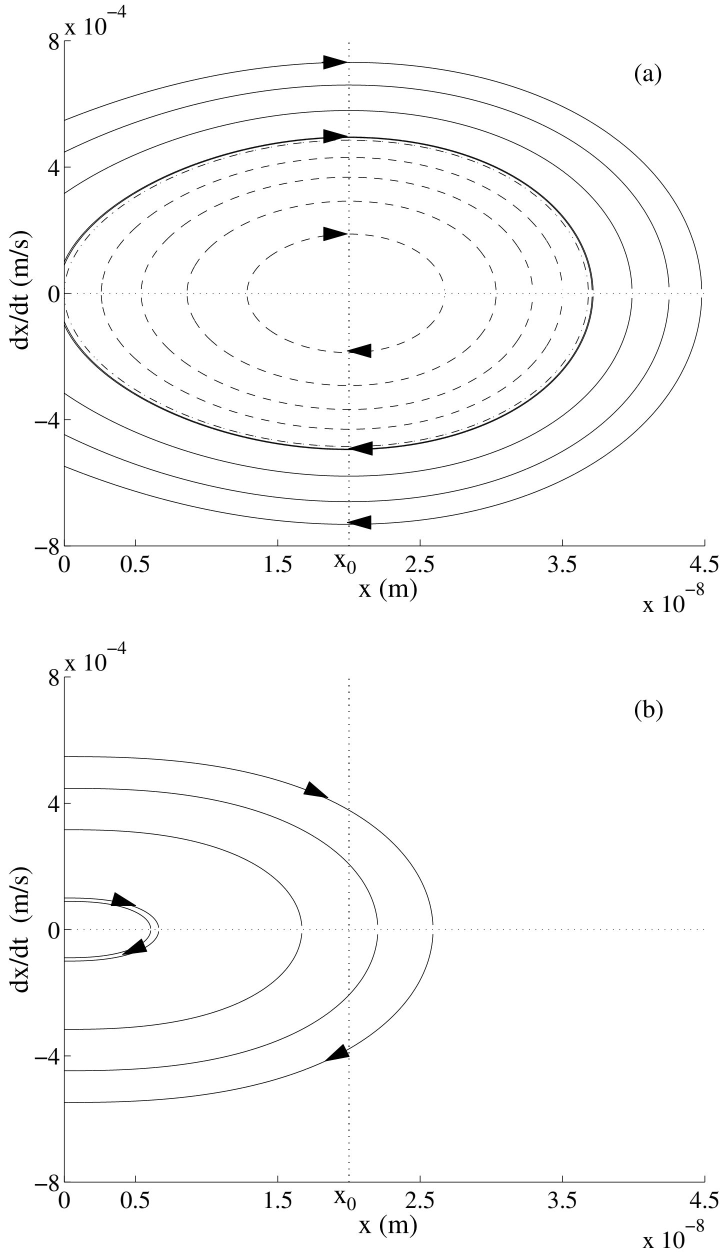


FIG. II-10 – *Modèle conservatif: (a) Diagramme des phases pour le modèle de Hertz modifié par la pesanteur, pour différentes valeurs de l'énergie totale* $C = mv_{imp}^2/2$. *(b) Même légende que pour la Fig. (a) avec* $g = 0$, *c.-à-d. pour le modèle de Hertz seul. Pour les deux figures, les courbes d'équi–énergie en traits pleins correspondent à* $C = 1,5 \times 10^{-7}$; 10^{-7} ; 5×10^{-8} ; 5×10^{-9} *et* 4×10^{-9} *J ; la courbe d'équi–énergie en traits mixtes à* $C = 0$ *et les courbes d'équi–énergie en pointillés à* $C = -2,5 \times 10^{-8}$; -5×10^{-8} ; $-7,5 \times 10^{-8}$ *et* -1×10^{-7} *J. En (a), les courbes en traits pleins sont pour* $C > 0$, *c.-à-d. pour* $x_{max} > x_c$; *la courbe en traits mixtes pour* $C = 0$, *c.-à-d. pour* $x_{max} = x_c$ *et les courbes en pointillés pour* $C < 0$, *c.-à-d. pour* $x_{max} < x_c$. *Seules les solutions en traits pleins apparaissent en (b), c.-à-d. pour* $C > 0$, *puisque* $x^*_{max} \to 0$ *quand* $C \to 0$.

La durée du contact τ est donc une fonction d'une seule variable x_{max} ou v_{imp}, puisque l'une et l'autre sont reliées par l'Eq. (II.19). L'Eq. (II.22) peut être comparée avec la durée de contact τ^* obtenue par la loi de Hertz classique qui s'écrit, d'après les Eqs. (I.34), (I.35) et (I.36),

$$\tau^* = 2\frac{x^*_{max}}{v_{imp}}\int_0^1 \frac{d\nu}{\sqrt{1-\nu^{5/2}}} \simeq 2,94\frac{x^*_{max}}{v_{imp}}. \tag{II.24}$$

L'intégrale apparaissant dans l'Eq. (II.22) n'a pas d'expression analytique, mais peut être calculée par intégration numérique. Afin de comparer quantitativement les résultats expérimentaux des temps de collisions (Fig. (II-4)) avec ceux des simulations numériques, il est nécessaire de modifier la valeur du paramètre K. En effet, le cœfficient K de la loi de Hertz a été calculé (voir l'Eq. (II.11)) pour un contact entre une sphère en carbure de tungstène massif et un plan en acier inoxydable massif. Ce cœfficient K fait intervenir les paramètres élastiques (module d'Young et cœfficient de Poisson) des deux matériaux entrant en collision. Il est évident que les paramètres élastiques du capteur d'impact, recouvert d'acier inoxydable, ne sont pas les mêmes que ceux de l'acier massif. De même, ceux d'une bille au carbure de tungstène, qui est probablement un alliage de carbure de tungstène et de cobalt, ne sont pas strictement identiques à ceux du carbure de tungstène massif.

Cependant, une valeur expérimentale K_{exp} peut être déduite de la mesure du temps de collision du premier rebond. Puisque la durée cette collision est obtenue par la loi de Hertz, en reportant l'Eq. (II.20) dans l'Eq. (II.24), il est aisé de déterminer K de façon expérimentale, connaissant la mesure du temps de collision du premier rebond (voir le § (II.4.1)) et la hauteur de la chute libre : $K_{exp} = 8,386 \times 10^9\ kgm^{1/2}s^{-2}$. Il est à noter que cette valeur est considérablement plus petite que celle de l'Eq. (II.11).

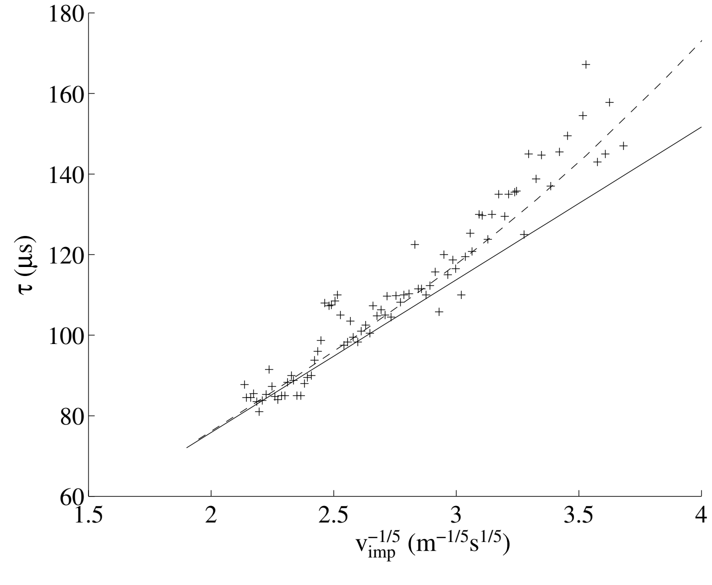


FIG. II-11 – *Evolution du temps de collision τ en fonction de $v_{imp}^{-1/5}$: par intégration numérique de l'Eq. (II.22) avec $K = K_{exp}$, pour différentes valeurs de x_{max} (courbe en traits pointillés) ; par la loi de puissance $\tau^* = 2,94(\frac{5m}{4K_{exp}})^{2/5}{v_{imp}}^{-1/5}$ obtenue par la loi de Hertz classique (courbe en traits pleins identique à celle de la Fig. (II-4)) ; les croix représentent les points expérimentaux.*

La courbe en traits pointillés de la Fig. (II-11) montre l'évolution de τ, calculée par intégration numérique de l'Eq. (II.22), avec $K = K_{exp}$, pour différentes valeurs de x_{max}, en fonction de ${v_{imp}}^{-1/5}$. Les résultats expérimentaux, représentés par des croix, sont en accord qualitatif et quantitatif avec ceux du modèle de Hertz modifié par la gravité (courbe en traits pointillés) : le temps de collision a tendance à croître beaucoup plus rapidement que ne le laisserait présager la loi de Hertz. Ainsi, l'influence de la gravité lors de l'interaction impose à la bille de passer un temps plus long sur le capteur. Ce comportement résulte de la différence entre les interpénétrations x^*_{max} et x_{max}, respectivement calculée par le modèle de Hertz et celui de Hertz modifié : à vitesse d'impact fixée, l'interpénétration maximale, entre la bille et le plan, est plus grande dans le cas où la gravité est prise en compte que dans celui où elle est négligée. En effet, le sens de la force de gravité, c.-à-d. celui de l'interpénétration x, s'oppose au sens de la force élastique. A vitesse d'impact fixée, c.-à-d. pour C fixé (voir l'Eq. (II.18)), les allures des potentiels d'interaction du modèle de Hertz (traits mixtes) et du modèle de Hertz modifié par la gravité (traits pleins), représentées sur la Fig. (II-8), rendent compte, par analogie avec le mouvement d'une masse ponctuelle dans un potentiel, que le temps de collision calculé par la loi de Hertz modifié par la gravité, pour un certain x_{max}, sera plus grand que celui calculé par la loi de Hertz seule, pour un certain x^*_{max}, avec $x_{max} > x^*_{max} > x_c$.

Cet écart entre les deux modèles diverge lorsque $x_{max} \to x_c$, c.-à-d. en reportant l'Eq. (II.16) dans l'Eq. (II.19), lorsque $v_{imp} \to 0$. A $v_{imp} = 0$, c.-à-d. pour $x_{max} = x_c$, l'influence de la gravité, lors de l'interaction, impose à la bille d'osciller infiniment sur la surface plane (voir la Fig. (II-9c)). Dans ce cas là, tout se passe comme si l'on « posait », à vitesse nulle, une bille sur un ressort, non précontraint, qui successivement se comprimerait et se dilaterait sans cesse, puisque ce modèle est non dissipatif.

Pour $x_{max} < x_c$, parler de vitesse d'impact n'a pas de sens puisque l'Eq. (II.19) n'est pas définie. Cependant, le mouvement oscillant observé numériquement (voir la Fig. (II-9d)), pour $x_{max} < x_c$, peut se comprendre comme précédemment : la bille est « posée », à vitesse nulle, sur un ressort précontraint et on laisse le système évoluer librement sans dissipation. La valeur de cette précontrainte initiale est telle que le ressort doit être enfoncé d'une distance $x_c - x_{max}$. Il est à noter que si $x_{max} = x_0$, le mouvement oscillant disparaît puisque l'énergie potentielle élastique, emmagasinée par le ressort précontraint, est exactement compensée par celle due au poids de la bille : le système est alors en équilibre.

Bien évidemment, expérimentalement, la valeur $v_{imp} = 0$ n'est jamais atteinte et ainsi x_{max} ne peut être inférieur ou égal à x_c et par conséquent les oscillations de la bille sur le capteur ne devraient pas être observables. Cependant, bien que la vitesse d'impact ne s'annule pas exactement lors des derniers rebonds, la dissipation lors du contact permet à la bille d'acquérir une valeur x_{max} inférieure à x_c. Le mouvement oscillant ainsi obtenu est alors amorti au cours du temps à cause des effets dissipatifs.

II.5.2 Période des oscillations de la bille

Les simulations de la Fig. (II-9) ont montré que les effets de la gravité dominent les effets élastiques pour $x_{max} \leq x_c$; en dessous de cette valeur critique la bille oscille alors indéfiniment avec une période donnée. La différence avec le système réel (la décroissance de l'amplitude des oscillations) est due à l'absence de dissipation dans le modèle. Dans ce paragraphe, une expression de la période des oscillations de la bille est obtenue et est comparée à la valeur expérimentale (T_{exp}) et à la valeur numérique (Figs. II-9c–d).

Les équations (II.17) et (II.18) font intervenir 3 unités indépendantes (une masse M, un temps T et une longueur L) et 5 variables indépendantes (la masse de la bille m, l'accélération de la pesanteur g, le paramètre d'élasticité K, l'interpénétration maximale x_{max} et la période des oscillations T). D'après le théorème Π, on peut fabriquer 2 nombre sans dimensions. Les dimensions des variables étant les suivantes K en $ML^{-1/2}T^{-2}$, g en LT^{-2}, x_{max} en L et m en M; on peut trouver 2 nombre sans dimension en cherchant d'une part α_1, β_1 et γ_1 de sorte que $m^{\alpha_1}g^{\beta_1}K^{\gamma_1}T = C^{ste}$ et d'autre part α_2, β_2 et γ_2 de sorte que $m^{\alpha_2}g^{\beta_2}K^{\gamma_2}x_{max} = C^{ste}$. On obtient alors l'expression générale de la période des oscillations

$$T = B\left(\frac{m}{Kg^{1/2}}\right)^{1/3} F\left[\frac{x_{max}}{x_0}\right], \quad \text{avec} \quad x_{max} \leq x_c, \tag{II.25}$$

où B est une constante numérique et $F[\cdot]$ une fonction inconnue. Notons que cette période dépend de l'amplitude maximale des oscillations x_{max}.

En premier lieu, supposons que l'amplitude des oscillations soient petites, c.-à-d. $x_{max} \simeq x_0$, et F soit une constante. Pour $x_{max} \leq x_c$, le système subit des oscillations centrées sur x_0. Au voisinage de x_0, on peut développer le potentiel de l'Eq. (II.14) selon

$$V(x) = V(x_0) + (x - x_0)\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_0} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_0} + \cdots. \tag{II.26}$$

En reportant les Eqs. (II.15) et (II.14) dans l'Eq. (II.26), le potentiel $V(x)$ au voisinage de x_0 s'écrit

$$V(x) \simeq V(x_0) + \frac{3K}{4m}\sqrt{x_0}(x - x_0)^2. \tag{II.27}$$

La forme de ce potentiel est représentée, en traits pointillés, sur la Fig. (II-8). En identifiant, au voisinage de x_0, le mouvement de la bille dans le potentiel de l'Eq. (II.27) à celui d'un oscillateur harmonique et en utilisant l'Eq. (II.15), on obtient l'expression de la période des oscillations de la bille au voisinage de x_0

$$T\big|_{x_{max}\simeq x_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{m}{Kg^{1/2}}\right)^{1/3}. \tag{II.28}$$

Afin de comparer la valeur théorique avec la valeur expérimentale, T est calculé avec $K = K_{exp}$ selon l'Eq. (II.28), ce qui conduit à

$$T\big|_{x_{max}\simeq x_0} \simeq 274\ \mu s, \tag{II.29}$$

Cette valeur est en bon accord avec le résultat expérimentaux (voir l'Eq. (II.8)). De plus, nous pouvons comparer la valeur numérique $T_{num} \simeq 231\ \mu s$ obtenu lors de la simulation pour x_{max} proche de x_0 (voir la Fig. (II-9d)), avec la valeur de K donnée par l'Eq. (II.11). L'Eq. (II.28) avec cette valeur de K conduit alors à une valeur théorique $T \simeq 231\ \mu s$ qui est en très bon accord avec T_{num}.

Recherchons maintenant l'expression de la période des oscillations de la bille pour des oscillations de grande amplitude. Ces dernières débutent lorsque $v_{imp} = 0$, c.-à-d. d'après les Eqs. (II.16) et (II.19), quand $x_{max} = x_c$. La période des oscillations est alors donnée par l'Eq. (II.21) avec $v_{imp} = 0$ et $x_{max} = x_c$, selon

$$T\big|_{x_{max}=x_c} = 2\int_0^{x_c} \frac{dx}{\sqrt{2gx - \frac{4K}{5m}x^{5/2}}}. \tag{II.30}$$

Avec $\nu = x/x_c$ et d'après l'Eq. (II.15), l'Eq. (II.30) devient

$$T\big|_{x_{max}=x_c} = 2\sqrt{2}\left(\frac{5}{3}\right)^{1/3}\left(\frac{m}{Kg^{1/2}}\right)^{1/3}\int_0^1 \frac{d\nu}{\sqrt{1-\nu^3}}. \tag{II.31}$$

Finallement,d'après la valeur [5] de l'intégrale de l'Eq. (II.31),

$$T\big|_{x_{max}=x_c} = \frac{(\Gamma[1/3])^3}{\pi}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{5}{4}\right)^{1/3}\left(\frac{m}{Kg^{1/2}}\right)^{1/3} \simeq 5,38\left(\frac{m}{Kg^{1/2}}\right)^{1/3}, \tag{II.32}$$

où $\Gamma[\cdot]$ est la fonction Gamma [6]. La valeur théorique de la période des oscillations de grande amplitude est calculée selon l'Eq. (II.32) avec $K = K_{exp}$

$$T\big|_{x_{max}=x_c} \simeq 287\ \mu s. \tag{II.33}$$

Cette valeur est en excellent accord avec le résultat expérimental de l'Eq. (II.8) déduit de la courbe lissée de la Fig. (II-6). De plus, nous pouvons comparer la valeur numérique $T_{num} \simeq 242\ \mu s$ obtenu lors de la simulation pour x_{max} proche de x_c (voir la Fig. (II-9c)), avec la valeur de K donnée par l'Eq. (II.11). L'Eq. (II.32) avec cette valeur de K conduit alors à $T \simeq 243\ \mu s$.

II.6 Modèle dissipatif viscoélastique

Le modèle conservatif du § (II.5) décrit de façon satisfaisante les rebonds de la bille ainsi que ses oscillations sur le capteur. Cependant, en pratique, lors d'une collision binaire quasi–élastique, une très faible quantité d'énergie est toujours dissipée par le système (voir § (I.4)). Afin tenir compte de ces phénomènes dissipatifs, une force de nature dissipative F_{diss} est introduite dans l'Eq. (II.10) du modèle conservatif

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - K|x|^{3/2}H[x] - F_{diss}H[x] \quad \text{où} \quad H[x] = \begin{cases} 1 & \text{si} \ \ x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{II.34}$$

Le choix de la forme de F_{diss} est conditionné par les remarques des § (I.4) et (II.4.3) où il a été montré que les pertes d'énergie par vibrations rayonnées dans la cible et dans la bille ou par création de déformations plastiques étaient quasiment négligeables et indépendantes de la vitesse d'impact. Ainsi, dans la suite, on ne s'intéresse qu'au mécanisme de dissipation viscoélastique et F_{diss} s'écrit alors

$$F_{diss} = \mu\dot{x}|x|^{\gamma} \tag{II.35}$$

où γ est un nombre réel caractérisant la nature linéaire ($\gamma = 0$) ou non linéaire ($\gamma \neq 0$) de la force viscoélastique, et μ un cœfficient de dissipation qui peut être relié à une viscosité dynamique η (d'unité $kgm^{-1}s^{-1} = Ns/m^2$) selon $\mu = \eta R^{1-\gamma}$ avec R le rayon de la bille.

La force de contact visqueuse $F = -K|x|^{3/2} - \mu\dot{x}|x|^{\gamma}$, apparaissant dans l'Eq. (II.34), a été récemment étudiée pour simuler numériquement avec $\gamma = 0$ [63, 64] et $\gamma = 1/4$ [65], la loi

5. Voir l'Eq. (3.139.5) de la Ref. [25].
6. Voir l'Eq. (8.310.1) de la Ref. [25] pour une definition de la fonction Gamma.

d'intéraction entre grains dans un milieu granulaire. Une étude comparative des propriétés de ces lois d'interaction viscoélastiques, fréquemment utilisées de façon phénoménologique dans les simulations numériques, a été faite récemment [66, 67]. D'un point de vue théorique, en tenant compte exclusivement des effets dissipatifs sous forme viscoélastique, Kuwabara et Kono [33], puis récemment Hertzsch [34] et Brilliantov [35] ont généralisé les arguments de Hertz et ont obtenu une expression pour la force de contact agissant entre deux corps viscoélastiques, selon l'Eq. (I.44), c.-à-d. pour $\gamma = 1/2$ (voir le § (I.4)).

On rappelle que le cœfficient de restitution, au cours d'une collision binaire, est définie par l'Eq. (I.42). Pour une collision entre une sphère et un plan, nous pouvons généraliser le travail de Kuwabara et Kono [33] pour $\gamma = 1/2$ à n'importe quelle valeur de γ, afin d'obtenir une expression du cœfficient de restitution en fonction de la vitesse d'impact. Cette expression sera valide pour une loi d'interaction définie par l'Eq. (II.34) pour $x > 0$, dans la limite faiblement dissipative, sans le terme de gravité et avec une force viscoélastique donnée par l'Eq. (II.35). Dans la limite $\epsilon \to 1$, on démontre alors, dans l'annexe C, que

$$\epsilon = 1 - \frac{4}{5}\mathcal{B}\left[\frac{3}{2}\,,\,\frac{2}{5}(\gamma+1)\right]\varphi \qquad \forall\gamma > -1\;, \tag{II.36a}$$

$$\varphi = \frac{\mu}{m}\left(\frac{5m}{4K}\right)^{2(\gamma+1)/5} v_{imp}^{(4\gamma-1)/5}\;, \tag{II.36b}$$

où $\mathcal{B}[y,z]$ est une fonction Beta [7] avec y et z des nombres réels avec des parties réelles positives.

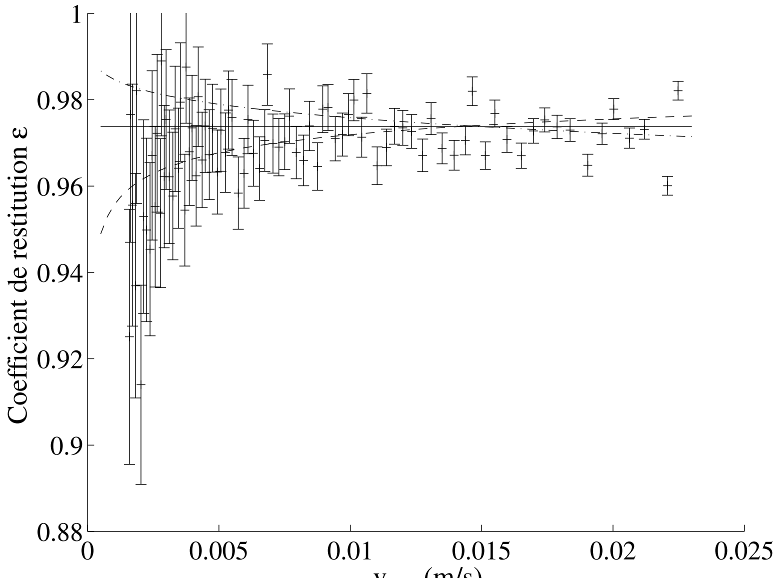


FIG. II-12 – *Cœfficient de restitution ϵ en fonction de v_{imp}. Les croix correspondent aux points expérimentaux. Les lignes correspondent aux solutions théoriques des Eqs. (II.36) : $\gamma = 0$ avec $\mu/m = 530\ s^{-1}$ (ligne en pointillés); $\gamma = 1/2$ avec $\mu/m = 1,3\times10^{6}\ m^{-1/2}s^{-1}$ (ligne en traits mixtes) et $\gamma = 1/4$ avec $\mu/m = 2,7\times10^{4}\ m^{-1/4}s^{-1}$ (ligne en traits pleins). Dans tous les cas, $K/m = K_{exp}/m = 2,092\times10^{12}\ m^{1/2}s^{-2}$.*

7. Voir l'Eq. (8.380.11) de la Ref. [25] pour une définition de la fonction Beta.

L'évolution de ϵ, d'après les Eqs. (II.36), est présenté sur la Fig. (II-12) en fonction de v_{imp} pour $\gamma = 0$, $1/4$ et $1/2$. Pour chaque valeur de γ, le paramètre de dissipation μ est choisi tel que les solutions théoriques décrivent de la meilleur façon les résultats expérimentaux. Lorsque les vitesses d'impact sont suffisamment grande pour pouvoir négliger les effets de la gravité, les résultats obtenus d'après les Eqs. (II.36), c.-à-d. $1 - \epsilon \propto v_{imp}^{(4\gamma-1)/5}$, doivent être en accord avec les résultats expérimentaux. Expérimentalement, pour de telles vitesses, ϵ semble constant en moyenne et indépendant de v_{imp} (voir la Fig. (II-12)), les fluctuations étant dues aux imperfections des surfaces des corps en contacts (voir page 48). D'après les Eqs. (II.36), dans la limite $\epsilon \to 1$, c.-à-d. $\varphi \ll 1$, une telle propriété est vérifiée par le modèle viscoélastique non linéaire $\gamma = 1/4$. Bien évidemment, lorsque la gravité n'est plus négligeable, c.-à-d. à basse vitesse d'impact, les Eqs. (II.36) ne sont plus valides et par conséquent, les solutions théoriques sont en désaccord avec les données expérimentales (voir les lignes de la Fig. (II-12)). Ainsi, nous devons rechercher quelle est la valeur de γ qui décrit la mieux les résultats expérimentaux à basse vitesse d'impact. Cela va être le but des deux prochains paragraphes à l'intérieur desquel trois valeurs de γ seront considérés : $\gamma = 0$ pour des raisons de simplicité (modèle linéaire), $\gamma = 1/4$ puisque ce modèle conduit à $\epsilon \propto (v_{imp})^0$ qui possède le même comportement que celui des résultats expérimentaux à haute vitesse d'impact, et $\gamma = 1/2$ correspondant au modèle théorique.

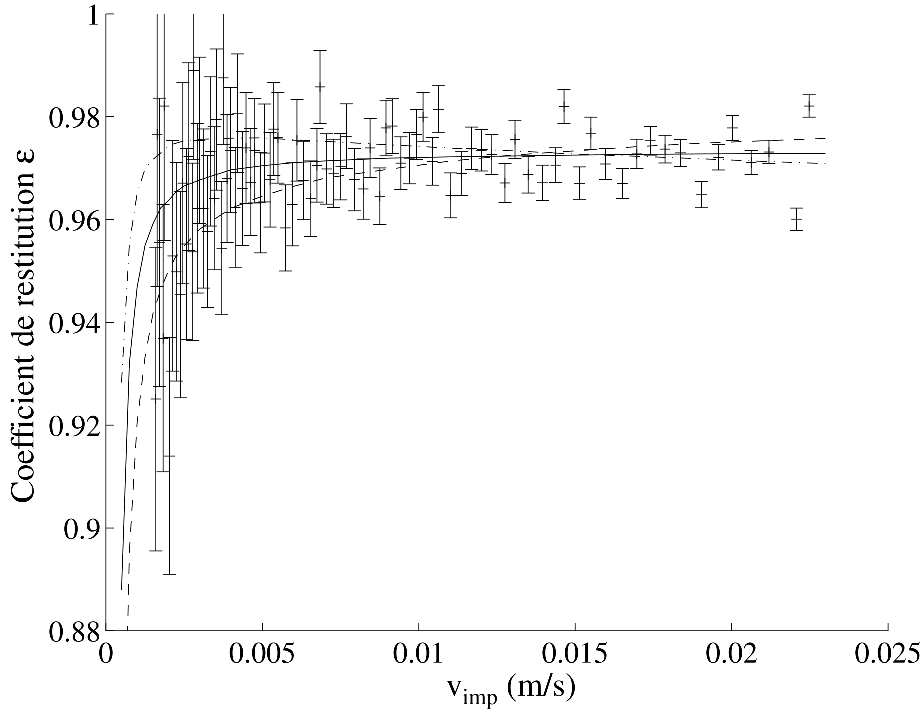


FIG. II-13 – *Cœfficient de restitution ϵ en fonction de v_{imp}. Les croix correspondent aux points expérimentaux. Les lignes correspondent aux simulations numériques : $\gamma = 0$ avec $\mu/m = 530\ s^{-1}$ (ligne en pointillés) ; $\gamma = 1/2$ avec $\mu/m = 1,3 \times 10^6\ m^{-1/2}s^{-1}$ (ligne en traits mixtes) et $\gamma = 1/4$ avec $\mu/m = 2,7 \times 10^4\ m^{-1/4}s^{-1}$ (ligne en traits pleins). Pour toutes les simulations : $K/m = K_{exp}/m = 2,092 \times 10^{12}\ m^{1/2}s^{-2}$ et v_{imp} varie de $2,3 \times 10^{-2}$ à $5 \times 10^{-4}\ m/s$ avec un pas de $2,5 \times 10^{-4}\ m/s$.*

II.6.1 Modèles viscoélastiques phénoménologiques

Modèle linéaire : $\gamma = 0$

Une méthode Runge–Kutta d'ordre 4 est utilisée pour résoudre numériquement l'équation non linéaire (II.34) avec $\gamma = 0$. A $t = 0$, la bille heurte le plan avec une vitesse d'impact v_{imp}. Les conditions initiales du problème sont alors $x(t = 0) = 0$ et $\dot{x}(t = 0) = v_{imp}$. Le pas de temps d'intégration utilisé est très inférieur au temps typique[8] de collision entre une sphère et un plan : la durée du premier impact est $52,4\ \mu s$ et le pas de temps $0,5\ \mu s$. L'intégration numérique est stoppée lorsque l'interpénétration x devient négative, c.-à-d. à la fin de l'intération entre la bille et le plan, déterminant ainsi la durée τ de la collision. La vitesse v_f de la bille à la fin de la collision est donnée par $\dot{x}(t = \tau)$ et la valeur du cœfficient de restitution par l'Eq. (I.42). Répétant cette procédure pour différentes valeurs de la vitesse d'impact v_{imp}, on peut alors tracer l'évolution du cœfficient de restitution en fonction de v_{imp} pour un choix du paramètre de dissipation μ (voir la courbe en traits pointillés de la Fig. (II-13)). Lorsque la gravité est négligeable, la dépendance entre ϵ et v_{imp} est donnée par les Eqs. (II.36) avec $\gamma = 0$ (voir la courbe en traits pointillés de la Fig. (II-12)) ; ce qui ne reproduit pas les résultats expérimentaux. Cependant, lorsque la gravité n'est plus négligeable, le système dissipe plus d'énergie quand la vitesse d'impact devient très faible, une tendance qui est identique à celle observée expérimentalement.

Modèle non linéaire : $\gamma = 1/4$

En utilisant maintenant une force viscoélastique non linéaire donnée par l'Eq. (II.35) avec $\gamma = 1/4$, intégrons numériquement l'équation (II.34) en procédant de la même façon qu'au § (II.6.1) du modèle linéaire. L'évolution du cœfficient de restitution est présentée en traits pleins sur la Fig. (II-13) en fonction de la vitesse d'impact pour un choix du paramètre de dissipation μ. Cette courbe montre qu'à haute vitesse d'impact le cœfficient de restitution est indépendant de v_{imp}. Cette propriété provient de la dépendance non linéaire de la dissipation avec la puissance 1/4 de l'interpénétration (voir les Eqs. (II.36) avec $\gamma = 1/4$). Ce résultat est en bon accord avec les données expérimentales qui semblent indépendantes de v_{imp} pour de telles vitesses. De plus, comme dans le cas viscoélastique linéaire, nous observons une augmentation de l'énergie dissipée lorsque la vitesse diminue, une tendance qui est identique à celle observée expérimentalement.

II.6.2 Modèle viscoélastique théorique ($\gamma = 1/2$)

Bien que le modèle précédent en $\gamma = 1/4$ décrive correctement les résultats expérimentaux aussi bien à haute qu'à basse vitesse, la force dissipative d'Eq. (II.35) a été introduite de façon phénoménologique dans l'Eq. (II.34) régissant la dynamique du contact. La partie dissipative de la force de contact, considérée dans ce paragraphe, provient d'une extension viscoélastique de la théorie de Hertz du contact élastique. L'expression de la force de contact viscoélastique, agissant lors de la collision entre une sphère et un plan, s'écrit (voir l'Eq. (I.44) ou les Ref. [33, 34, 35])

$$F = -K|x|^{3/2} - \mu\dot{x}|x|^{1/2} , \qquad \text{(II.37)}$$

8. Ce temps de collision est le plus petit qui apparaisse dans le système, puisque l'Eq. (II.35) n'a de sens que dans la limite quasi–statique où la propagation de l'onde acoustique au sein d'une bille est négligée.

où K est le cœfficient de la loi Hertz pour un contact sphère–plan d'Eq. (I.24) et μ le cœfficient de dissipation tel que $\mu = \frac{3}{2}KD$. D est une fonction des cœfficients élastiques des matériaux de la sphère (E_s et ν_s) et du plan (E_p et ν_p) ainsi que des cœfficients de viscosité, associés respectivement au cisaillement et à la déformation en volume, des matériaux de la sphère (respectivement ξ_s et η_s) et du plan (respectivement ξ_p et η_p) [33, 34, 35].

Les valeurs de ξ et η, représentant la viscosité dans un solide, peuvent être obtenues expérimentalement par la mesure des vitesses et des constantes d'atténuation des ondes acoustiques longitudinales ou transverses dans ce matériau [13, 33]. Cependant, les valeurs de ces paramètres à des fréquences de l'ordre de 10 kHz, correspondant à la durée de la collision, ne sont pas disponibles dans la littérature [33]. D sera donc un paramètre ajustable.

Il est à noter que l'expression de la force de contact de l'Eq. (II.37) a été obtenue dans le régime quasi–statique, c.-à-d. lorsque la vitesse caractéristique du problème, v_{imp}, est très inférieure à la vitesse du son dans les matériaux constituant la sphère et le plan [35]. Cette approximation quasi–statique est légitime dans nos expériences puisque la vitesse maximale d'impact est $v_{imp} = 0,2\ m/s$ tandis que les vitesses du son dans le carbure de tungstène et l'acier inoxydable sont respectivement de l'ordre de 6000 et 5000 m/s (*cf.* la table page 16).

Lorsque la gravité est négligeable lors de l'interaction, et pour ϵ proche de 1, le cœfficient de restitution dépend de la puissance 1/5 de la vitesse d'impact (voir les Eqs. II.36 et la Ref. [33]). Un choc est donc plus élastique (ou moins dissipatif) à basse vitesse d'impact. Cette dépendance en vitesse semble être confirmée par les expériences [33] de collisions entre deux sphères identiques, pour différents matériaux (acier, laiton, verre) et vitesses d'impact ($0,5 < v_{imp} < 5\ m/s$). Ces vitesses sont suffisamment faibles pour pouvoir s'assurer qu'il n'y a pas de dissipation due à des déformations complètement plastiques des matériaux mais suffisante pour causer des déformations plastiques des matériaux (voir le § (I.4)). De même, de récentes expériences d'impact [36, 37, 38] entre des sphères de glace et un bloc de glace ont été réalisées pour de très faibles vitesses d'impact ($0,015 < v_{imp} < 5,1\ cm/s$). Pour cette gamme de vitesse, le cœfficient de restitution tend vers 1 lorsque la vitesse d'impact tend vers zéro. Ces expériences sont comparées à la théorie viscoélastique en $\gamma = 1/2$ et semblent confirmer cette dernière [34, 35]. Cependant, dans toutes ces expériences, les collisions sont réalisées au moyen deux pendules [33] ou d'un disque pendulaire et un bloc fixe [36, 37, 38]. De part cette géométrie (la collision est horizontale), les effets de la gravité sont négligeables lors de l'interaction, même pour de très basses vitesses d'impact.

Lorsque la collision est verticale et les effets de la gravité ne sont plus négligeables, c.-à-d. lorsque les vitesses d'impact deviennent très petites, l'évolution de ϵ selon les Eqs. (II.36) n'est plus valable (voir l'annexe C). L'évolution en présence de la gravité est alors déterminée numériquement. En effet, en utilisant une force dissipative d'Eq. (II.35) avec $\gamma = 1/2$, nous integrons numériquement l'Eq. (II.34) en procédant de la même façon que dans le § (II.6.1). L'évolution du cœfficient de restitution est alors tracée en fonction de la vitesse d'impact pour un choix du paramètre de dissipation μ (voir la courbe en traits mixtes de la Fig. (II-13)). Le cœfficient de restitution diminue de façon importante à très faible vitesse d'impact. Ceci signifie que le système dissipe plus d'énergie lorsque le poids de la bille est pris en compte durant l'interaction.

En conclusion, à relativement basse vitesse d'impact, l'énergie dissipée par la bille est principalement due au mécanisme viscoélastique et une petite partie aux emissions d'ondes élastiques et de vibrations de flexions. A plus basse vitesse d'impact, la forte décroissance du cœfficient de restitution lorsque $v_{imp} \to 0$ ne provient pas de l'apparition d'un nouveau mécanisme de dissipation, mais du fait que le système dissipe l'énergie d'une façon différente.

En effet, lorsque la force de pesanteur est prépondérante devant la force élastique, le système dissipe plus d'énergie que lorsque la force de pesanteur est négligeable au cours de l'interaction. Ceci est clair d'après la Fig. (II-13) quel que soit le choix du type de force viscoélastique.

II.7 Conclusion

Une étude expérimentale du comportement d'une bille rebondissant sur une surface plane stationnaire a été réalisée dans ce chapitre. Lorsque la durée d'une collision devient de l'ordre du temps de vol entre deux rebonds successifs, nous avons observé que la bille ne rebondit plus mais oscille sur la surface, avec une période caractéristique. Une expression analytique de cette période a été obtenue et est en bon accord avec les résultats expérimentaux. Nous avons aussi mesuré, pour chaque rebond, le cœfficient de restitution et la durée de la collision. Pour pratiquement tous les rebonds, le cœfficient de restitution est essentiellement constant et proche de 1. Lorsque la vitesse d'impact tend vers zéro, c.-à-d. pour les tous derniers rebonds, nous avons observé une forte décroissance du cœfficient de restitution. De plus, pour ces très basses vitesses d'impact, la durée de la collision est plus longue que celle prévu par la théorie de Hertz. Une expression intégrale de la durée de collision a alors été obtenue.

Un modèle non dissipatif, fondé sur une interaction non linéaire entre la bille et la surface (le contact de Hertz), donne des résultats en bon accord avec les expériences lorsque la gravité est prise en compte au cours de l'interaction. Ce modèle permet alors de décrire à la fois la dynamique du contact de tous les rebonds et les oscillations de la bille sur le plan.

Les différents mécanismes de dissipation d'énergie au cours d'un rebond ont été exposés. Nous avons souligné qu'à basse vitesse d'impact, ces pertes d'énergie sont principalement dues à une dissipation viscoélastique. Un modéle numérique dissipatif, fondé sur un mécanisme exclusivement viscoélastique, conduit à une évolution du cœfficient de restitution similaire à celle obtenue expérimentalement. De plus, nous avons souligné que la forte décroissance du cœfficient de restitution lorsque $v_{imp} \to 0$ ne provient pas de l'apparition d'un nouveau mécanisme de dissipation, mais du fait que le système dissipe l'énergie d'une façon différente : lorsque la force de pesanteur est prépondérante devant la force élastique, le système dissipe plus d'énergie que lorsque la force de pesanteur est négligeable au cours de l'interaction.

Finalement, notre travail montre aussi que la singularité collisionnelle n'est jamais atteinte expérimentalement. Par extension, l'effondrement inélastique ne semble donc n'être seulement qu'un concept de nature théorique.

Chapitre III

Dynamique de la collision d'une colonne de N billes avec le sol

III.1 Introduction

Les expériences unidimensionnelles de collisions à N corps ($N \geq 2$) sont nombreuses et aboutissent généralement à des résultats étonnants :

- Habituellement, une bille lâchée sur le sol d'une hauteur h, ne rebondira pas plus haut que h. Mais, lorsqu'une petite bille placée au sommet d'une bille plus grosse est lâchée simultanément, la petite bille rebondira beaucoup plus haut que sa hauteur de chute initiale. En effet, en supposant la collision élastique, la conservation de la quantité de mouvement montre que la petite bille peut atteindre une hauteur neuf fois supérieure à celle de son point de départ, si sa masse est négligeable par rapport à celle de la grosse bille. En pratique, pour des collisions inélastiques, la hauteur atteinte par la petite bille, après le rebond, est plus faible mais reste supérieure à h. Ce comportement est connu sous le nom de « l'effet de la superballe » [68, 69, 70, 71].

- Une chaîne horizontale de billes identiques, chacune suspendue de la même façon par l'intermédiaire de deux fils, exhibe un comportement exotique lorsqu'un certain nombre de billes, à l'une des extrémités de la chaîne, sont écartées et lançées sur les billes au repos. En conséquence de la conservation de l'énergie et de l'impulsion totale de la chaîne, il est communément admis, qu'après la collision, un même nombre de billes, que celles lançées initiallement, s'envolent à l'autre extrémité, tandis que toutes les autres billes sont au repos. Cependant, ces lois de conservation sont nécessaires mais pas suffisantes pour expliquer le comportement d'une chaîne de plus de 3 billes [72]. En effet, les billes, qui sont générallement décrites comme étant au repos, sont, en fait, séparées de leurs voisines par de petites distances et possèdent de faibles vitesses [21, 73].

Des travaux théoriques [74] et numériques [55, 67] ont été réalisés afin de décrire le rebond d'une colonne de billes inélastiques entrant en collision avec un mur stationnaire. Certaines de ces simulations [67] utilisent des lois d'interaction *ad hoc* où la durée de la collision est grande devant zéro tandis que d'autres [55] sont fondées sur une série de collisions binaires pour une colonne de sphères dures, c.-à-d. pour lesquelles les collisions sont considérées comme étant instantanées. Cependant, jusqu'à présent, aucun travail expérimental n'a été entrepris et les comportements observés numériquement [55, 67] sont soit irréalistes ou sans réelles interprétations.

Dans ce chapitre, nous étudions la dynamique de la collision d'une colonne de N billes avec un mur stationnaire. Initiallement, les billes sont en contact et au repos, et sont lâchées sous l'effet de la gravité d'une hauteur h au dessus du mur. La mise en place du problème est schématisée sur la Fig. (III-1). Ce système est bien adapté pour étudier, de façon simple, « l'effet de détachement », observé dans des simulations 1–D [67] fondées sur une loi d'interaction dissipative linéaire ou non linéaire. Cet effet sera expliqué en détail au § (III.8) tandis que son observation expérimentale et numérique sera présentées respectivement aux § (III.3.5) et (III.6.6). Par extension, la faible dimensionnalité de l'expérience et le fait qu'il n'y a pas d'énergie injectée au cours de la collision permet d'apporter des éclaircissements sur les mécanismes précurseurs de la fluidisation des milieux granulaires vibrés [10, 11, 12] (voir le § (III.9)). Finallement, ce problème soulève de nombreuses questions : comment évolue la force, ressentie par le sol, lorsque le nombre de billes N augmente ? Est-ce que les billes se détachent les unes des autres après la collision ? Quelle est l'évolution du temps de collision de la colonne avec le sol lorsque N croît ?

Le dispositif expérimental sera présentée au § (III.2). Les résultats expérimentaux seront exposés au § (III.3). Pour une hauteur de chute fixée, cette étude montre que la force maximale ressentie par le mur lors de la chute d'une seule bille est exactement la même que pour une colonne de 40 billes ! Nous verrons que cette étonnante propriété est reliée à la propagation d'une onde de déformation à travers la colonne et dépend de la « rigidité » du mur (voir le § (III.4)). De plus, au § (III.3), nous montrons que l'onde de déformation est émise au début de la collision et se propage, vers le haut, le long de la colonne avec une vitesse indépendante du nombre de billes. Cette vitesse est mesurée comme étant un ordre de grandeur plus faible que la vitesse des ondes longitudinales dans le matériau constituant les billes. La mesure du cœfficient de restitution effectif de l'ensemble de la colonne montre alors que plus le nombre de billes de la colonne est important, plus l'énergie dissipée lors de la collision est grande.

Au § (III.5), nous présenterons un modéle numérique non dissipatif. La loi non linéaire du contact de Hertz (voir le § (I.3.1)) sera utilisée pour décrire l'interaction entre deux billes. Les résultats de nos travaux numériques seront exposés au § (III.5). L'expression analytique de l'onde de déformation sera obtenue au § (III.7). Enfin, au § (III.8), nous nous focaliserons sur le mécanisme de l'effet de détachement des billes de la colonne. Nous soulignerons que l'effet de détachement, ainsi que, par extension, la fluidisation des milieux granulaires, provient de la redistribution d'énergie, à l'intérieur du système au cours de la collision et non pas à cause d'effets dissipatifs. Cette redistribution est gouvernée par la nature dispersive de la propagation de l'onde de déformation à travers la chaîne de billes.

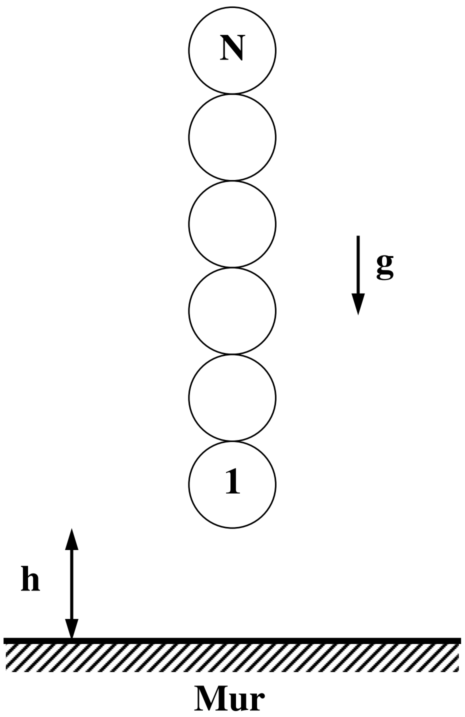


FIG. III-1 – *Mise en place du problème.*

III.2 Dispositif expérimental

Une colonne de N billes en acier inoxydable, chacune de 8 mm de diamètre sont plaçées à l'intérieur d'un tube en verre de diamètre intérieur $8,1$ mm. La tolérance sur le diamètre et la sphéricité de chaque bille est respectivement ± 4 μm et ± 2 μm. Le nombre de billes N peut varier de 1 à 40. La colonne de billes repose sur un capteur de force piézoélectrique PCB $200B02$ vissé à l'extrémité d'un cylindre en duralumin lui même fixé sur un vibreur (Brüel & Kjær 4809), comme le montre la Fig. (III-2). Le tube de verre ne repose pas sur le capteur mais est soit maintenu par une potence à 4 mm de ce dernier, pour les hauteurs de chute h inférieures au rayon R d'une bille, soit fixé sur le cylindre en duralumin, par l'intermédiaire d'une cornière, pour $h > R$. Le vibreur est piloté par un signal créneau, de fréquence 100 mHz. A première vue, l'utilisation d'un vibreur apparaît inapproprié pour les expériences de chute libre. Cependant, comme l'accélération de la table du vibreur est initiallement dirigée vers le bas et est supérieure à l'accélération de la gravité, la colonne de billes ne reposent plus sur le capteur et commence sa chute libre. Ainsi, pendant une période du signal d'excitation et sous certaines conditions qui seront développées aux § (III.2.1) et (III.2.2), les N billes en contact sont lâchées d'une hauteur h sur le capteur de force. Ceci est possible puisque la période du signal créneau (10 s) est très supérieure à la durée de la collision (35 μs pour $N = 1$; $1,04$ ms pour $N = 40$ avec, dans les deux cas, une hauteur de chute $h = 5,1$ mm). Le capteur est relié à un oscilloscope numérique afin d'enregistrer la collision avec la colonne de billes.

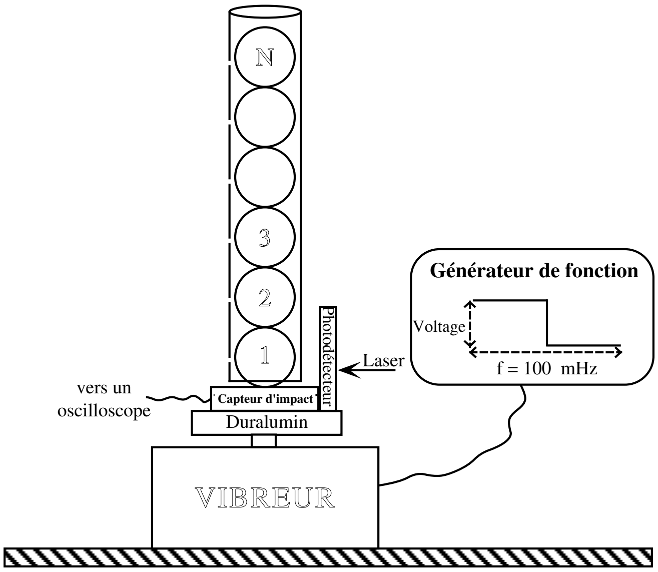


FIG. III-2 – *Dispositif expérimental. Le schéma n'est pas à l'échelle.*

III.2.1 Reproductibilité des mesures

La reproductibilité des mesures est obtenue si toutes les billes tombent en même temps en restant constamment en contact les unes avec les autres. Pour cela, il s'est avéré nécessaire de minimiser la force de friction de l'air sur les billes en faisant des encoches, tous les 32 mm, le long du tube en verre permettant ainsi une libre circulation de l'air de l'intérieur vers l'extérieur du tube. Pour éviter une aimantation des billes, due à la structure magnétique du vibreur, un cylindre de duralumin, de 5 cm de longueur, a été intercalé entre le capteur d'impact et le vibreur. De plus, ce cylindre absorbe partiellement les ondes émises lors du choc évitant ainsi la création d'ondes réfléchies pouvant perturber les mesures. Afin de vérifier que les billes restent en contact tout au long de leur chute libre, une expérience complémentaire a été entreprise et est décrite au § (III.3.1). L'accord entre les deux expériences montrera qu'au cours de la chute libre les billes ne se séparent pas les unes des autres (*cf.* le § (III.3.1)).

III.2.2 Mesure de la hauteur de chute

La hauteur de chute de la colonne de billes est de l'ordre du millimètre afin d'éviter de se trouver dans la limite plastique du matériau constituant le capteur, et ainsi de l'endommager. Cette hauteur est déterminée par une comparaison entre le signal issu d'un capteur de position optique solidaire du vibreur et celui issu du capteur de force. Le capteur de position est un photodétecteur, éclairé par une diode laser, délivrant un signal d'amplitude proportionnelle au déplacement de la table du vibreur.

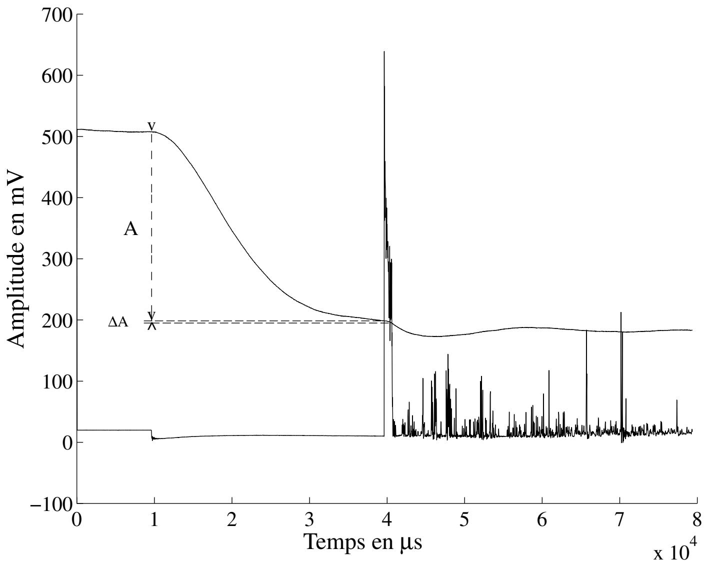


FIG. III-3 – *Signal délivré par le capteur de position (courbe du haut) et par le capteur d'impact (courbe du bas) lors de la chute de 40 billes. Le premier pic de la courbe du bas correspond à l'impact de la colonne sur le capteur, les autres pics étant les divers rebonds des billes. L'amplitude A est proportionnelle à la hauteur de chute de la colonne tandis que la variation d'amplitude ΔA est proportionnelle au déplacement de la table lors de la collision. Les deux signaux possèdent la même sensibilité en abscisse mais des sensibilités différentes en ordonnées. De plus, afin de différencier les deux courbes, le signal issu du capteur de position a été translaté vers le haut.*

La figure (III-3) représente la superposition des signaux issus du photodétecteur (courbe du haut) et du capteur d'impact (courbe du bas) lors de la chute de 40 billes. Il est évident, d'après la courbe du haut de la Fig. (III-3), que le vibreur ne suit pas de façon instantanée les variations du signal créneau ; son temps de réponse fini conduit plutôt à un comportement exponentiel. Le signal issu du capteur de force (courbe du bas de la Fig. (III-3)) montre qu'au cours d'une période du signal créneau le capteur subit plusieurs collisions. Il apparaît nettement sur cette figure que la première collision entre la colonne de billes et le capteur a lieu avant que la table du vibreur n'atteigne sa position minimale. La hauteur de chute n'est pas alors déterminée par l'amplitude crête à crête du signal créneau mais par l'amplitude A (voir la Fig. (III-3)) du signal de sortie du capteur de position. En tenant compte de la sensibilité du photodétecteur, dans la cas de la Fig. (III-3), la valeur de la hauteur de chute est $h = 5\ mm$. Le fait que la table du vibreur continue sa descente pendant la collision est peu important puisque la durée de la collision est très inférieure à la période du signal créneau, même lorsque la colonne comporte un grand nombre de billes. En effet, la variation d'amplitude ΔA lors de la collision (voir la Fig. (III-3)) correspond à une variation de la hauteur Δh inférieure à $7 \times 10^{-2}\ mm$, ce qui est négligeable par rapport à h. Cette valeur de Δh a été calculée dans le cas le plus défavorable, c.-à-d. pour le plus grand temps de collision observé au cours de nos expériences correspondant à une colonne de $N = 40$. Grâce à ce dispositif expérimental, il est possible d'étudier la collision de N billes avec le capteur de force pour différentes hauteurs de chute $(1 < h < 5,1\ mm)$ et pour $1 < N < 40$.

Lorsque la table du vibreur amorce sa descente, le capteur de force ressent une légère dépression[1] (voir la courbe du bas de la Fig. (III-3)) signifiant que la colonne de billes perd contact avec le capteur et commence sa chute libre. Le changement de pente observé sur le signal du photodétecteur, à la fin de la collision, est significatif de la violence du choc puisque le mouvement de la table du vibreur est affectée par la collision.

III.3 Résultats expérimentaux

III.3.1 Force ressentie par le capteur lors de la collision

L'allure du signal délivré par le capteur de force lors de la colision d'une colonne de N billes avec ce dernier est représentée sur la Fig. (III-4) pour différentes valeurs de N et pour deux hauteurs de chute différentes. Expérimentalement, à hauteur de chute fixée, un phénomène étonnnant apparaît. La force maximale F_{max}, que ressent le capteur au cours de la collision, est indépendante du nombre de billes de la colonne (voir les Figs. (III-4a–d)) ! La force maximale ressentie par le capteur lors de la chute d'une bille est exactement la même que celle d'une colonne de 40 billes ! Il est aussi remarquable que les débuts des courbes des Figs. (III-4a–d) se superposent presque parfaitement. Paradoxalement, on se serait plutôt attendu à ce que F_{max} soit une fonction croissante de N, et ceci pour deux raisons. D'une part, plus le nombre de billes de la colonne est grand, plus la masse impactante intervenant lors de la collision est élevée. D'autre part, la théorie de Hertz montre que la force maximale, lors du contact entre une sphère de masse m et un plan, dépend de la masse comme $m^{3/5}$ (voir l'Eq. (I.38)). Ainsi, pour une même hauteur de chute et pour des billes de même rayon, la collision d'une colonne de N billes chacune de masse m est différente de la collision d'une bille de masse $M = Nm$

$$\begin{cases} F_{max}(N) \sim N^0 F_{max}(1) & \text{pour une colonne de } N \text{ billes chacune de masse } m, \\ F_{max}(N) \sim N^{3/5} F_{max}(1) & \text{pour une bille de masse } M = Nm. \end{cases} \tag{III.1}$$

1. Cette dépression provient de la variation de force, due à la perte de contact, et non pas à l'accélération négative après que le contact se soit rompu. En effet, le capteur de force dynamique se comporte comme un accéléromètre lorsqu'il est chargé par une masse mais ne ressent pas les effets de l'accélération en l'absence de cette masse.

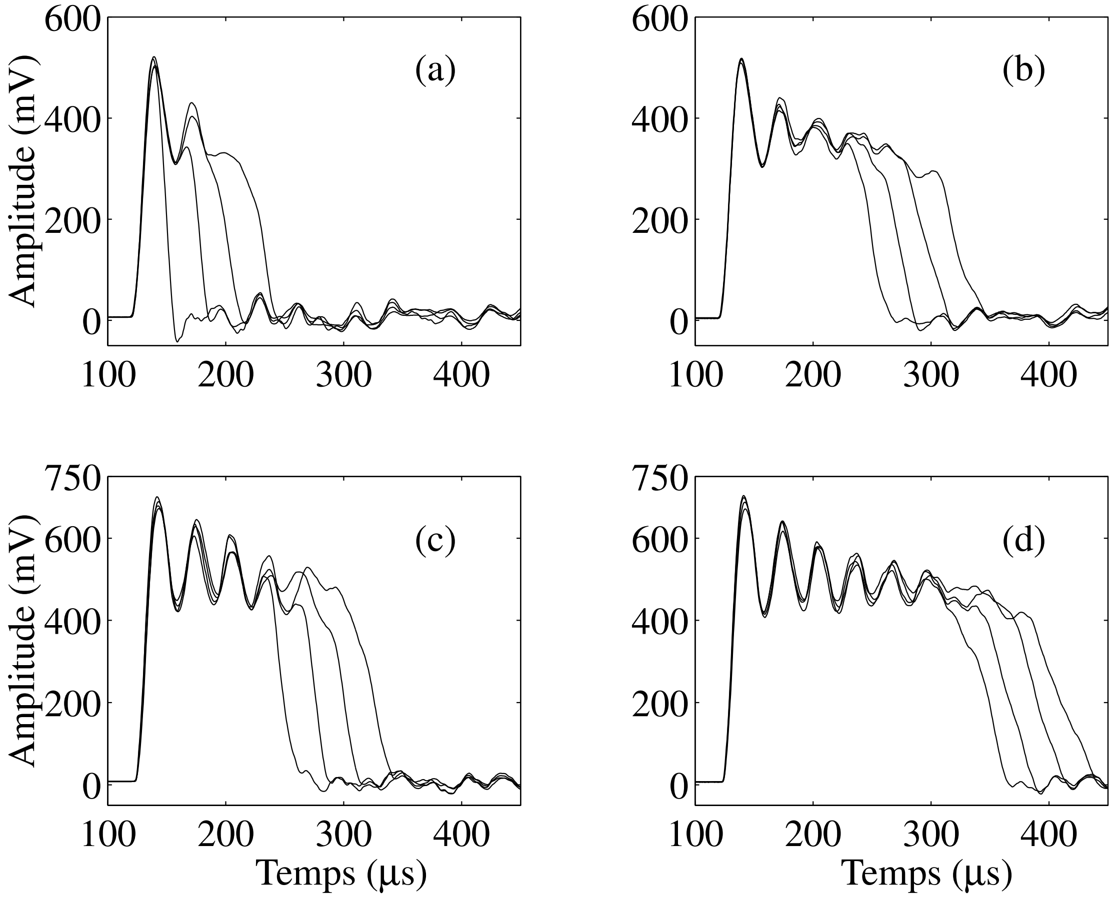


FIG. III-4 – *Signal délivré par le capteur de force lors de la collision d'une colonne de N billes pour deux hauteurs h différentes : (a) $N = 1$, 2, 3 ou 4 billes avec $h = 3,1$ mm ; (b) $N = 5$, 6, 7 ou 8 billes avec $h = 3,1$ mm ; (c) $N = 5$, 6, 7 ou 8 billes avec $h = 5,1$ mm ; (d) $N = 9$, 10, 11 ou 12 billes avec $h = 5,1$ mm.*

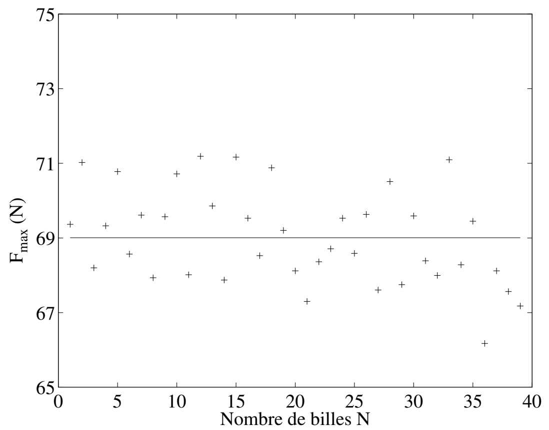


FIG. III-5 – *Evolution de F_{max} en fonction de N pour $h = 5,1$ mm. Les croix représentent les points expérimentaux et la droite est la moyenne des F_{max} sur toutes les mesures.*

A première vue, il peut paraître paradoxal que la force maximale soit indépendante du nombre de billes N. En effet, on s'attend à obtenir une force maximale de plus en plus importante lorsque le nombre de billes augmente car l'impulsion totale de la colonne doit évoluer de façon linéaire avec N. Cependant, le temps que dure la collision croît linéairement avec N (voir le § (III.3.2)). Cela semble raisonnable puisque l'aire sous chaque courbe de la Fig. (III-4) correspond au transfert de l'impulsion totale intervenant lors de la collision, c.-à-d. le produit d'une force par un temps. Ainsi, comme la force maximale est indépendante de N, il est nécessaire pour que la conservation de l'impulsion soit vérifiée que le temps de collision croisse linéairement avec N. Cependant, comme nous le verrons plus tard (*cf.* le § (III.3.3)), le fait que F_{max} soit indépendant du nombre de billes est relié d'une part à la propagation dans la colonne d'une onde de déformation émise lors du choc et d'autre part à la rigidité du mur. Pour $h = 5,1\ mm$, les valeurs expérimentales de F_{max} sont déduites de l'évolution temporelle du signal issue du capteur de force et ont été reportées sur la Fig. (III-5) en fonction de N. F_{max} est bien indépendant de N puisque les fluctuations expérimentales autour de la valeur moyenne $F_{max} = 69\ N$ sont distribuées aléatoirement, restent inférieures à 5% et sont du même ordre que les fluctuations obtenues pour plusieurs expériences à N fixé. La force maximale est atteinte après un intervalle de temps τ_{max} à partir du début de l'impact. τ_{max} est aussi indépendant de N (voir la Fig. (III-4)) et $\tau_{max} = 17,8 \pm 0,5\ \mu s$ pour $h = 5,1\ mm$.

Le deuxième phénomène intéressant observé sur toutes les courbes de la Fig. (III-4), est la nature oscillante de la force : la force croît jusqu'à F_{max}, puis oscille avec une période P avant de décroître puis de s'annuler. La période d'oscillation est indépendante de N et semble dépendre faiblement de la hauteur de chute : $P = 32,4\ \pm 1\ \mu s$ pour $h = 3,1\ mm$ alors que $P = 31,2\ \pm 1\ \mu s$ pour $h = 5,1\ mm$. De plus, les oscillations de la force s'amortissent autour d'une valeur moyenne qui semble décroître très lentement au cours du temps (voir la Fig. (III-4d)). La comparaison entre l'allure de la force de la Fig. (III-4) et celle obtenue par des simulations numériques non dissipatives montrera que cette décroissance est due à la dissipation d'énergie qui intervient au cours de la collision (voir le § (III.6.2)).

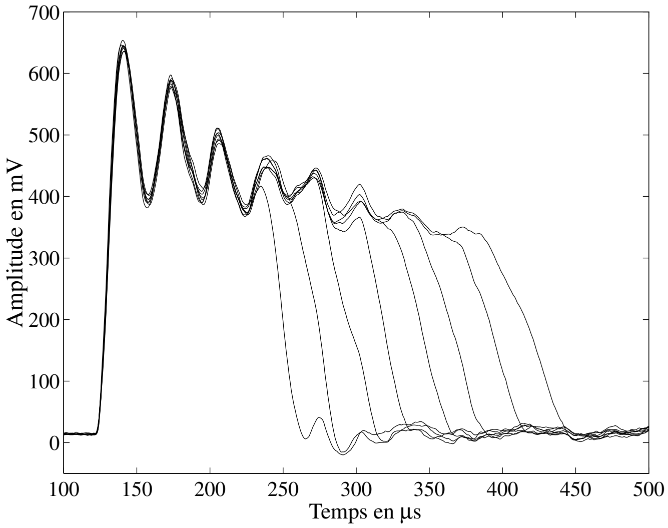


FIG. III-6 – *Signal délivré par le capteur de force rentrant en collision avec une colonne de N billes initialement au repos, N variant de 5 à 12.*

Une expérience complémentaire a été réalisée afin de vérifier que les billes restent en contact lors de leur chute libre. La force ressentie par le capteur d'impact doit être la même[2]dans le cas de la chute libre de N billes en contact que dans le cas qui consisterait à se placer dans le référentiel associé aux billes, c.-à-d. si le capteur entrait en collision avec la même chaîne de billes au repos. Le dispositif expérimental utilisé pour vérifier qu'il en est bien ainsi est quasiment identique à celui décrit au § (III.2). La colonne est maintenant maintenue par l'intermédiaire d'un diaphragme collé sur l'extrémité basse du tube en verre lui–même solidaire d'une potence. Le sens ascendant du signal créneau, délivré par le générateur de fonctions, permet alors de faire entrer en collision le capteur de force avec la colonne de billes initiallement au repos. La figure (III-6) représente l'allure de la force ressentie par le capteur lorsque que ce dernier vient heurter la colonne de billes. L'accord entre les allures des Figs. (III-6) et (III-4c–d) montre que les billes, au cours de leur chute libre, tombent en restant en contact les unes avec les autres. Ainsi, la raison de la présence des oscillations de la force sur la Fig. (III-4) n'est pas due à une quelconque imperfection du montage expérimental conduisant à de légères séparations entre les billes voisines lors de leur chute.

III.3.2 Durée de la collision d'une colonne de N billes

La durée de collision τ_1 entre une bille, lâchée d'une hauteur h, et un plan, supposé de masse infinie, est obtenue à partir de la théorie de Hertz (voir le § (I.3.2)) et a pour expression (voir l'Eq. (I.36))

$$\tau_1 = 2,94 \left(\frac{5m}{4K}\right)^{2/5} v_{imp}^{-1/5}, \tag{III.2}$$

où m est la masse de la bille, $v_{imp} = \sqrt{2gh}$ sa vitesse juste avant le choc, $g = 9,81 m/s^2$ l'accélération de la gravité et K le cœfficient de l'interaction de Hertz pour un contact sphère–plan (*cf.* l'Eq. (I.24)). Pour une bille en acier inoxydable, de rayon $R = 4\ mm$ et pour un capteur recouvert d'acier inoxydable, assimilé à un plan massif en acier inoxydable, la valeur du paramètre K est alors, d'après l'Eq. (I.24) et la table de la page 16, $K = 9,858 \times 10^9\ N/m^{3/2}$.

Soit τ_N la durée de la collision de la colonne de N billes avec le capteur. La mesure de τ_N est déduite[3] du profil de la force donnée par le capteur au cours de la collision. L'évolution de τ_N est représentée sur la Fig. (III-7), pour une hauteur de chute $h = 5,1\ mm$, en fonction du nombre de billes N constituant la colonne. La figure (III-7) montre que le temps de collision dépend linéairement du nombre de billes. Cependant, le temps de collision de N billes n'est pas égale à N fois le temps de collision d'une seule bille. En effet, l'équation de la droite de la Fig. (III-7), n'est pas $\tau_N = N\tau_1$ mais

$$\tau_N = (N-1)T_q + \tau_1 \ , \tag{III.3}$$

où $T_q = 25,47\ \mu s$ est la pente de la droite en traits pleins et $\tau_1 = 35,5\ \mu s$ le temps de la collision d'une seule bille. Cette valeur expérimentale de τ_1 est en bon accord avec la valeur théorique ${\tau_1}_{theo} = 34,2\ \mu s$ déduite de l'Eq. (III.2) avec $h = 5,1\ mm$, $m = 2,05 \times 10^{-3}\ kg$ et

2. L'accélération ressentie par le capteur, avant d'entrer en collision avec la chaîne de billes, est négligeable (voir la note en bas de la page 68).

3. La valeur de τ_N est la durée entre $F(t=0)$ et $F(\tau_N) = 0$, $t = 0$ correspondant à l'instant du début de la collision.

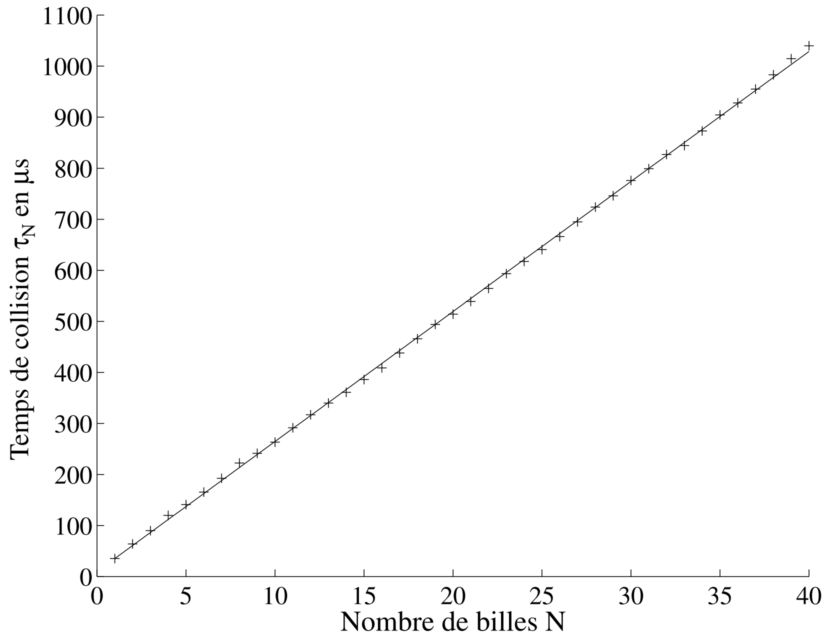


FIG. III-7 – *Evolution du temps de collision, τ_N, d'une colonne de N billes en fonction de N. La hauteur de chute est $h = 5,1$ mm. Les croix représentent les points expérimentaux et la droite la fonction $\tau_N = (N-1)T_q + \tau_1$ avec $T_q = 25,47$ μs et $\tau_1 = 35,5$ μs (voir le corps du texte pour plus de détails).*

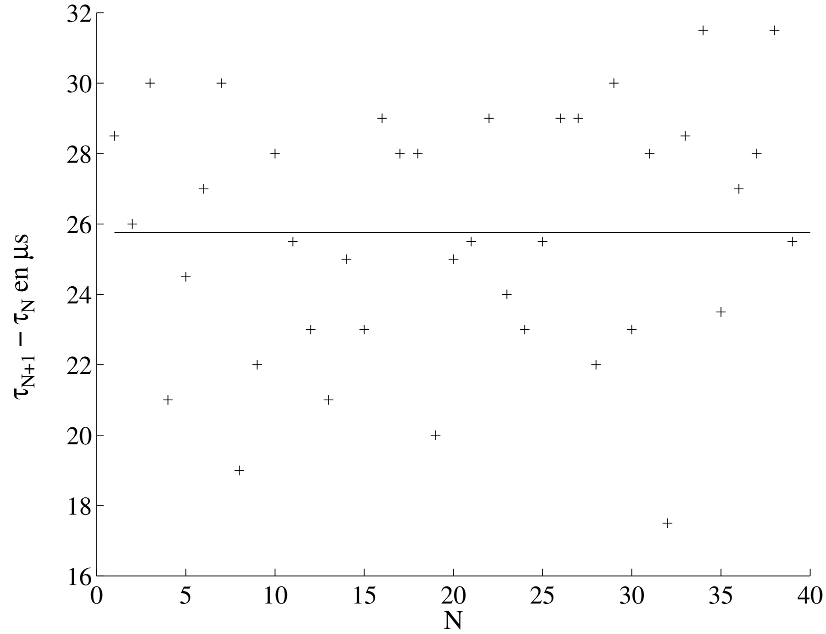


FIG. III-8 – *Evolution de $\Delta\tau_N = \tau_{N+1} - \tau_N$ en fonction de N. La hauteur de chute est $h = 5,1$ mm. Les croix représentent les points expérimentaux et la droite est la moyenne des $\Delta\tau_N$ sur toutes les mesures : $\langle\Delta\tau_N\rangle = 25,47$ μs.*

$K = 9,858 \times 10^9\ N/m^{3/2}$. De plus, comme nous le verrons au § (III.6.4), le fait que τ_N ne soit pas égal à $N\tau_1$ n'est pas du au fait qu'au cours de la collision il existe deux types de contact (c.-à-d. que tous sont entre sphères excepté un, entre un plan et une sphère).

Définissons $\Delta\tau_N$ comme la différence entre τ_{N+1}, le temps de collision d'une colonne de $N+1$ billes, et τ_N

$$\Delta\tau_N \equiv \tau_{N+1} - \tau_N \ . \tag{III.4}$$

Comme le montre la Fig. (III-8), $\Delta\tau_N$ est, aux fluctuations expérimentales près, indépendant de N et est en moyenne égale à T_q. En effet, ces fluctuations sont du même ordre que celles obtenues pour plusieurs expériences à N fixé. Toute la dynamique de la collision à N billes semble être régie par ce paramètre T_q dont le sens physique sera explicité dans le § (III.3.3).

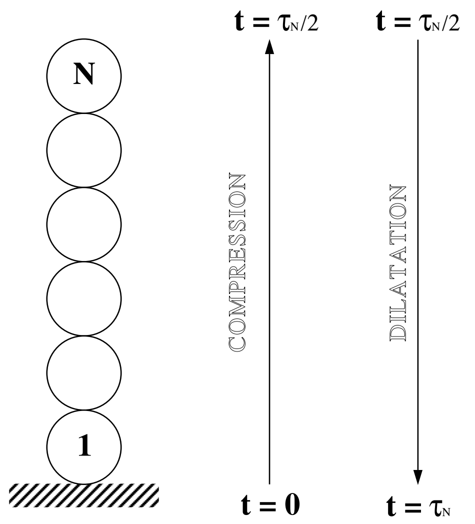


FIG. III-9 – *Sens de la propagation de l'onde de déformation au cours de la collision.*

III.3.3 Vitesse de propagation de l'onde de déformation dans la colonne

Lors du contact de la colonne avec le capteur, une faible partie de l'énergie incidente est toujours dissipée (voir le § (I.4)), notamment en énergie de vibration rayonnée dans la cible, à partir du point d'impact, sous forme d'ondes acoustique. Les ondes de compression–dilatation ainsi émises lors du choc correspondent aux vibrations, autour de leurs positions moyennes, des atomes du matériau dans lequel se propage l'onde. Ces ondes sont toujours présentes dès lors qu'il y a choc mais n'impliquent, pour notre gamme de vitesse d'impact, qu'une très faible[4] partie de l'énergie incidente, de l'ordre de 1% (voir § (I.4) et les Refs. [23, 28, 29]). La majeure partie de l'énergie incidente est transformée en énergie potentielle élastique et est emmagasinée par les billes lors de leur déformation. Cette énergie potentielle élastique sera restituée lors de la dilatation des billes, correspondant au rebond de la colonne. Afin de comprendre pourquoi la colonne rebondit et de quelle façon, il est nécessaire de savoir comment chaque bille de la colonne « prend conscience » de la présence du sol, c.-à-d. comment la déformation, ayant

4. La théorie de Reed [28] appliqué à l'impact d'une bille en acier inoxydable sur un plan de même nature, à une vitesse de $0,3\ m/s$, conduit à une énergie dissipée sous forme d'ondes élastique égale à $0,65\%$ de l'énergie cinétique de la bille avant l'impact.

lieu initiallement entre la bille du bas et le sol, se transmet d'une bille à une autre au cours du temps. La figure (III-9) montre schématiquement le sens de la propagation de l'onde de déformation de la chaîne véhiculant l'information (c.-à-d. la présence du sol) tout au long de la colonne. Le choc initial engendre une perturbation (onde de compression de la chaîne) qui se propage vers le haut de la colonne, se « réfléchit » sur l'extrémité supérieure de la colonne (la bille du haut de la colonne commence alors à se dilater) puis, la perturbation (onde de dilatation de la chaîne) se propage vers le bas de la colonne. Dès lors que l'onde a, de nouveau, atteint le bas de la colonne, la colonne perd contact avec le capteur et se détache du sol. Le temps de collision de la colonne correspond donc au temps que met l'onde pour parcourir deux fois la longueur de la colonne. Afin de connaître la vitesse de propagation de cette onde, il suffit de reporter la longueur $4RN$ que parcourt cette onde en fonction du temps τ_N qu'elle met pour parcourir cette distance.

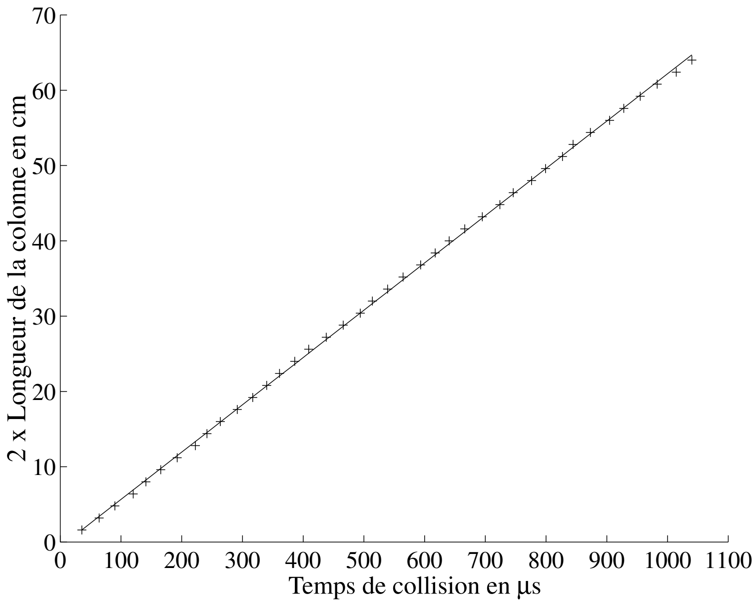


FIG. III-10 – *Distance de propagation $4RN$ de l'onde de déformation en fonction du temps de propagation τ_N. La hauteur de chute est $h = 5,1$ mm. Les croix représentent les points expérimentaux et la droite en traits pleins la fonction $4RN = \tau_N v + (4R - v\tau_1)$. La pente de la droite détermine la vitesse $v = 628$ m/s de cette onde.*

La figure (III-10) montre que la vitesse de l'onde de déformation est indépendante du nombre de billes. Cette vitesse est par conséquent constante le long de la chaîne de billes. Dans l'annexe D, on exposera les raisons qui imposent que cette vitesse soit constante le long de la colonne. La pente de la droite en traits pleins de la Fig. (III-10) donne alors la vitesse v de l'onde de déformation dans la colonne

$$v = 628 \; m/s \quad \text{pour } h = 5,1 \; mm \; . \tag{III.5}$$

Il est à noter que cette perturbation se propage avec une vitesse qui est un ordre de grandeur plus faible que celle du son dans un barreau en acier inoxydable qui est environ 5000 m/s (*cf.* table page 16). Une vitesse si faible est aussi observée dans de nombreuses expériences (voir le Chap. IV et les Refs. [21, 75, 76, 77]) et simulations [78] faisant intervenir la propagation d'une onde dans un milieu discret. Ceci résulte de la nature discrète de la chaîne qui agit comme un ensemble d'oscillateurs non linéaires couplés. En effet, les travaux de Hertz [13] montrent que, lorsqu'une bille subit une compression, la pression est beaucoup plus importante dans le voisinage immédiat de la région de contact que dans tout le reste de la bille (voir aussi la Ref. [43]). On peut alors considérer la bille comme constituée d'une partie déformable, agissant comme un ressort non linéaire dans ce voisinage, et d'une partie indéformable dans pratiquement tout le corps de la bille.

Appelons T'_q le temps mis par l'information (c.-à-d. le tranfert d'impulsion d'une bille à une autre) pour parcourir un aller retour dans une bille. Pour des billes identiques de rayon R, la vitesse v de l'onde de déformation de la colonne est alors donnée par

$$v = \frac{4R}{T'_q} \ . \tag{III.6}$$

En utilisant les Eqs. (III.5) et (III.6) avec $R = 4 \times 10^{-3}\ mm$, nous trouvons que $T'_q = 25,47\ \mu s$. Cette valeur de T'_q est égale à celle de T_q, obtenue par les mesures de durée de collision (voir la Fig. (III-10) et l'Eq. (III.3)), qui correspond à $\langle \Delta T_N \rangle$. Ainsi, la durée T_q à ajouter au temps de collision τ_N d'une colonne de N billes pour obtenir le temps de collision τ_{N+1} d'une colonne de $N+1$ billes correspond à la durée T'_q que prend le tranfert d'impulsion, d'une bille à une autre, pour parcourir un aller retour dans une bille. Par conséquent, en utilisant l'Eq. (III.6) avec $T'_q = T_q$ et en multipliant par $4R/4R$ le premier terme du membre de droite de (III.3), on obtient l'équation $4RN = \tau_N v + (4R - v\tau_1)$ de la droite en traits pleins de la Fig. (III-10). Finallement, la vitesse v de l'onde de déformation, qui se propage à l'intérieur de la colonne de billes, a été mesurée expérimentalement, pour différentes hauteurs de chute h, par la même méthode que précédemment. Les résultats ont été regroupés dans le Tab. (III.1).

La vitesse de l'onde croît avec la hauteur de chute, c.-à-d. avec la vitesse d'impact de la colonne. Comme le montre le Tab. (III.1), ces résultats sont en bon accord avec les simulations numériques du § (III.6.5) et avec l'expression analytique de la vitesse de l'onde de déformation qui sera obtenu au § (III.7).

	Vitesse v (m/s)		
h (mm)	Expérience	Théorie	Simulation
$1,9$	557	586	583
$3,1$	586	616	613
$5,1$	628	647	644

TAB. III.1 – *Vitesse v de l'onde de déformation pour différentes hauteurs de chute h.*

Expliquons maintenant pourquoi la force maximale ressentie par le capteur de force est indépendante du nombre de billes constituant la colonne. Comme nous l'avons vu au § (III.3.1), pour une hauteur de $h = 5,1\ mm$ et quelle que soit la valeur de N, la force maximale est atteinte après un intervalle de temps $\tau_{max} = 17,8\ \mu s$ à partir du début de la collision. Ce temps correspond à la moitié du temps de collision $\tau_1 = 35,5\ \mu s$ d'une seule bille pour $h = 5,1\ mm$

(*cf.* § (III.3.2)). Par ailleurs, pour une colonne de N billes, le capteur « prend conscience » de la présence de la seconde bille lorsque l'onde de déformation l'atteint et rapporte cette information au capteur, c.-à-d. après un temps $T_q = 25,47\ \mu s$ à partir du début de l'impact. Par conséquent, pour les temps $0 < t < T_q$, le capteur ne ressent la présence que d'une seule bille quel que soit le nombre de billes de la colonne. Puisque le maximum du cycle de charge de cette bille est atteint à τ_{max} et puisque $\tau_{max} < T_q$, la force maximale est ainsi indépendante du nombre de billes de la colonne. Ce comportement correspond au cas de la collision avec un « mur rigide ». Ultérieurement, nous verrons qu'une collision avec un « mur rigide » sera définie comme étant telle que $\tau_{max}(N = 1) < T_q$ tandis qu'une collision avec un « mur mou » correspondra à l'inégalité opposée, c.-à-d. $\tau_{max}(N = 1) \geq T_q$. Comme nous le montrerons expérimentalement au § (III.4) et numériquement au § (III.6.7), dans le cas de la collision avec un « mur mou », la force maximale dépendra alors de N.

III.3.4 Cœfficient de restitution effectif

L'impulsion totale transférée lors de la collision d'une colonne de N billes avec le capteur est déterminée, expérimentalement, à partir de l'aire sous la courbe décrivant l'évolution de la force ressentie par le capteur au cours du temps. En effet, dans le cas idéal d'une collision élastique sans dissipation, l'aire sous la courbe correspond à la somme de l'impulsion incidente (cycle de charge) et de l'impulsion restituée (cycle de décharge), c.-à-d. à deux fois l'impulsion incidente. Dans le cas d'une collision inélastique, une partie de l'énergie incidente est dissipée et l'aire sous la courbe est donc inférieure au double de l'impulsion incidente. La figure (III-11) met en évidence le fait que la collision à N billes dissipe de plus en plus d'énergie lorsque N croît. Ceci explique la raison pour laquelle la valeur moyenne des oscillations de la force décroît légèrement au cours du temps (voir la figure (III-4d)).

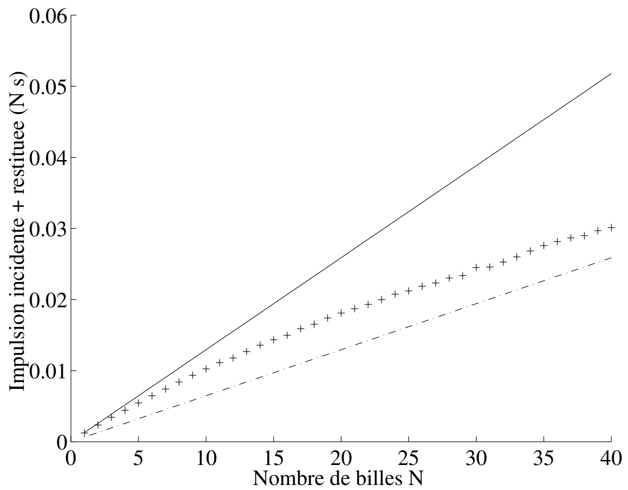


FIG. III-11 – *Evolution de la somme de l'impulsion incidente et de l'impulsion restituée en fonction de N lors de la collision d'une colonne de N billes lâchées d'une hauteur $h = 5,1\ mm$. Les croix représentent les points expérimentaux. La droite en traits pleins représente le double de l'impulsion incidente $2mv_{imp}N$, qui serait conservée au cours de la collision, si l'impact était parfaitement élastique. La droite en traits mixtes représente le cas où la collision serait complètement inélastique, c.-à-d. $mv_{imp}N$.*

Pour une collision entre une bille et un plan au repos, le cœfficient de restitution est habituellement défini comme le rapport entre la vitesse de la bille après le choc sur celle avant le choc (voir § (I.4) et l'Eq. (I.42)). Pour N billes, nous introduisons le cœfficient de restitution effectif de l'ensemble de la colonne

$$\epsilon_{eff} = -\frac{\sum_{i=1}^{N} v_i^{\mathrm{f}}}{\sum_{i=1}^{N} v_i^{\mathrm{i}}} = -\frac{1}{N\, v_{imp}} \sum_{i=1}^{N} v_i^{\mathrm{f}} \ , \tag{III.7}$$

où v_i^{f} et v_i^{i} sont les vitesses de la $i^{ème}$ bille respectivement après et avant la collision. Cette définition de ϵ_{eff} est choisie du fait qu'expérimentalement nous avons seulement acces à l'impulsion total du système. Cependant, pour $N = 1$, l'Eq. (III.7) est identique à la définition habituelle du cœfficient de restitution (*cf.* l'Eq. (I.42)). L'évolution de ϵ_{eff} en fonction de N est montré sur la Fig. (III-12).

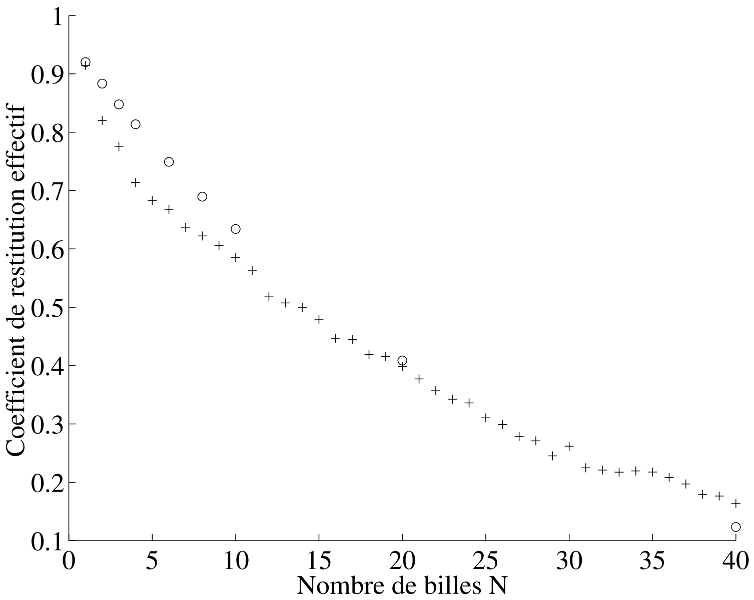


FIG. III-12 – *Cœfficient de restitution de l'ensemble de la colonne (voir l'Eq. (III.7)) en fonction de N lors de la collision d'une colonne de N billes lâchées d'une hauteur $h = 5,1$ mm. Les croix représentent les points expérimentaux. Les cercles correspondent aux simulations « event-driven » de Luding [79] pour des vitesses initiales $v_{imp} = 0,31$ m/s de chaque particule, le cœfficient de restitution entre particule–particule et entre mur–particule étant respectivement* 0,96 *et* 0,92.

Les valeurs expérimentales de ϵ_{eff} sont déduites, pour chaque N, de la mesure de l'impulsion totale du système (voir les croix de la Fig. (III-11)) et de l'impulsion incidente Nmv_{imp}. Nous trouvons que ϵ_{eff} décroît avec N, pour nos valeurs de N. Ceci signifie que la perte de quantité de mouvement au cours de la collision d'une colonne de N billes croît lorsque N augmente. Nous pouvons étendre ce résultat pour la perte d'impulsion à la perte d'énergie. Cependant, en utilisant des simulations de dynamique moléculaire, Luding *et al.* [67] montrent, pour une loi d'interaction linéaire dissipative, que l'énergie perdue décroît lorsque N augmente et est pratiquement indépendant de N, pour une interaction non linéaire dissipative. Ce désaccord apparent peut être du au fait que ces auteurs utilisent une définition différente pour le cœfficient de restitution effectif de l'ensemble de la colonne (voir l'Eq. (III.33) du § (III.8) et aussi la Ref. [67]). En effet, en utilisant l'Eq. (III.7) comme définition du cœfficient de restitution effectif, Luding [79] montre, lors de simulation « event–driven », que ϵ_{eff} décroît avec N (voir les symboles $\circ$ de la Fig. (III-12)).

III.3.5 Détachement des billes de la colonne

Pour savoir comment rebondit la colonne de billes après la collision, il est nécessaire de visualiser le signal délivré par le capteur de force sur un temps beaucoup plus long que le temps de collision de la colonne. La figure (III-13) montre l'évolution temporelle d'un tel signal. Le premier pic, le plus à gauche sur la Fig. (III-13), correspond à la première collision de l'ensemble de la colonne avec le capteur. Les autres pics représentent les différents rebonds des billes. La figure (III-13) montre que la colonne de billes ne rebondit pas en bloc. En effet, si la colonne rebondissait successivement en bloc, la dissipation imposerait une lente décroissance monotone des amplitudes des pics. L'apparition de pics de grande amplitude au milieu des pics dont l'amplitude décroît au cours du temps prouve le contraire. Ainsi, après la collision entre la colonne et le capteur, les billes ne sont plus en contact les unes avec les autres. Ce détachement des billes de la colonne est en accord avec le comportement qui sera trouvé numériquement aux § (III.6.1) et (III.6.6), et sera expliqué en détail au § (III.8).

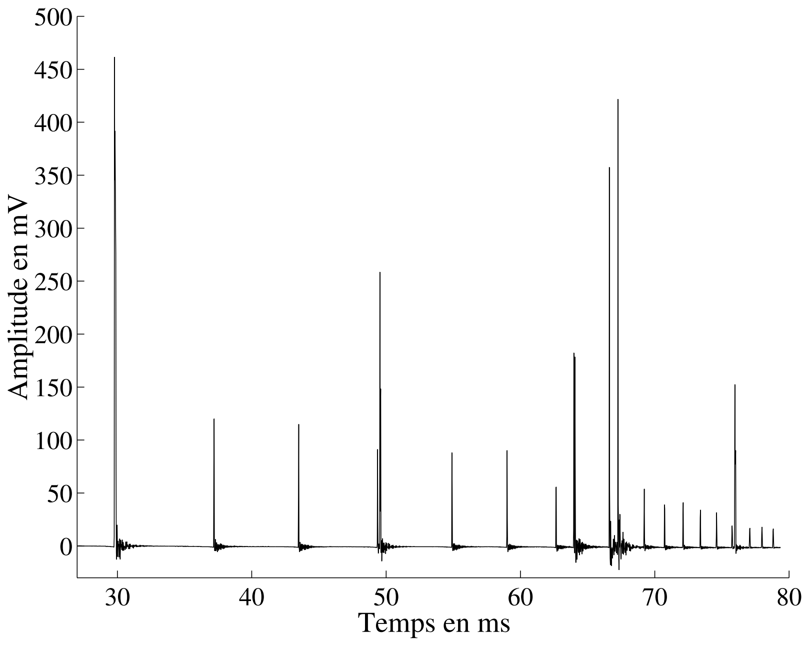


FIG. III-13 – *Exemple de signal délivré par le capteur de force au cours du temps pour $N = 5$ et $h = 2,7$ mm. Le premier pic correspond à la première collision entre l'ensemble de la colonne et le capteur. Les autres pics sont les divers rebonds des billes. La résolution de l'oscilloscope est de 7 $\mu s/pt$, 80000 points ont été enregistrés et chaque pic est constitué d'au moins 7 points de mesures.*

III.4 Collision avec un mur « mou »

Considérons maintenant le cas de la collision d'une colonne de N billes avec un mur mou stationnaire. Le mur est défini comme étant mou ou rigide d'après les définitions qui ont été donné au § (III.3.3). Le dispositif expérimental est identique à celui présenté en Sec. (III.2) à l'exception du capteur qui est maintenant recouvert avec du ruban adhésif ou avec un morceau de laiton, de plexiglas, de PVC, de caoutchouc, de carton ou de bois. Deux types de cartons sont utilisés et seront appelés ultérieurement « carton I » et « carton II ». Les épaisseurs de chaque matériau sont de l'ordre de 1 mm et sont regroupées dans le Tab. (III.2). Pour toutes les expériences considérées dans ce paragraphe, la valeur de la hauteur de chute est $h = 2,9\ mm$. Par conséquent, la vitesse d'impact de la colonne est fixée quel que soit le choix du morceau de matériau collé sur le capteur.

Matériau	Epaisseur (mm)	N_d	$\tau_{max}(N=1)$ (μs)	$\tau_{max}(N=N_d)$ (μs)
aucun	-	1	17	17
laiton	$1,2$	2	$47,5$	46
ruban adhésif	$0,3$	4	$47,5$	112
PVC	1	6 ± 1	$67,5$	171 ± 19
plexiglas	1	8 ± 1	69	228 ± 11
carton II	$0,5$	11 ± 1	191	396 ± 21
bois	2	15 ± 1	$127,5$	468 ± 26
carton I	$0,8$	22 ± 2	227	743 ± 23
caoutchouc	1	28 ± 4	221	950 ± 57

TAB. III.2 – *Résultats expérimentaux lors de la collision entre N billes en acier inoxydable et un capteur de force recouvert avec différent matériau, pour une hauteur de chute fixée $h = 2,9\ mm$.*

Le signal issu du capteur de force lors de la collision de la colonne des N billes est montré sur la Fig. (III-14) pour différentes valeurs de N et pour différent matériau collé sur le capteur. Sauf pour la Fig. (III-14a), la force maximale ressentie par le capteur est maintenant dépendante du nombre de billes constituant la colonne (*cf.* les Fig. (III-14b–f)). En effet, pour chaque matériau utilisé, la force maximale croît avec N pour de basses valeurs de N jusqu'à ce qu'elle devienne indépendante de N. Quand le capteur n'est recouvert d'aucun matériau (voir la Fig. III-14a), les résultats expérimentaux sont identiques à ceux du § (III.3) : indépendance de la force maximale ressentie par le capteur de force et nature oscillante de la force. Il est à noter que cette dernière propriété n'est jamais observée lorsque un matériau mou est collé sur le capteur. Pour chaque matériau et chaque valeur de N, la valeur expérimentale de F_{max} est déduite de l'évolution temporelle du signal issu du capteur de force. Ces valeurs sont représentées sur la Fig. (III-15) en fonction de N. Pour un matériau donné, définissons N_d comme étant le nombre de bille critique à partir duquel la force maximale F_{max} devient indépendant du nombre de billes de la colonne. Il est évident d'après la Fig. (III-15) que plus le matériau est mou, plus le nombre de billes critique N_d est grand.

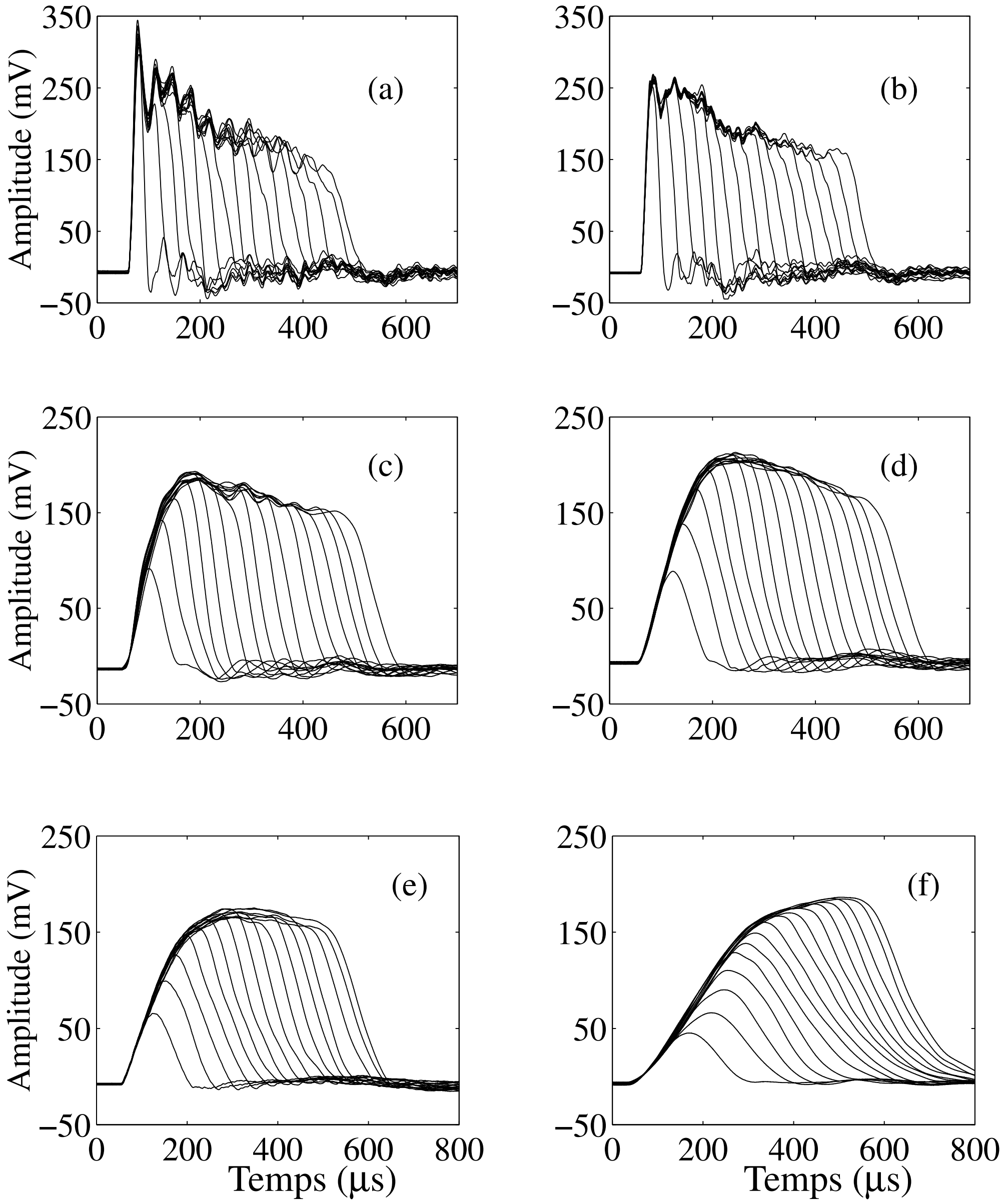


FIG. III-14 – *Signal issu du capteur de force lors de la collision d'une colonne de N billes pour différents matériaux collés sur le capteur : (a) aucun ; (b) laiton ; (c) ruban adhésif ; (d) PVC ; (e) plexiglas ; (f) bois. Dans tous les cas, N varie de 1 à 16 et $h = 2,9$ mm.*

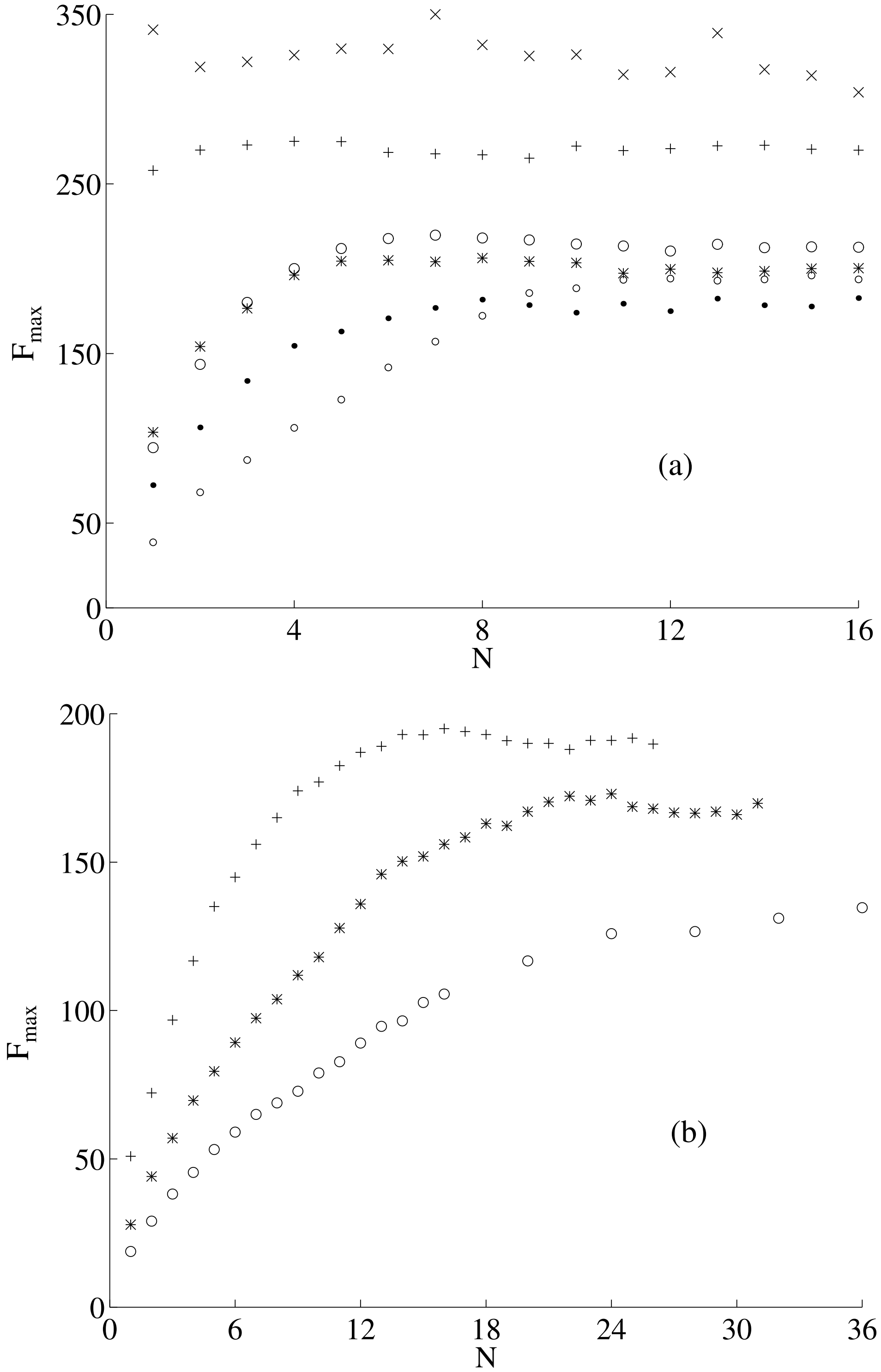


FIG. III-15 – *Force maximale F_{max}, en Newton, en fonction de N pour différents matériaux collés sur le capteur : (a) ($\times$) aucun ; ($+$) laiton ; ($*$) ruban adhésif ; ($\bigcirc$) PVC ; ($\bullet$) plexiglas ; ($\circ$) carton II. (b) ($+$) bois ; ($*$) carton I ; ($\bigcirc$) caoutchouc.*

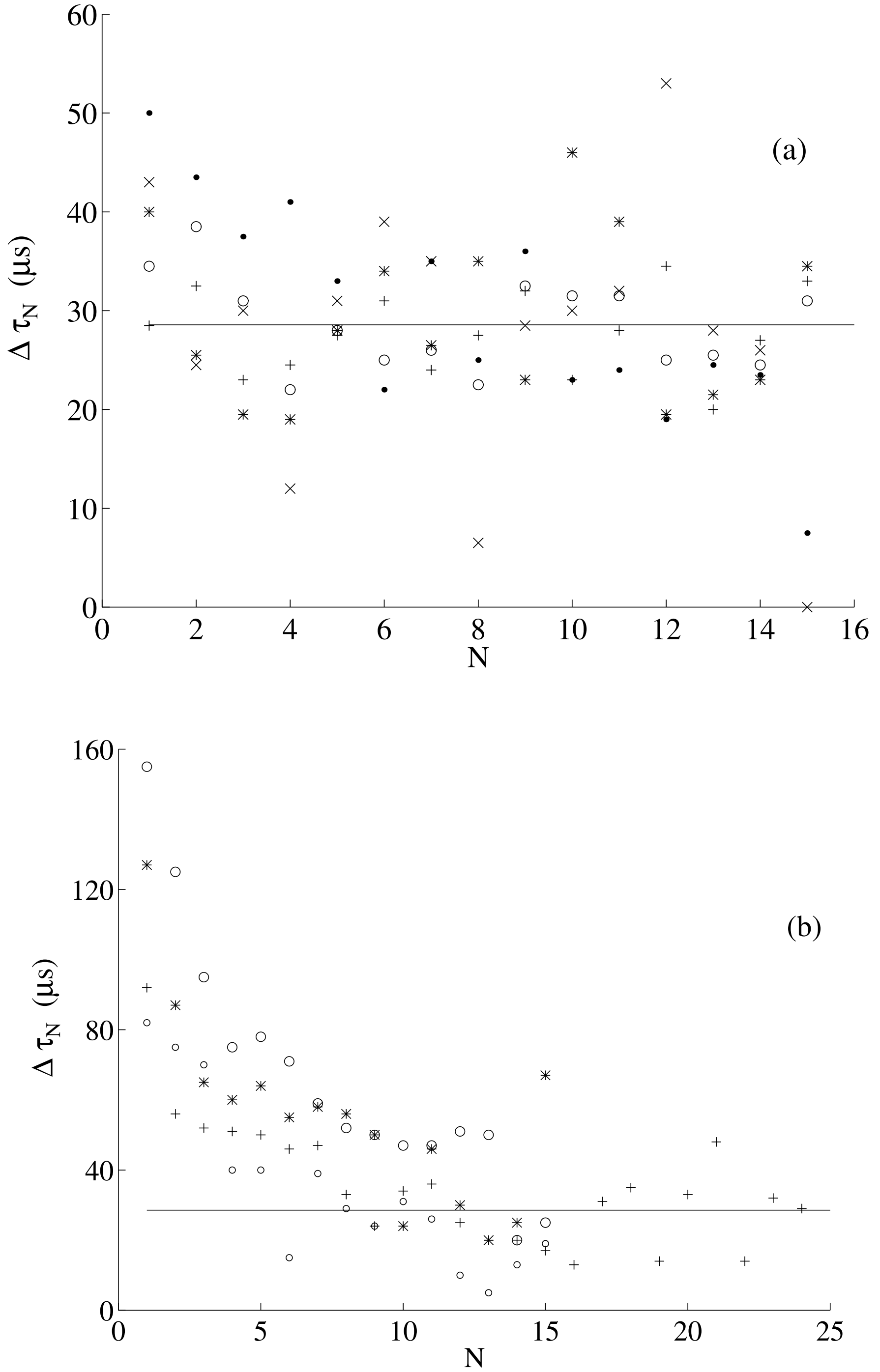


Fig. III-16 – *Evolution de $\Delta\tau_N = \tau_{N+1} - \tau_N$ en fonction de N pour différents matériaux collés sur le capteur : (a) ($\times$) aucun ; (+) laiton ; ($*$) ruban adhésif ; (○) PVC ; (●) plexiglas. (b) (○) caoutchouc ; (+) bois ; ($*$) carton I; (∘) carton II. Dans tous les cas, la hauteur de chute est $h = 2,9$ mm. La ligne en traits pleins est la valeur moyenne des $\Delta\tau_N$ sur toutes les mesures de la Fig. (a): $\langle\Delta\tau_N\rangle = 28,6$ µs.*

Pour chaque matériau, la différence $\Delta\tau_N$ entre τ_{N+1}, la durée de l'impact d'une colonne de $N+1$ billes, et τ_N est montrée sur la Fig. (III-16) en fonction de N. La figure (III-16a) montre, qu'aux erreurs expérimentales près, $\Delta\tau_N$ est indépendant de N et du type de matériau collé sur le capteur. Ceci est en accord avec les résultats expérimentaux du § (III.3.2) et de l'interprétation de $\Delta\tau_N$ donnée au § (III.3.3) : $\Delta\tau_N$ est égal en moyenne à T_q qui repésente le temps mis par le transfert d'impulsion d'une bille à une autre pour parcourir un aller retour dans une bille et ainsi ne dépendrait pas le nature du mur. La valeur expérimentale de $T_q = \langle\Delta\tau_N\rangle = 28,6\ \mu s$ est alors déduite de la Fig. (III-16a). Cependant, pour les matériaux les plus mous, à basses valeurs de N, $\Delta\tau_N$ dépend à la fois de N et de la nature du matériau collé sur le capteur (voir la Fig. (III-16b)), cet effet de bord disparaîssant pour des valeurs de N plus grandes.

Expliquons maintenant pourquoi la force maximale ressentie par le capteur dépend ou non, selon la rigidité du mur, du nombre de billes de la colonne. Pour une colonne de N billes, la force maximale $F_{max}(N)$ est atteinte après un temps $\tau_{max}(N)$ à partir du début de la collision et est indépendante du nombre de billes pour $N \geq N_d$. Comme nous l'avons vu au § (III.3.3) dans le cas d'un mur rigide, la non dépendance de F_{max} avec N est reliée à la propagation d'une onde de déformation à l'intérieur de la colonne et provient du fait que $\tau_{max}(N=1) < T_q$, τ_{max} étant dans ce cas indépendant de N puisque $N_d = 1$. Dans le cas où $\tau_{max}(N=1) \geq T_q$, le capteur prend conscience de plusieurs billes avant que la première bille n'ait atteint le maximum de son cycle de charge. Par conséquent, la force maximale $F_{max}(N)$ croît avec N. Le nombre critique de billes N_d, à partir duquel la force maximale devient indépendante de N, est atteint lorsque l'onde de déformation a parcouru une distance $4RN_d$ pendant un temps $\tau_{max}(N_d)$. La vitesse de l'onde de déformation étant donnée par l'Eq. (III.6) avec $T'_q = T_q$, le nombre critique de billes N_d s'écrit

$$N_d = \left\lceil \frac{\tau_{max}(N_d)}{T_q} \right\rceil \;, \tag{III.8}$$

où $\lceil x \rceil$ est le plus petit entier non inférieur à x.

Expérimentalement, pour chaque matériau collé sur le capteur, la valeur de N_d est déduite de la Fig. (III-15) tandis que les valeurs de $\tau_{max}(N=1)$ et $\tau_{max}(N=N_d)$ sont mesurées à partir de l'évolution temporelle de la force maximale. Ces résultats sont regroupés dans le Tab. (III.2). L'interprétation ci–dessus est en accord avec ces résultats puisque lorsque $\tau_{max}(N=1) < T_q$ la force maximale ressentie par le capteur est indépendante de N, c.-à-d. $N_d = 1$, tandis que lorsque $\tau_{max}(N=1) \geq T_q$ la force maximale dépend de N, c.-à-d. $N_d > 1$. Le nombre critique de billes N_d est représenté, à partir des données du Tab. (III.2), sur la Fig. (III-17), en fonction de $\tau_{max}(N_d)$. Chaque croix correpond à une série d'expériences réalisées avec un matériau donné. La ligne en traits pleins correspond aux valeurs de N_d obtenues à partir de l'Eq. (III.8) avec $T_q = 28,6\ \mu s$. L'accord entre les points expérimentaux et la ligne en traits pleins est très bon excepté pour les matériaux les plus mous (caoutchouc, hêtre, carton I et II). La raison est que, pour chacun de ces matériaux, la valeur de $\Delta\tau_N$ dépend de N (voir la Fig. (III-16)) et par conséquent T_q n'est pas défini. Cela signifie que l'emission de l'onde de déformation est fortement modifiée par la présence d'un mur très mou. En effet, au lieu de créer une onde de déformation avec un front d'onde très raide, comme ceci est suppposé dans le § (III.7), une telle collision donne plutôt naîssance à une onde qui possède un front relativement « lisse ». Comme la chaîne de billes est un milieu dispersif (voir le § (III.8)), la vitesse de telles ondes peuvent être alors considérablement modifiée. Finallement, dans le § (III.6.7), nous verrons que les résultats issus des simulations numériques seront en accord avec ces résultats expérimentaux.

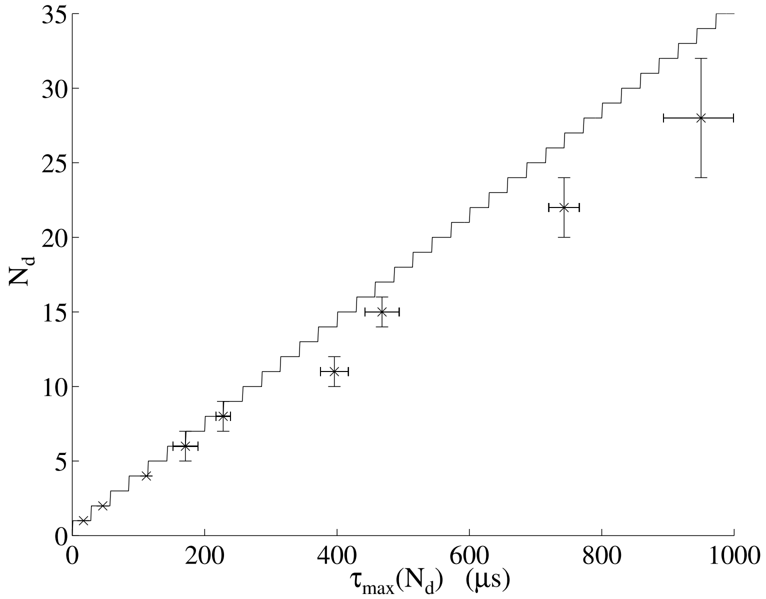


FIG. III-17 – *Evolution de N_d en fonction de $\tau_{max}(N_d)$. Chaque croix correspond à une série d'expériences réalisées avec un matériau donné (voir le Tab. (III.2)). La ligne en traits pleins correspond aux valeurs de N_d obtenues à partir de l'Eq. (III.8) avec $T_q = 28,6\ \mu s$.*

III.5 Modèle numérique non dissipatif

Le but de cette partie est de construire un modèle numérique simple afin de retrouver les principaux résultats expérimentaux pour un mur rigide du § (III.3) : la non dépendance avec le nombre de billes de la force maximale ressentie par le capteur (§ (III.3.1)), la vitesse de propagation de l'onde de déformation dans la colonne (§ (III.3.3)), l'effet de détachement des billes de la colonne (§ (III.3.5)) et ceux du § (III.4) pour un mur mou : dépendance de la force maximale avec N.

Considérons une collision de N corps sphériques identiques, chacun de masse m, de vitesse initiale $v_i^{\rm i}$ et de vitesse finale $v_i^{\rm f}$, i variant de 1 à N. La quantité de mouvement $p_i(t)$ de la $i^{ème}$ particule, au cours du temps, est $p_i(t) = mv_i(t)$. La conservation de la quantité de mouvement totale lors de la collision implique, qu'au cours du temps,

$$\sum_{i=1}^{N} mv_i(t) = \sum_{i=1}^{N} mv_i^{\rm i} \qquad \forall\ t \geq 0\ . \tag{III.9}$$

Appelons v_g la vitesse du centre de masse de la colonne, définie comme

$$v_g = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i(t)\ . \tag{III.10}$$

La conservation de la quantité de mouvement, c.-à-d. l'Eq. (III.9), implique que les forces, agissant durant la collision entre les corps, n'affectent pas la vitesse du centre de masse. Ainsi, la collision entre les corps conduisent seulement à un échange de vitesse entre les composantes du système, mais cependant de l'énergie peut être perdue due à des effets dissipatifs. Dans le modèle qui est présenté ci–dessous, aucun mécanisme dissipatif n'est pris en compte. Donc, dans les simulations, l'énergie totale sera conservée et seuls des échanges de quantité de mouvement entre particules auront lieu. De plus, comme nous l'avons démontré lors du chapitre III, pour des hauteurs de chute de l'ordre du milimètre, la force de gravité, lors de l'interaction, peut être négligée devant la force élastique. Ainsi, dans le modèle ci–dessous, seule la loi de Hertz du contact sera prise en compte lors de l'interaction. Tous les temps caractéristiques du problème sont grands devant le temps d'aller retour d'une onde acoustique à l'intérieur d'une bille. En effet, pour une bille en acier inoxydable de rayon $R = 4\ mm$, la période associée à la plus basse fréquence propre des vibrations radiales d'une sphère élastique est $2\ \mu s$ (voir l'annexe A). Le plus petit temps intervenant dans le problème est le temps de collision d'une seule bille qui est expérimentalement $35,5\,\mu s$ pour la hauteur maximale de chute $h = 5,1\ mm$. Par conséquent, il est légitime de modéliser la colonne de billes par une chaîne de N masses ponctuelles de masse m, chacune intéragissant avec ses plus proches voisines par la loi de Hertz, c.-à-d. par $N-1$ ressorts non linéaires satisfaisant

$$F_i = \begin{cases} k(x_{i+1} - x_i)^{3/2} & \text{si} \quad x_{i+1} - x_i > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \forall\ 1 \leq i \leq N-1\ , \tag{III.11}$$

F_i est la force d'interaction entre la $i^{\grave{e}me}$ et la $i+1^{\grave{e}me}$ masse, x_i le déplacement de la $i^{\grave{e}me}$ masse par rapport à sa position d'équilibre x_{0_i} et k une constante pouvant être vue comme une « raideur » propre à chaque ressort non linéaire. Le paramètre k représente le cœfficient de la loi de Hertz pour un contact entre deux sphères (voir le § (I.3.1)) et s'écrit selon l'Eq. (I.20). Avec la convention de signe pour le déplacement x_i (voir la Fig. (III-18)), la $i^{\grave{e}me}$ masse interagit avec la $i+1^{\grave{e}me}$, *via* la loi de Hertz, si $x_{i+1} - x_i > 0$ (voir la Fig. (III-18b)) tandis qu'elles se détachent l'une de l'autre si $x_{i+1} - x_i < 0$.

A $t = 0$ (voir la Fig. (III-18a)), toutes les masses i sont supposées être dans leur position d'équilibre x_{0_i}, les ressorts non linéaires n'étant pas comprimés et une vitesse identique v_{imp} pour toutes les masses est imposée. Le choix des conditions initiales du problème sont alors

$$\begin{cases} x_i(t=0) = 0 \\ \dot{x}_i(t=0) = v_{imp} \end{cases} \qquad \forall\ 1 \leq i \leq N\ . \tag{III.12}$$

Le capteur est modélisé par un ressort non linéaire de « raideur » K et de masse infinie. Le paramètre K de ce ressort est différent de k, propre à tous les autres ressorts, dans le souci d'être proche des conditions expérimentales, puisque le cœfficient de la loi de Hertz pour un contact sphère–plan est différent de celui d'un contact sphère–sphère (voir le § (I.3.1)).

Avec cette condition supplémentaire, les forces d'interaction donnée par l'Eq. (III.11) ainsi que leurs sens (voir la Fig. III-18c)), le sytème est décrit par un ensemble de N équations différentielles couplées

$$\forall t \neq 0, \begin{cases} m\ddot{x}_N = -F_{N-1}\ , \\ m\ddot{x}_i = F_i - F_{i-1} \quad \text{pour} \quad 2 \leq i \leq N-1\ , \\ m\ddot{x}_1 = F_1 - F_0 \qquad \text{où} \quad F_0 = \begin{cases} Kx_1^{3/2} & \text{si } x_1 > 0\ , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases} \tag{III.13}$$

L'algorithme utilisé pour résoudre numériquement le système d'équations (III.13) est du type Runge–Kutta d'ordre 4. Au cours du calcul, l'énergie totale de la colonne est conservée avec une précision inférieure à 10^{-4} %. Le pas de temps utilisé est très inférieur au temps typique[5] de collision entre deux sphères : le temps de collision est environ de 40 μs et le pas de temps de $0,25$ μs.

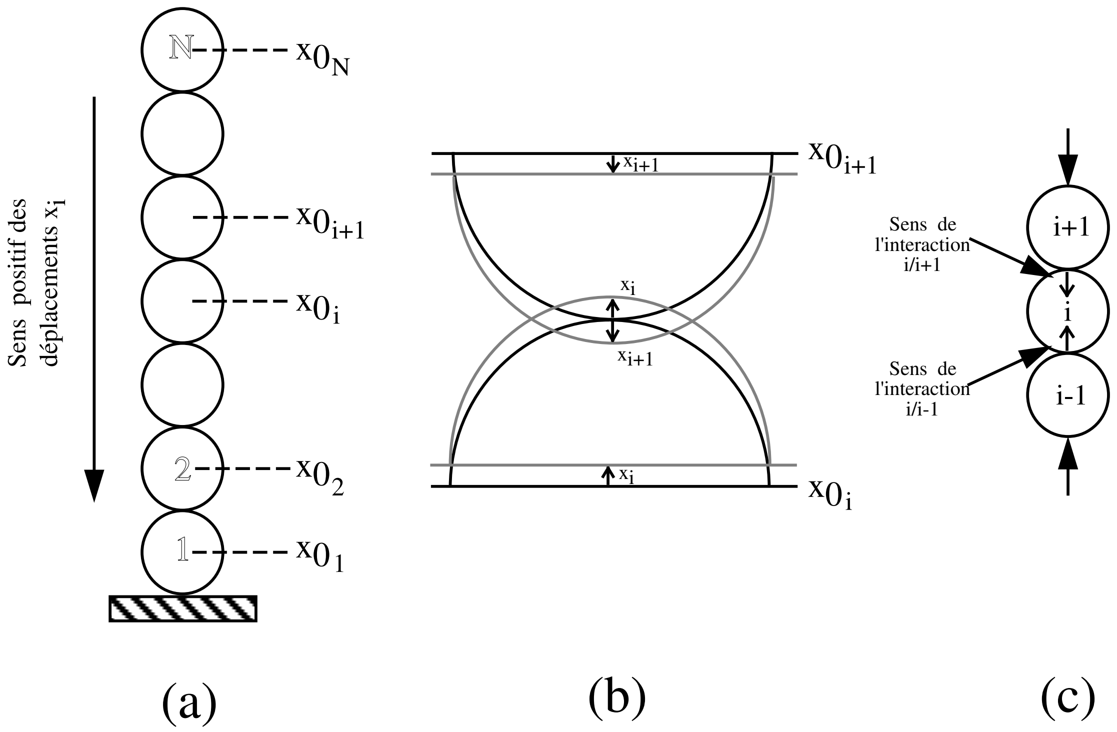


FIG. III-18 – *Représentation schématique du modèle : (a) conditions initiales : à $t = 0$, toutes les masses i se trouvent dans leur position d'équilibre x_{0_i} ; (b) interaction entre la $i^{ème}$ et la $i+1^{ème}$ masse : $x_{i+1} - x_i > 0$ correspond à une interpénétration entre les deux billes (ou une compression du ressort non linéaire) alors que $x_{i+1} - x_i < 0$ signifie que les deux billes ne sont plus en contact (ou que les deux ressorts se sont détachés l'un de l'autre) ; (c) directions des forces d'interaction entre la $i^{ème}$ et la $i+1^{ème}$ masse et entre la $i-1^{ème}$ et la $i^{ème}$.*

La force ressentie par le « capteur » est $Kx_1^{3/2}(t)$ où K est le cœfficient de la loi de Hertz pour un contact sphère–plan (voir le § (I.3.1)) et s'écrit selon l'Eq. (I.24). Afin de comparer quantitativement les résultats expérimentaux pour un mur rigide à ceux de la simulation, la valeur de k est calculée pour un contact entre deux sphères en acier inoxydable (voir le tableau page 16) de rayon $R = 4$ mm. La valeur de K est calculée pour un contact entre une sphère et un plan tous deux en acier inoxydable. Ainsi, d'après les Eqs. (I.20) et (I.24), les valeurs de ces paramètres sont $k = 6,9716 \times 10^9$ $N/m^{3/2}$ et $K = 9,858 \times 10^9$ $N/m^{3/2}$. Dans la plupart des simulations, la valeur choisie pour la vitesse d'impact de la colonne, $v_{imp} = 0,3$ m/s, correspondra à une hauteur de chute de $4,6$ mm.

5. Ce temps de collision est le plus petit qui apparaisse dans le système, puisque nous simulons les équations (III.13) qui ne sont valables que dans la limite quasi–statique où l'on néglige la propagation d'onde acoustique au sein d'une bille.

III.6 Résultats numériques

III.6.1 Déplacement et vitesse de chaque bille lors de la collision

La figure (III-19) montre l'évolution temporelle des déplacements $x_i(t)$, par rapport à leur position d'équilibre, de chaque bille i lors d'une collision d'une colonne de $N = 7$ billes avec le sol. D'après les conventions de la Fig. (III-18), une compression de la *ième* bille correspondra à une déplacement x_i positif. La septième bille, située tout en haut de la colonne, s'enfonce de façon linéaire lors de son cycle de charge (x_7 croît), puis se décomprime (x_7 décroît), avant de se détacher de la sixième bille ($x_7 - x_6 < 0$) et de repartir indéfiniment vers le haut à vitesse constante puisque la gravité n'est pas prise en compte. La bille en bas de la colonne (bille 1) s'enfonce puis oscille autour d'une valeur constante, pendant toute la durée de la collision, avant se décomprimer et se détacher du sol ($x_1 < 0$). Lorsque la bille 1 a fini de s'enfoncer ($t = 16\ \mu s$), elle a emmagasiné de l'énergie élastique qui lui permet de réaliser son cycle de décharge mais la bille du dessus l'oblige à se réenfoncer dès lors que l'énergie élastique de charge de la bille 2 est plus grande que l'énergie élastique de décharge emmagasinée par la bille 1. Les billes i, avec $i \geq 2$, ont une influence sur le mouvement de la bille 1 et ceci semble être la raison de la présence des oscillations du déplacement x_1.

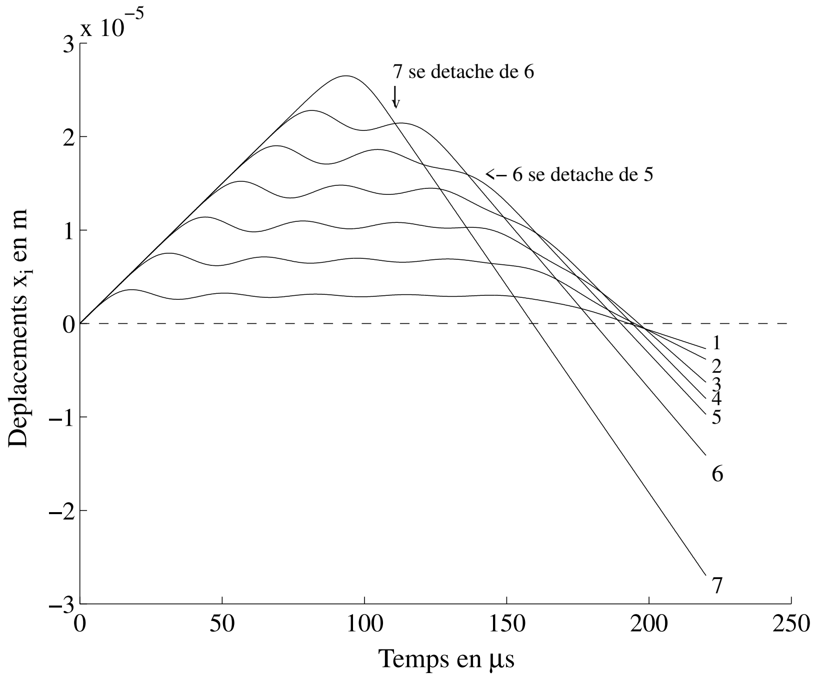


FIG. III-19 – *Résultat des simulations numériques: évolution au cours du temps des déplacements $x_i(t)$, par rapport à leur position d'équilibre, de chacune des billes i lors de la collision d'une colonne de $N = 7$ billes avec le sol. Le déplacement $x_i(t)$ est positif lorsque la $i^{ème}$ bille est comprimée. La ligne en traits pointillés correspond à la position d'équilibre de toute les billes. A partir de cette ligne, chacune des courbes successives en traits pleins correpondent respectivement aux déplacements $x_i(t)$ pour i variant de 1 à 7. La simulation a été stoppée à $T = 220\ \mu s$ et a été réalisée pour $v_{imp} = 0,3\ m/s$; $m = 2,05 \times 10^{-3}\ kg$; $k = 6,9716 \times 10^9\ N/m^{3/2}$ et $K = 9,858 \times 10^9\ N/m^{3/2}$.*

Comme le montre la Fig. (III-19), la septième bille se détache de la sixième ($x_7 - x_6 < 0$), pendant que les autres billes restent en interaction, puis la sixième se détache de la cinquième ($x_6 - x_5 < 0$), etc. Les billes du haut de la colonne semble donc se détacher les unes après les autres avant la fin de la collision.

La figure (III-20) montre l'évolution des vitesses $\dot{x}_i(t)$ de chaque bille i pour $N = 7$ et $v_{imp} = 0,3\ m/s$. Lors de la collision, l'échange permanent de quantité de mouvement entre toutes les billes est à l'origine des oscillations de vitesse observées sur cette figure. Lorsqu'une bille n'est plus en contact avec ses voisines, elle possède alors, d'après les Eqs. (III.13), une vitesse constante. Ainsi, bien avant la fin de la collision ($v_1 = c^{ste}$), la bille 7 se détache de la colonne ($v_7 = c^{ste}$), puis c'est au tour de la sixième, de la cinquième, de la quatrième avant que les trois dernières billes ne décollent quasiment en même temps. On constate de plus que les billes du haut de la colonne se détachent de la colonne avec des vitesses plus grandes que celles qu'elles possédaient initiallement, tandis que les billes du bas repartent vers le haut avec des vitesses plus faibles. Par exemple, à la fin de la collision, la vitesse de la bille 7 est environ 150% de sa vitesse initiale.

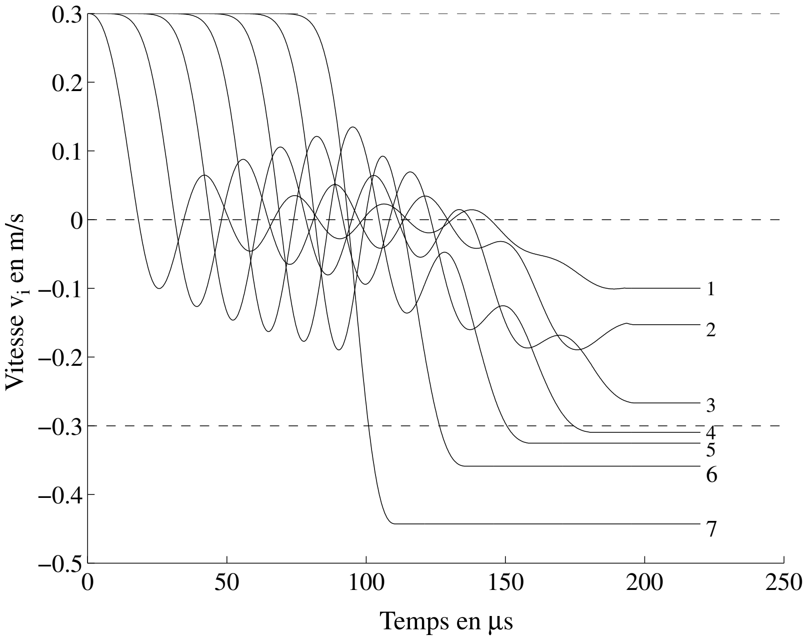


Fig. III-20 – *Résultat des simulations numériques : évolution au cours du temps de la vitesse $\dot{x}_i(t)$ de chacune des billes i lors d'une collision d'une colonne de $N = 7$ billes avec le sol avec $v_{imp} = 0,3\ m/s$. La ligne en traits pointillés à $-0,3\ m/s$ correpond à la limite en dessous de laquelle les billes 1 à 3 se détachent de la colonne avec une vitesse plus petite que leur vitesse initiale v_{imp}. Au dessus de cette limite, les billes 4 à 7 se détachent de la colonne avec une vitesse plus grande que v_{imp}. Les paramètres de la simulation sont les même que ceux de la Fig. (III-19).*

III.6.2 Force ressentie par le mur lors de la collision

La figure (III-21) montre l'évolution de la force ressentie par le capteur au cours du temps pour une collision d'une colonne de $N = 7$, 15 ou 30 billes. L'allure de la force est la même que celle obtenue expérimentalement avec un mur rigide : la force croît jusqu'à une valeur F_{max}, indépendante de N, puis oscille autour d'une valeur constante avec une période P indépendante de N. Ces oscillations de force sont directement reliées aux mouvements oscillants de la bille 1 (*cf.* la Fig. (III-19)). Contrairement aux résultats expérimentaux, les simulations montrent que la valeur moyenne de la force est constante pendant toute la durée de la collision. Ceci est due au fait que les effets dissipatifs ne sont pas pris en compte dans la modéle numérique.

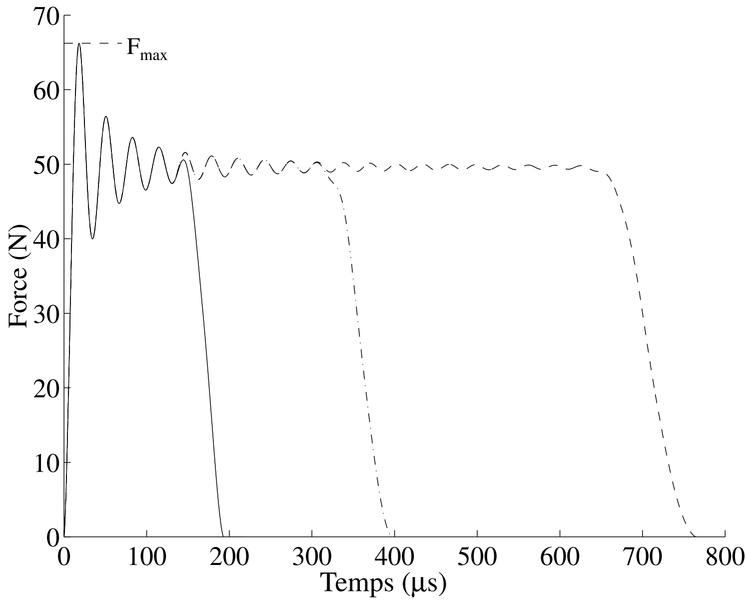


FIG. III-21 – *Résultat des simulations numériques : force ressentie par le capteur au cours du temps pour une collision d'une colonne de $N = 7$ billes (courbe en traits pleins) ; $N = 15$ billes (courbe en traits mixtes) ou $N = 30$ billes (courbe en traits pointillés). Les paramètres de la simulation, autres que N, sont les même que ceux de la Fig. (III-19). F_{max} représente la force maximale qui est ressentie par le capteur au cours du temps. Cette figure est à comparer avec les résultats expérimentaux de la Fig. (III-4).*

La force maximale $F_{max}(N)$ ressentie par le capteur lors de la chute d'une colonne de N billes est indépendante de N et est égale à la force maximale $F_{max}(1)$ ressentie par le capteur lors de la chute d'une seule bille. Par conséquent, nous pouvons supposer que l'expression de $F_{max}(N)$ est indépendante du paramètre k qui caractérise un contact entre deux billes (*cf.* l'Eq. (I.20)). En utilisant un argument dimensionel, nous obtenons facilement l'expression de la force maximale

$$F_{max}(N) = N^0 F_{max}(1) = C_1 m^{3/5} v_{imp}^{6/5} K^{2/5} , \qquad \text{(III.14)}$$

où K est défini d'après l'Eq. (I.24) et C_1 est une constante numérique. La figure (III-22) montrent les valeurs de $F_{max}(N)$ en fonction de $m^{3/5} v_{imp}^{6/5} K^{2/5}$ lorsque les différents paramètres de la simulation (c.-à-d. N, k, K, m et v_{imp}) varient. Ces calculs numériques montrent que F_{max} est effectivement quasiment indépendante de k (voir les symboles $\times$ de la Fig. (III-22)). La pente de la droite en traits pleins de la Fig. (III-22) correspond à $C_1 = 1,143$. L'expression de $F_{max}(1)$ issue de la théorie du contact de Hertz s'écrit, d'après les Eqs. (I.24) et (I.38),

$$F_{max}(1) = \left(\frac{5}{6}\right)^{2/5} \left[\frac{5m^3 v_{imp}^6 R}{\left(\frac{1-\nu_s^2}{E_s} + \frac{1-\nu_p^2}{E_p}\right)^2}\right]^{1/5} . \qquad \text{(III.15)}$$

En reportant l'Eq. (I.24) dans l'Eq. (III.15), le cœfficient numérique de l'Eq. (III.15) est alors $(5/6)^{2/5}(45/16)^{1/5}$. L'expression numérique de la force maximale d'Eq. (III.14) est par conséquent identique à celle issue de la théorie de Hertz puisque $(5/6)^{2/5}(45/16)^{1/5} \simeq 1,143$.

La valeur numérique de la force maximale déduite de la figure (III-21) est $F_{max}^{num} = 66,2\ N$. Cette valeur est en bon accord avec la valeur expérimentale $F_{max}^{exp} = 69\ N$ (voir le § (III.3.1)) et la valeur théorique $F_{max}^{théo} = 65,3\ N$ calculée d'après l'Eq. (III.15) avec $v_{imp} = 0,3\ m/s$; $m = 2,05 \times 10^{-3}\ kg$; $R = 4\ mm$; $\nu_s = \nu_p = 0,276$ et $E_s = E_p = 21,6 \times 10^{10} N/m^2$. La valeur expérimentale est légèrement plus grande que les valeurs théorique et numérique puisque la vitesse d'impact expérimentale est légèrement plus grande que $0,3\ m/s$.

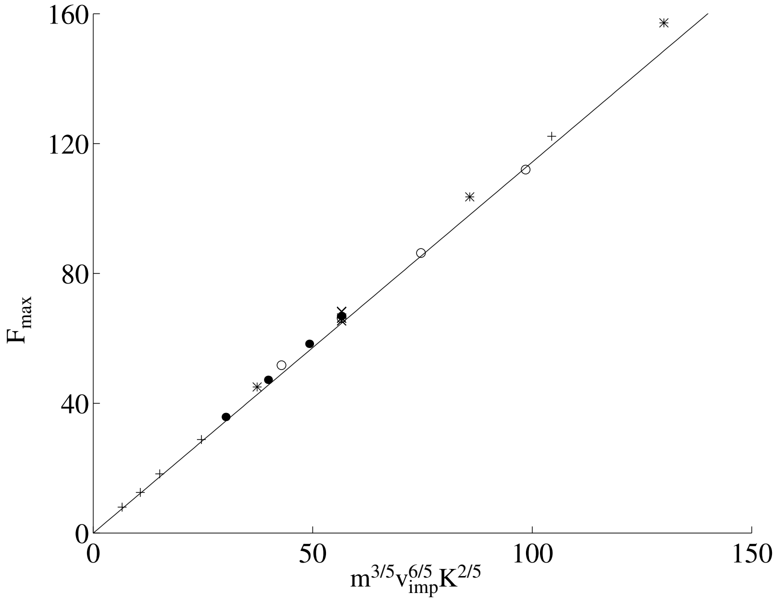


FIG. III-22 – *Résultat des simulations numériques: force maximale F_{max} en Newton en fonction de $m^{3/5}v_{imp}^{6/5}K^{2/5}$ pour différentes valeurs des paramètres de la simulation: N, k, K, m et v_{imp}. (+) correspond à $m = 2,05 \times 10^{-3}\ kg$, $k = 6,9716 \times 10^9\ N/m^{3/2}$ et $K = 9,858 \times 10^9\ N/m^{3/2}$ lorsque v_{imp} varie de 0,05; 0,075; 0,1; 0,15; 0,3 à 0,5 m/s. Pour chaque valeur de v_{imp}, F_{max} est identique lorsque N varie de 3 à 10. ($*$) correspond à $N = 8$, $v_{imp} = 0,3\ m/s$, $k = 6,9716 \times 10^9\ N/m^{3/2}$ et $K = 9,858 \times 10^9\ N/m^{3/2}$ lorsque m varie de $1,025 \times 10^{-3}$, $2,05 \times 10^{-3}$, $4,1 \times 10^{-3}$ à $8,2 \times 10^{-3}\ kg$. ($\circ$) correspond à $N = 8$, $m = 2,05 \times 10^{-3}\ kg$, $v_{imp} = 0,3\ m/s$ et $k = 6,9716 \times 10^9\ N/m^{3/2}$ lorsque K varie de $4,929 \times 10^9$, $9,858 \times 10^9$, $1,971 \times 10^{10}$ à $2,957 \times 10^{10}\ N/m^{3/2}$. ($\times$) correspond à $N = 8$, $m = 2,05 \times 10^{-3}\ kg$, $v_{imp} = 0,3\ m/s$ et $K = 9,858 \times 10^9\ N/m^{3/2}$ lorsque k varie de $3,486 \times 10^9$, $6,9716 \times 10^9$, $1,394 \times 10^{10}$ à $2,091 \times 10^{10}\ N/m^{3/2}$. ($\bullet$) correspond à $N = 7$, $m = 2,05 \times 10^{-3}\ kg$, $v_{imp} = 0,3\ m/s$ lorsque $K = k$ varie de 2×10^9, 4×10^9, $6,9716 \times 10^9$ à $9,858 \times 10^9\ N/m^{3/2}$. La droite en traits pleins corresponds à $C_1 m^{3/5}v_{imp}^{6/5}K^{2/5}$ avec $C_1 = 1,143$.*

III.6.3 Période des oscillations de la force lors de la collision

La période P des oscillations de la force, de la Fig. (III-21), est indépendante de N. Sur cette figure, la période des oscillations vaut $P = 31,5\ \mu s$. Cette valeur est en bon accord avec la mesure expérimentale $P_{exp} = 31,2\ \mu s$ (voir le § (III.3.1)). Si l'interprétation de ces oscillations de force, qui a été donnée au § (III.6.1), est correcte, la période P doit être indépendante de K. Ainsi, en utilisant un argument dimensionel, on obtient facilement

$$P = C_2 \left(\frac{m}{k}\right)^{2/5} v_{imp}^{-1/5} , \tag{III.16}$$

où C_2 est une constante numérique. Les simulations numériques sont en accord avec l'Eq. (III.16) et par conséquent confirment l'interprétation donnée au § (III.6.1). La Fig. (III-23) montre les valeurs de P en fonction de $v_{imp}^{-1/5} m^{2/5} k^{-2/5}$ lorsque les paramètres de la simulation (c.-à-d. N, k, K, m et v_{imp}) varient. La pente de la droite en traits pleins correspond à $C_2 = 2,53$.

En utilisant l'Eq. (I.20) et $m = 4\pi R^3 \rho_s/3$, l'Eq. (III.16) devient

$$P = 2,53 \left(2\sqrt{2}\pi\rho_s \frac{1-\nu_s^2}{E_s}\right)^{2/5} R v_{imp}^{-1/5} , \tag{III.17}$$

ρ_s étant la masse volumique du matériau constituant la sphère.

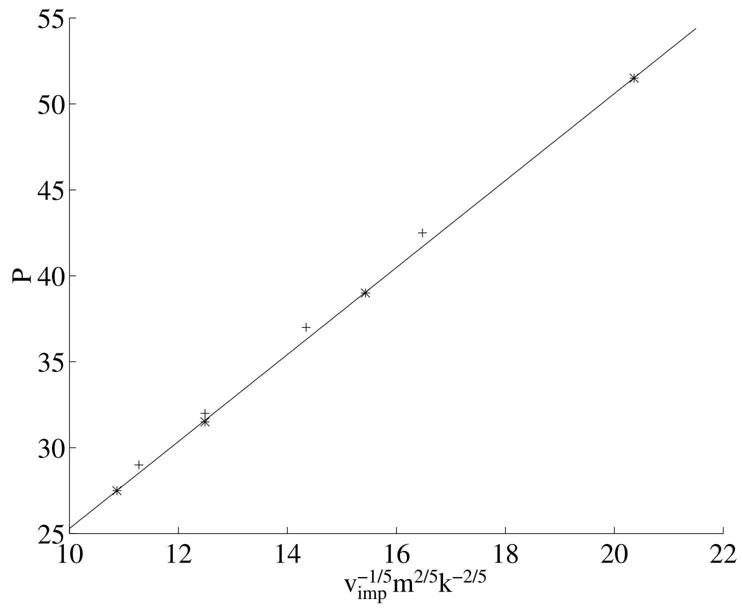


FIG. III-23 – *Résultat des simulations numériques : période P en μs des oscillations de la force en fonction de $v_{imp}^{-1/5} m^{2/5} k^{-2/5}$ pour différentes valeurs des paramètres de la simulation N, k, K, m et v_{imp}. $(+)$ correspond à $m = 2,05 \times 10^{-3}$ kg, $k = 6,9716 \times 10^9$ $N/m^{3/2}$ et $K = 9,858 \times 10^9$ $N/m^{3/2}$ lorsque v_{imp} varie de $0,075$; $0,15$; $0,3$ à $0,5$ m/s. Pour chaque valeur de v_{imp}, la valeur de P est identique quand N varie de 3 à 10. $(*)$ correspond à $N = 7$, $m = 2,05 \times 10^{-3}$ kg, $v_{imp} = 0,3$ m/s lorsque $K = k$ varie de 2×10^9, 4×10^9, $6,9716 \times 10^9$ à $9,858 \times 10^9$ $N/m^{3/2}$. La droite en traits pleins correspond à $C_2 v_{imp}^{-1/5} m^{2/5} k^{-2/5}$ avec $C_2 = 2,53$.*

III.6.4 Durée de la collision d'une colonne de N billes

Le fait que la force maximale soit indépendante de N implique que le temps de collision τ_N, d'une colonne de N billes, doit croître linéairement avec N pour que la conservation de l'impulsion, lors du choc, soit vérifiée (voir § (III.6.2)). La durée τ_N de la collision d'une colonne de N billes est représentée en fonction de N sur la Fig. (III-24) et est effectivement une fonction croissante linéaire de N, telle que $\tau_N = (N-1)T_q + \tau_1$, où $T_q = 25,37\ \mu s$ est déterminé par la pente de la droite et $\tau_1 = 40,6\ \mu s$ par l'intersection de la droite avec la verticale $N = 1$. Le sens physique de T_q a été expliqué dans le § (III.3.3) (voir aussi le paragraphe suivant). La valeur numérique de τ_1 est en accord aussi bien avec la valeur $\tau_1^{théo} = 34,2\ \mu s$ déterminée par la théorie de Hertz pour un contact sphère–plan (voir l'Eq. (I.24)) qu'avec la valeur expérimental $\tau_1^{exp} = 35,5\ \mu s$ (voir le § (III.3.2)).

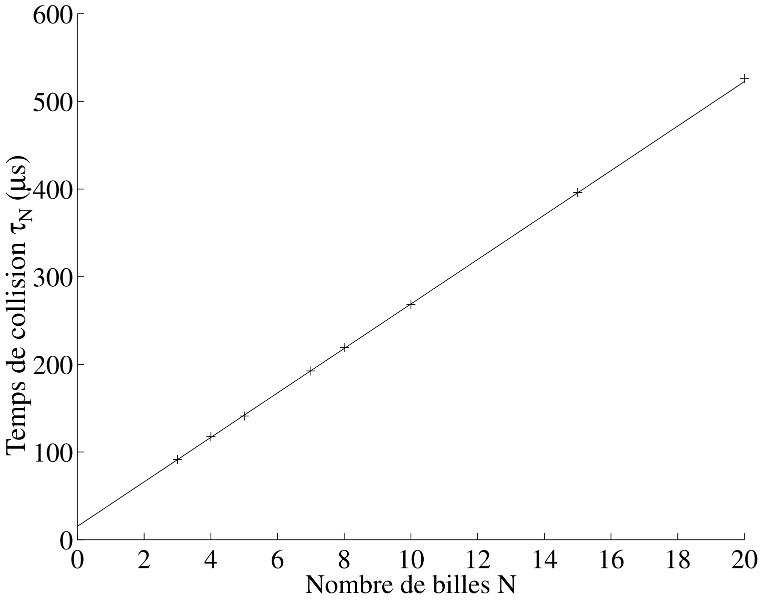


FIG. III-24 – *Résultat des simulations numériques : dépendance du temps de collsion τ_N avec N. Les paramètres de la simulation, autres que N, sont les même que ceux de la Fig. (III-19). Les croix représentent les points de la simulation. La droite correspond à $\tau_N = (N-1)T_q + \tau_1$ avec $T_q = 25,37\ \mu s$ et $\tau_1 = 40,6\ \mu s$. Cette figure est à comparer avec les résultats expérimentaux de la Fig. (III-7).*

De plus, l'évolution de τ_N suit la même loi que l'Eq. (III.3) trouvée expérimentalement (voir le § (III.3.2)). Cependant, cette loi est différente de celle obtenue par Luding [67, 80] au cours de simulations de dynamique moléculaire. En utilisant une loi d'interaction linéaire dissipative, ils trouvent que le temps de collision τ_N de la colonne est proportionnel au nombre de billes et au temps de collision d'une seule bille τ_1 tel que $\tau_N \approx N\tau_1$. De plus, bien que le temps de collision pour un contact sphère–sphère soit différent de celui d'un contact sphère–plan, la présence lors de la collision d'un seul contact sphère–plan parmis tous les contacts sphère–sphère n'implique pas que $\tau_N \neq N\tau_1$. En effet, l'Eq. (III.3) est valable pour des simulations modélisant le capteur aussi bien par un plan de raideur $K \neq k$ que par une portion de sphère de raideur $K = k$. Au cours de ces simulations, la valeur de τ_1 change tandis que la valeur de T_q reste indentique. Ceci est en accord avec l'interprétation de T_q

donnée au § (III.3.3).

III.6.5 Vitesse de l'onde de déformation dans la colonne

Au début du choc entre la colonne et le sol, une onde de déformation est créée au point de contact. Au cours de la collision, cette onde se propage vers le haut de la colonne, est réfléchie, et revient à l'endroit d'où elle a été émise, à la fin de la collision, c.-à-d. lorsque la colonne décolle du sol. A vitesse d'impact fixée et en faisant varier le nombre de billes de la colonne, on trouve que les résultats numériques sont en accord avec les résultats expérimentaux (voir le § (III.3.3)) et théoriques (voir le § (III.7)) : la vitesse v de l'onde de déformation est indépendante de N et v peut s'exprimer comme le rapport entre la distance d'aller retour dans une bille sur le temps T_q pour parcourir cette distance, c.-à-d. $v = 4R/T_q$. En effet, pour $v_{imp} = 0,3\ m/s$, T_q est donné par la pente de la droite de la Fig. (III-24). En reportant cette valeur dans l'Eq. (III.6) puisque $T'_q = T_q$, R étant égal à $4\ mm$ pour le calcul de k et K, la vitesse est alors $v = 630,7\ m/s$. Cette valeur est en parfait accord avec la pente $v = 630,5\ m/s$ de la droite de la Fig. (III-25a) pour $v_{imp} = 0,3\ m/s$.

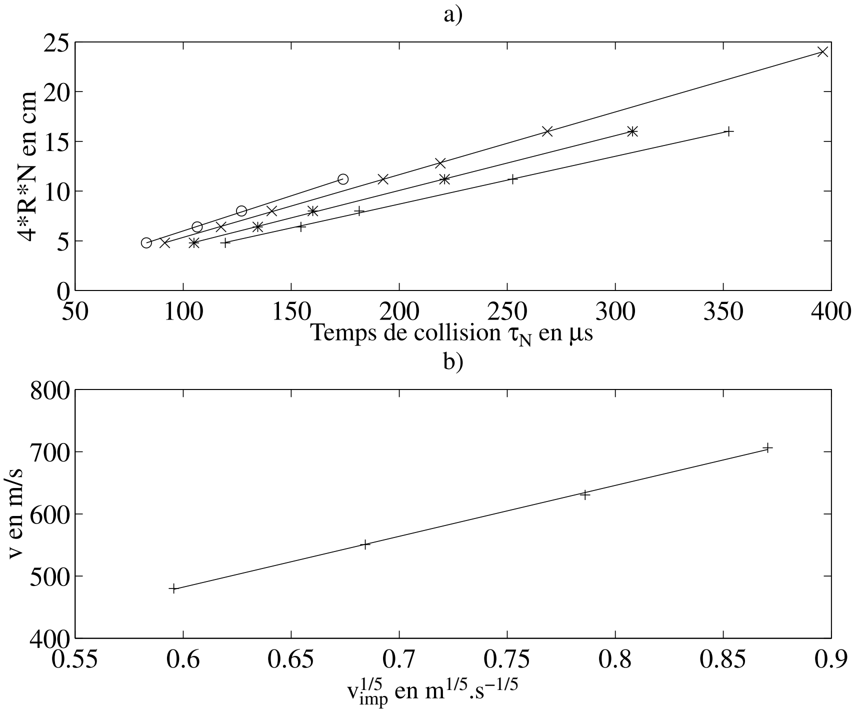


FIG. III-25 – *Résultat des simulations numériques : (a) Distance parcourue par l'onde de déformation (c.-à-d. deux fois la longueur de la colonne $4 \times R \times N$) en fonction du temps que met l'onde pour parcourir cette distance (c.-à-d. le temps de collision) pour différentes vitesses d'impact v_{imp} de la colonne : (+) 0,075 ; (∗) 0,15 ; (×) 0,3 et (○) 0,5 m/s. Les pentes des droites en traits pleins déterminent la vitesse de l'onde $v = 480,2$; $550,6$; $630,5$ et $706,3\ m/s$ pour $v_{imp} = 0,075$; $0,15$; $0,3$ et $0,5\ m/s$ respectivement. (b) : Vitesse v de l'onde de déformation en fonction de $v_{imp}^{1/5}$. Pour (a) et (b), les paramètres de la simulation, autres que v_{imp}, sont les même que ceux de la Fig. (III-19).*

Chaque droite de la Fig. (III-25a) représente, pour différentes vitesses d'impact de la colonne, la distance parcourue par l'onde de déformation en fonction du temps mis pour parcourir cette distance. Pour une vitesse d'impact fixée, la vitesse de propagation de l'onde est donc indépendante du nombre de billes N. Les pentes de ces droites donnent alors accès à la valeur de la vitesse de l'onde de déformation pour chaque vitesse d'impact de la colonne. En reportant ces vitesses v en fonction de la vitesse d'impact v_{imp} de la colonne, la Fig. (III-25b) montre que l'onde de déformation se propage avec une vitesse v proportionnelle à $v_{imp}^{1/5}$. Ainsi, plus la colonne heurte le sol avec une vitesse importante, plus la vitesse des ondes créées lors de ce choc est rapide. Dans le Tab. (III.1), on compare les résultats numériques avec ceux obtenus expérimentalement pour trois valeurs de hauteur de chute $h = 1,9\,;\ 3,1$ et $5,1\ mm$.

L'interprétation de T_q du § (III.3.3) implique que l'expression de T_q soit indépendante de K. Ainsi, en utilisant l'Eq. (III.6) avec $T'_q = T_q$, l'expression de la vitesse v doit être aussi indépendante de K. En utilisant cette hypothèse, un argument dimensionel conduit facilement à

$$v = C_3 \left(\frac{k}{m}\right)^{2/5} R v_{imp}^{1/5} , \tag{III.18}$$

C_3 étant une constante numérique. Lorsque les paramètres de la simulations k, m et v_{imp} varient, on trouve numériquement la valeur de la constante $C_3 = 2$. En reportant l'Eq. (III.18) dans l'Eq. (III.6) avec $T'_q = T_q$, T_q s'écrit alors

$$T_q = 2\left(\frac{m}{k}\right)^{2/5} v_{imp}^{-1/5} . \tag{III.19}$$

Dans une chaîne horizontale de billes, si la vitesse d'impact initiale, à laquelle est soumise la première bille de la rangée, est grande ($v_{imp} = 5\ m/s$), Nesterenko [76, 77] montre numériquement qu'il est possible de faire propager, à l'intérieur de la chaîne de billes, un soliton dont la taille est de l'ordre de 5 billes et dont le front se propage à une vitesse v_{sol} inférieure à la vitesse v de l'onde de déformation

$$v_{sol} = \left(\frac{4}{5}\right)^{2/5} v . \tag{III.20}$$

III.6.6 Détachements des billes de la colonne

A la fin de la collision, connaîssant le mouvement individuel de chaque bille, nous sommes capable de savoir si la colonne rebondit en bloc ou si les billes se détachent les unes après les autres de la colonne. On définie la fin de la collision entre la colonne et le sol lorsque la bille du bas quitte le sol ($x_1 < 0$). Pour une colonne de N billes, la distribution des vitesses de chaque bille, à la fin de la collision, est l'ensemble des valeurs $\dot{x}_i(t = \tau_N)$ pour $i = 1, \cdots, N$. La figure (III-26) représente ces vitesses pour différentes valeurs de N. Comme nous l'avons vu précédemment au § (III.6.1), à la fin de la collision et pour N fixé, chaque bille possède une vitesse qui est différente de celle des autres billes. Notamment, la bille du haut de la colonne repart avec une vitesse très grande par rapport à sa vitesse initiale v_{imp}. Deux régimes de distribution de vitesses apparaissent nettement sur cette figure : les billes du haut de la colonne repartent avec des vitesses supérieures à v_{imp} tandis que celles du bas ont des vitesses inférieures à v_{imp}. Par exemple, pour une colonne de $N = 7$ billes, la bille 7 repart avec 150% de sa vitesse initiale alors que la bille 1 repart seulement avec 30% de sa vitesse initiale. Nous verrons, dans la suite, que ces deux régimes de vitesse correspondent à deux types de détachement possibles. De plus, si nous nous intéressons uniquement aux billes du haut qui possèdent des vitesses plus grandes que v_{imp}, la Fig. (III-26) montre que ces vitesses tendent asymptotiquement vers v_{imp} lorsque N diminue.

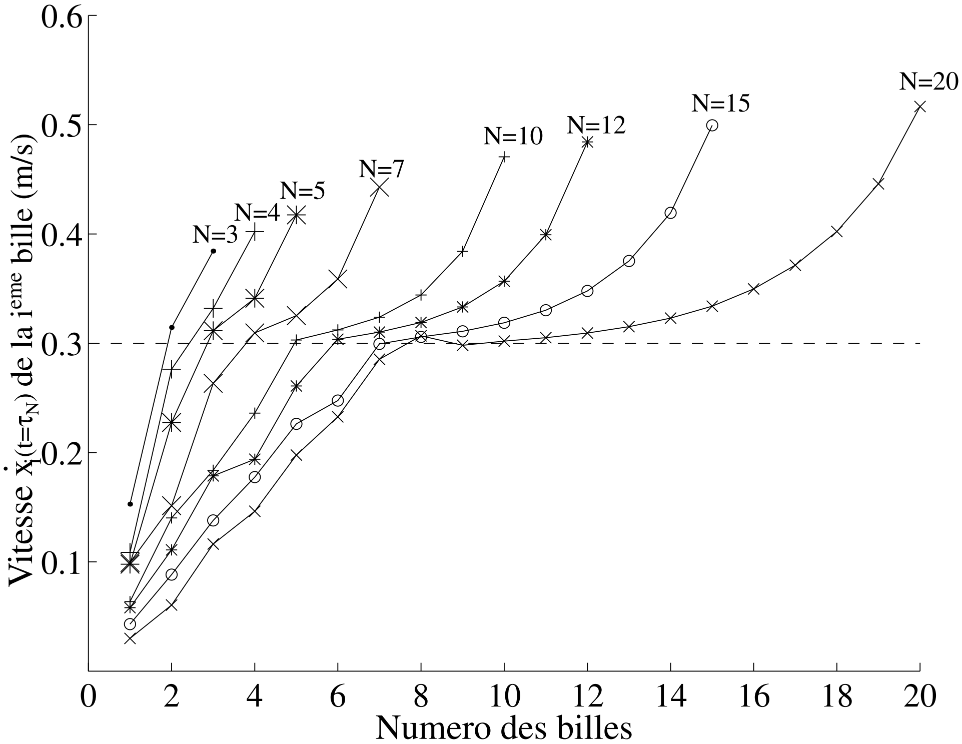


FIG. III-26 – *Résultat des simulations numériques: vitesse de la $i^{ème}$ bille, à la fin de la collision, en fonction du numéro de la bille i, pour différentes valeurs de N :* ($\cdot$) 3*;* (+) 4*;* ($*$) 5*;* ($\times$) 7*;* (+) 10*;* ($*$) 12*;* ($\circ$) 15*;* ($\times$) 20*. Pour toutes les courbes, les paramètres de la simulation sont les mêmes que ceux de la Fig. (III-19).*

Définissons le temps de détachement de la *ième* bille comme le temps, à partir du début du choc, où la *ième* bille de la colonne se détache soit de la $i+1$*ème*, soit de la $i-1$*ème*. Les temps de détachement des N billes de la colonne sont tracés sur la Fig. (III-27) pour différentes valeurs de N. Pour $N<5$, les billes se détachent les unes après les autres en commençant par celle du haut de la colonne. Pour $N\geq 5$, deux types de détachement apparaissent : les billes du haut de la colonne se détachent les unes après les autres, en commençant par celle du haut, comme précédemment, jusqu'à ce que les billes du bas de la colonne se détachent en « bloc » (c.-à-d. jusqu'à ce que la première bille quitte le sol en emmenant avec elle les billes qui ne s'étaient pas encore détachées. Dans ce bloc, les billes interagissent encore entre elles, après la fin de la collision, et se détachent les unes des autres en commençant, cette fois–ci, par celle du bas (voir la Fig. (III-27)). En comparant les Figs. (III-26) et (III-27), nous remarquons que les billes du haut qui se détachent les unes après les autres sont celles qui repartent avec des vitesses supérieures à leurs vitesses initiales tandis les billes du bas, qui se détachent en bloc, correspondent à celles qui ont des vitesses inférieures à v_{imp}.

Définissons maintenant le nombre de billes totales N_s qui se détachent les unes après les autres de la colonne. Les $N - N_s$ autres billes sont donc celles qui rebondissent en bloc. Pour chaque valeur de N, N_s est donné par le nombre de points expérimentaux de la Fig. (III-27) qui se trouvent en dessus de la ligne en traits pointillés. La figure (III-28) représente l'évolution de N_s en fonction de N. Comme cela a déjà été remarqué précédemment, pour $N < 5$, toutes les billes se détachent les unes après les autres de la colonne et ainsi $N_s = N$. Pour $N > 5$, les points expérimentaux sont bien décrits par une droite de pente supérieure à $1/2$. Cela signifie que, pour une valeur de N fixé, le nombre de billes qui se détachent les unes après les autres de la colonne est toujours plus grand que le nombre de billes qui rebondissent en bloc.

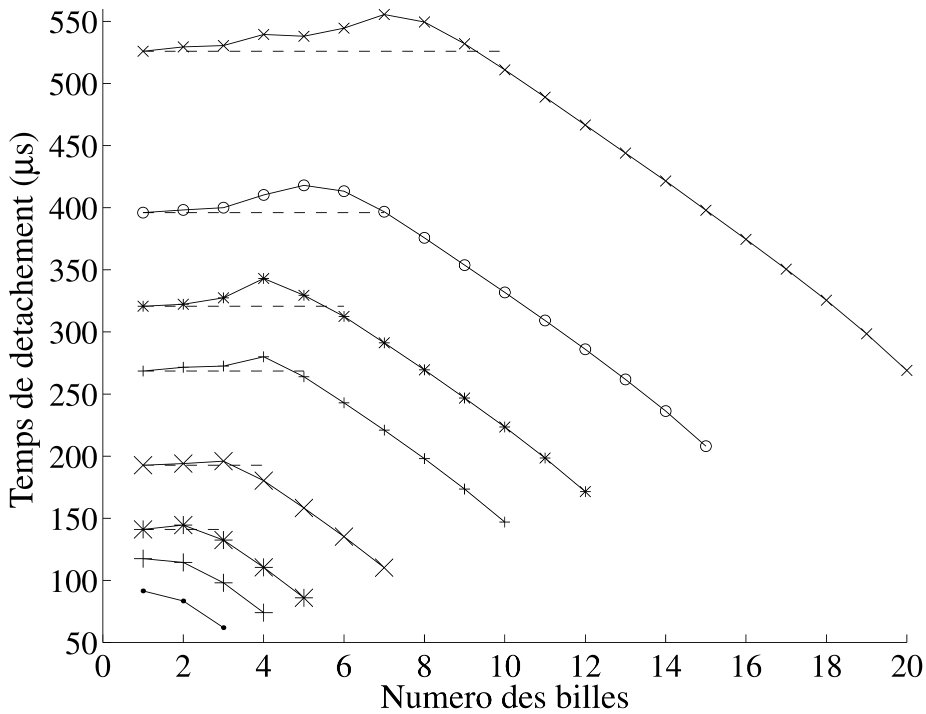


FIG. III-27 – *Résultat des simulations numériques : temps de détachement de la $i^{ème}$ bille en fonction du numéro de la bille i, pour différentes valeurs de N :* (·) 3 ; (+) 4 ; (∗) 5 ; (×) 7 ; (+) 10 ; (∗) 12 ; (○) 15 ; (×) 20. *Pour chaque valeur de $N \geq 5$, chaque ligne en traits pointillés correspond au temps au dela duquel les billes du bas de la colonne rebondissent en « bloc » (c.-à-d. lorsque la première bille quitte le sol en emmenant avec elle les billes qui ne s'étaient pas encore détachées de la colonne). Pour toutes les courbes, les paramètres de la simulation sont les mêmes que ceux de la Fig. (III-19).*

Afin d'observer un comportement de type « loi d'échelle » à la fois pour la distribution des vitesses de la Fig. (III-26) et pour la distribution des temps de détachement de la Fig. (III-27), nous divisons l'axe des abscisses de ces deux figures par N_s. L'axe des ordonnées de la Fig. (III-26) est adimensionné par la vitesse d'impact v_{imp} et celui de la Fig. (III-27) par le temps de collision τ_N. Les résultats sont représentés sur les Figs. (III-29) et (III-30). Sur les deux figures, nous observons un impressionnant comportement de type loi d'échelle puisque tous les résultats expérimentaux (à l'exception de $N < 5$) se répartissent sur une seule et même courbe.

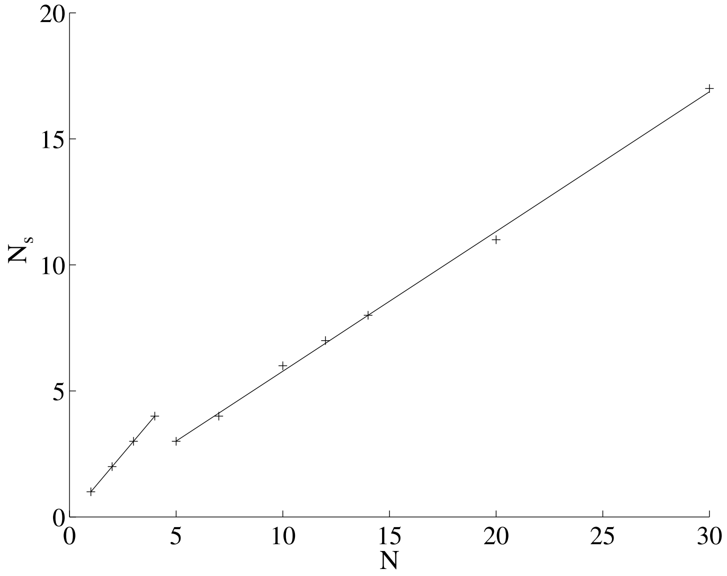


FIG. III-28 – *Résultat des simulations numériques : évolution de N_s en fonction de N. Pour $N < 5$, la droite en traits pleins correspond à $N_s = N$. Pour $N > 5$, la droite moyenne a pour pente* $0,55$.

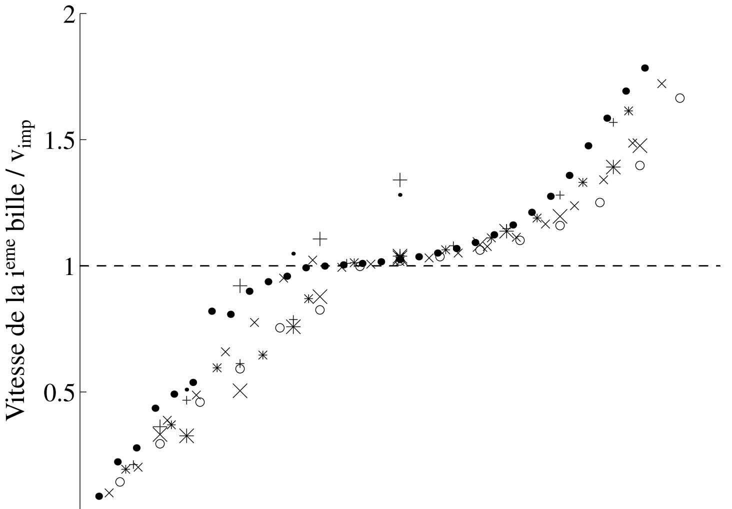


FIG. III-29 – *Résultat des simulations numériques : vitesse de la $i^{ème}$ bille, à la fin de la collision, divisée par la vitesse d'impact v_{imp} en fonction du numéro la bille i divisée par N_s, pour différentes valeurs de N. Les légendes de tous les symboles utilisés sont identiques à ceux de la Fig. (III-26) à l'exception de $N = 30$ ($\bullet$). Après ces changements d'échelle, les résultats expérimentaux de la Fig. (III-26) se répartissent sur une seule courbe à l'exception de $N = 3$ ($\cdot$) et 4 ($+$). Les billes ayant des vitesses finales plus grandes que leurs vitesses initiales v_{imp} sont au dessus de la droite en traits pointillés tandis que les billes possédant des vitesses finales plus petites que v_{imp} sont en dessous de cette droite.*

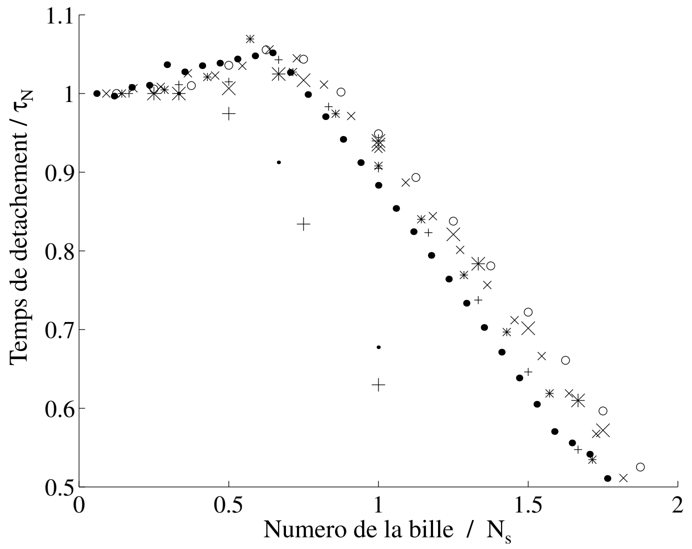


FIG. III-30 – *Résultat des simulations numériques: temps de détachement de la $i^{ème}$ bille divisé par le temps de collision τ_N en fonction du numéro de la bille i divisé par N_s, pour différentes valeurs de N. Les légendes de tous les symboles utilisés sont identiques à ceux de la Fig. (III-26) à l'exception de $N = 30$ (•). Après ces changements d'échelle, les résultats expérimentaux de la Fig. (III-27) se répartissent sur une seule courbe à l'exception de $N = 3$ (·) et 4 (+).*

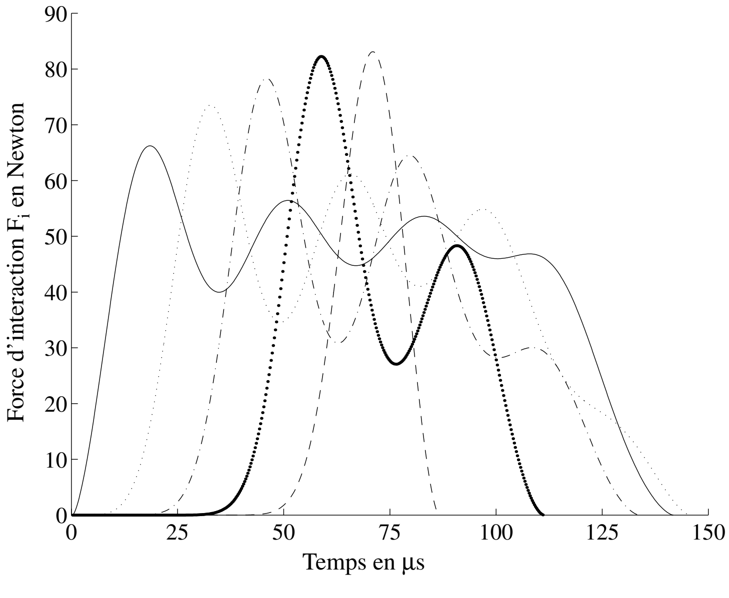


FIG. III-31 – *Résultat des simulations numériques: force d'interaction F_i entre la ième bille et la $i+1$ème en fonction du temps lors de la collision entre une colonne de $N = 5$ billes et le sol: (−) F_0 bille 1 avec le sol; (·) F_1 billes 1 et 2; (−·) F_2 billes 2 et 3; (•) F_3 billes 3 et 4; (−−) F_4 billes 4 et 5. Pour toutes les courbes, les paramètres de la simulation sont les mêmes que ceux de la Fig. (III-19).*

Comme l'énergie totale est conservée dans notre modèle, l'énergie du système est redistribuée au cours de la collision et c'est cette redistribution d'énergie qui impose l'effet de détachement. A l'intérieur de la colonne, la redistribution d'énergie s'effectue lors des interactions entre les billes, majoritairement des régions où les interactions sont peu intenses mais durent longtemps (billes du bas) vers les régions où les interactions sont très intenses pendant une durée très courte (billes du haut). En effet, comme on le voit sur la Fig. (III-31), les forces d'interactions entre les billes du haut de la colonne sont plus intenses, mais interviennent sur un temps plus court, que les forces d'interaction entre les billes du bas de la colonne. Puisqu'une force est le rapport d'une variation de quantité de mouvement sur une variation de temps ($F = m\Delta v/\Delta t$), l'échange de la quantité de mouvement entre quatrième et la cinquième bille prend un temps beaucoup plus petit que l'échange de la quantité de mouvement entre chaque paire précédente.

L'énergie cinétique de la colonne, relativement à son centre de masse, est définie, au cours du temps, selon

$$E_{rel}(t) = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{N}(\dot{x}_i(t) - v_g)^2 \ . \tag{III.21}$$

E_{rel} est aussi appelée « température granulaire » lorsque $N \gg 1$. A la fin de la collision ($t = \tau_N$), E_{rel} donne une mesure sur la distance typique de séparation des billes de la colonne. En effet, les contributions significatives dans la somme de l'Eq. (III.21) n'interviennent que lorsque $\dot{x}_i \gg v_g$ ou $\dot{x}_i \ll v_g$. Précédemment, nous avons établi que plus le nombre de billes N de la colonne augmente, plus les vitesses des billes du haut de la colonne sont supérieures à leurs vitesses initiales v_{imp}. Ainsi, E_{rel} doit croître avec N. Cependant, lorsque le nombre de billes augmente, la quantité de mouvement totale du système croît. La quantité intéressante est donc le rapport entre l'énergie cinétique relative E_{rel} à la fin de la collision, sur l'énergie cinétique totale E_{cin}, c.-à-d.

$$\frac{E_{rel}}{E_K} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N}(\dot{x}_i\big|_{t=\tau_N} - v_g)^2}{\sum\limits_{i=1}^{N}\dot{x}_i^2\big|_{t=\tau_N}} \ . \tag{III.22}$$

L'évolution de ce rapport est représentée sur la Fig. (III-32) en fonction de N et de $1/N$. A la fin de la collision, la distance typique de séparation entre chaque bille croît avec N mais semble devenir constante pour de grandes valeurs de N. Bien évidemment, ce résultat n'est plus valable dans le cas d'un modèle dissipatif, avec une loi d'interaction linéaire, puisque la distance typique de séparation passe par un maximum, à basse valeur de N, puis décroît pour de plus grande valeur de N (voir la Fig. (2c) de la Ref. [67]).

III.6.7 Collision avec un mur « mou »

Examinons maintenant le cas de la collision d'une colonne de billes avec un mur mou. Une telle collision a été définie au § (III.3.3) comme étant telle que $\tau_{max}(N = 1) \geq T_q$ tandis qu'une collision avec un mur rigide correspondait à $\tau_{max}(N = 1) < T_q$. Puisque la dissipation n'est pas prise en compte dans notre modèle, la force maximale du cycle de charge d'une seule bille, c.-à-d. $N = 1$, est atteinte après la moitié du temps de la collision, c.-à-d. à

$$\tau_{max}(N = 1) = \frac{\tau_1}{2} \ . \tag{III.23}$$

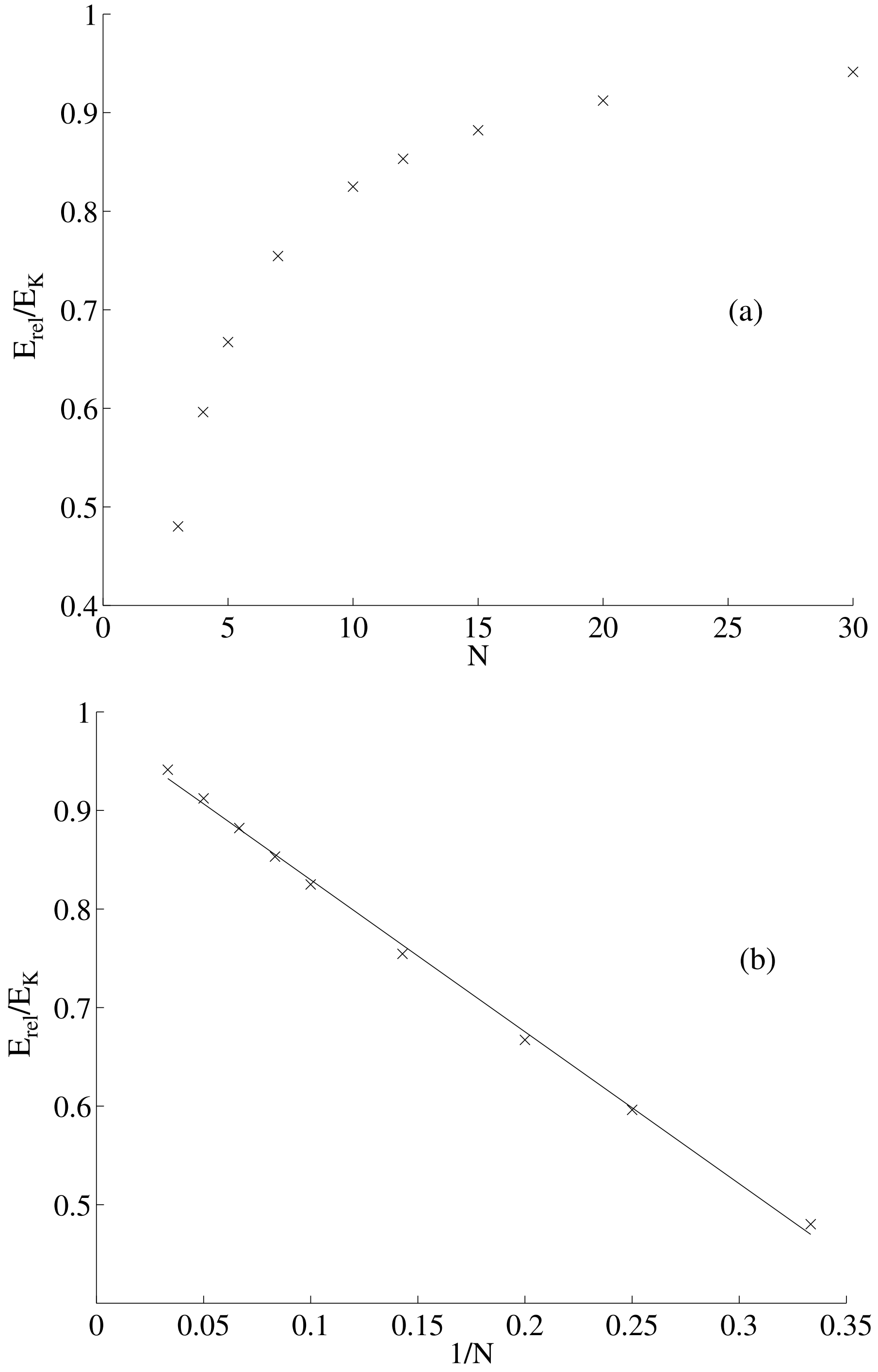


FIG. III-32 – *Résultat des simulations numériques : (a) Evolution de E_{rel}/E_K en fonction du nombre de billes N. (b) Evolution de E_{rel}/E_K en fonction de $1/N$. Les croix représentent les points numériques. La droite en traits pleins correspond à la droite décrivant le mieux les points numériques. Pour tous les points numériques, les paramètres des simulations sont les mêmes que ceux de la Fig. (III-19).*

La substitution des Eqs. (III.2), (III.19) et (III.23) dans les deux inégalités ci–dessus conduit alors à un cœfficient critique du contact sphère–plan K_c , tel que pour $K > K_c$ la collision est définie comme étant celle avec un mur rigide et pour $K \leq K_c$ celle avec un mur mou, avec

$$K_c = \left(\frac{2,94}{4}\right)^{5/2} \frac{5k}{4} \; . \tag{III.24}$$

Dans la plupart des simulations du § (III.6), la valeur du cœfficient de Hertz pour un contact sphère–sphère est celui entre deux sphères en acier inoxydable, c.-à-d. $k = 6,9716 \times 10^9\ N/m^{3/2}$. Ainsi, d'après l'Eq. (III.24) et pour une colonne de sphères en acier inoxydable, la valeur critique est $K_c = 4 \times 10^9\ N/m^{3/2}$. Dans le § (III.6.2) nous avons vu que l'évolution de la force maximale F_{max} ressentie par le mur était indépendaente de N. Ce comportement est en accord avec les remarques ci–dessus puisque la valeur du paramètre $K = 9,858 \times 10^9\ N/m^{3/2}$ était tel que $K > K_c$. La figure (III-33) montre l'évolution temporelle de la force F_0 pour une collision avec $N = 3$, 5, 7, 10 où 15 billes pour $K < K_c$. Les paramètres des simulations sont $K = 1 \times 10^9\ N/m^{3/2}$; $k = 6,9716 \times 10^9\ N/m^{3/2}$; $v_{imp} = 0,3\ m/s$ et $m = 2,05 \times 10^{-3}\ kg$. Comme nous l'attendions, l'évolution de la force au cours du temps est en accord avec les résultats expérimentaux pour un mur mou : la force croît jusqu'à une valeur F_{max} qui dépend de N, pour de basses valeurs de N, et est indépendant de N pour des valeurs plus grandes. Contrairement aux résultats expérimentaux (voir par exemple la Fig. (III-14d)), les simulations de la Fig. (III-33) montre que la valeur moyenne de la force est constante au cours de la collision. Ceci est provient du fait que l'on néglige les effets dissipatifs au cours des simulations numériques.

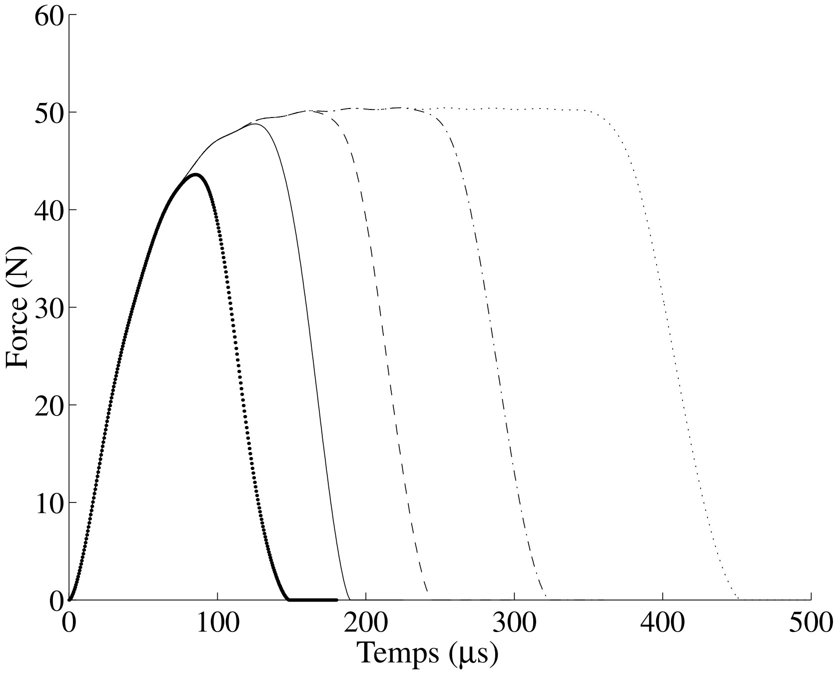


FIG. III-33 – *Résultat des simulations numériques : évolution temporelle de la force ressentie par un mur mou lors d'une collision de* $N = 3$ (•) ; 5 (–) ; 7 (– –) ; 10 (–·) *ou* 15 (·) *billes.*

III.7 Expression analytique de la vitesse de l'onde de déformation

La dynamique d'une colonne de billes rebondissant sur le sol, en l'absence de la gravité, est équivalente à celle d'une colonne qui serait soumise à l'impact d'un mur se déplaçant à vitesse constante v_m. En effet, à cause de l'invariance galiléenne, la condition initiale $v_m = 0$ et $\dot{x}_i(t=0) = v_{imp}$ est équivalente à $v_m = -v_{imp}$ et $\dot{x}_i(t=0) = 0$. L'expression analytique de la vitesse v de l'onde de déformation peut être ainsi déterminée par la réponse d'une rangée de billes en contact soumise à un échelon de force.

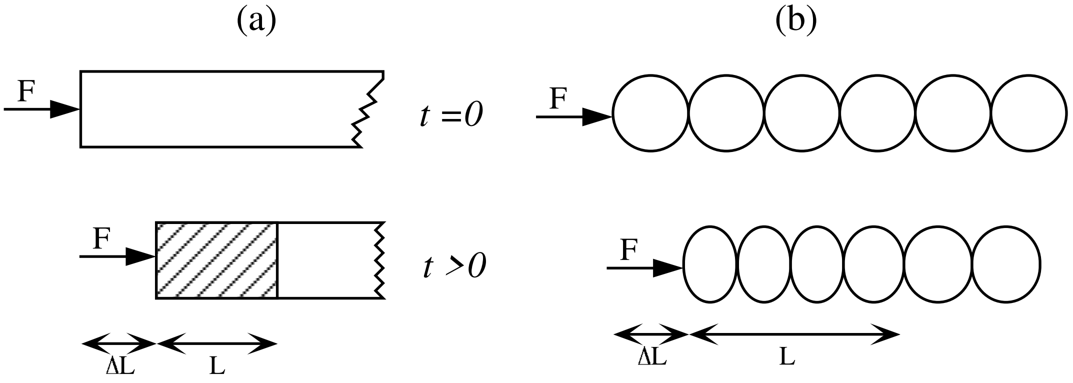


FIG. III-34 – *(a) Réponse d'une barre à un échelon de force. La zone hachurée correspond à la région de la barre qui est comprimée. (b) Réponse d'une rangée de billes en contact à un échelon de force.*

L'expression analytique d'une telle vitesse est obtenue par analogie avec le calcul de la vitesse de propagation d'une onde longitudinale dans une barre solide, infiniment longue, soumise à un échelon de vitesse[6].

A $t = 0$, appliquons une force de compression F à l'extrémité gauche d'une barre, de section transverse S, constituée d'un matériau de masse volumique ρ_b et de module d'Young E_b (voir la Fig. (III-34a)). Une onde de compression commencera alors à se propager à travers la barre avec une vitesse c_l. A un instant $t > 0$, l'onde aura parcouru une distance $L = c_l t$ tandis que le point d'application de la force aura parcouru une distance $\Delta L = v_p t$ où v_{imp} est la vitesse des « particules » dans la région comprimée de la barre (zone hachurée de la Fig. (III-34a)). La conservation de la quantité de mouvement permet d'écrire

$$Ft = \rho S c_l t v_{imp}, \tag{III.25}$$

où le terme de gauche de l'Eq. (III.25) représente l'impulsion injectée, au temps t, tandis que le terme de droite correspond à l'impulsion reçue par la barre, au même instant, permettant la mise en mouvement de la zone hachurée de masse $\rho S c_l t$. La loi de Hooke (voir l'Eq. (I.1)) permet de relier la déformation relative de la barre[7] $\frac{\Delta L}{L}$ à la contrainte $\frac{F}{S}$ appliquée sur la

6. Le calcul permettant d'obtenir l'expression analytique de la vitesse des ondes longitudinales dans une barre uniforme a été développé pour la première fois par Babinet ; voir les pages 493–494 de la Ref. [15].

7. Dans la loi de Hooke, la déformation relative est $\frac{\Delta L}{\Delta L + L}$, mais on suppose $\Delta L \ll L$.

barre selon

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \times \frac{F}{S}. \tag{III.26}$$

En utilisant les Eqs. (III.25), (III.26) et les expressions de ΔL et L, la vitesse c_l des ondes longitudinales dans la barre s'écrit alors

$$c_l = \sqrt{\frac{E_b}{\rho_b}}. \tag{III.27}$$

On retrouve bien le résultat classique pour la vitesse de propagation des ondes longitudinales dans un barreau.

En reprenant ce raisonnement dans le cas d'une rangée de billes, l'expression de la vitesse de l'onde de déformation de la chaîne peut être obtenue analytiquement à partir des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de la loi d'interaction entre deux billes.

A $t = 0$, appliquons une force de compression F à l'extrémité gauche d'une chaîne de billes en contact, chacune de rayon R et de masse volumique ρ_s (voir la Fig. (III-34b)). Une onde de compression commencera alors à se propager à travers la chaîne avec une vitesse v. Après un instant $t > 0$, l'onde aura parcouru une distance $L = vt$ tandis que le point d'application de la force aura parcouru une distance $\Delta L = v_{imp}t$ où v_{imp} est la vitesse des billes en mouvement. Le nombre N_f de bille en mouvement, à l'instant t, est[8] alors

$$N_f = \frac{vt}{2R}. \tag{III.28}$$

La conservation de la quantité de mouvement, au même instant, implique que

$$Ft = N_f m v_{imp}, \tag{III.29}$$

où le terme de gauche de l'Eq. (III.29) représente l'impulsion injectée dans le système tandis que le terme de droite correspond à l'impulsion totale présente dans la chaîne de billes, chacune de masse $m = \frac{4}{3}\pi\rho_s R^3$. Utilisons la loi d'interaction non linéaire de Hertz qui relie l'interpénétration δ entre deux billes et la force qui les comprime F selon l'Eq. (I.19). Au temps t, le point d'application de la force aura parcouru une distance[9] $\Delta L = N_f\delta = v_{imp}t$. En reportant l'Eq. (I.19) dans l'expression de ΔL, on obtient alors

$$\frac{vt}{2R}\left(\frac{F}{k}\right)^{2/3} = v_{imp}t, \tag{III.30}$$

où k est le cœfficient de la loi de Hertz pour un contact sphère–sphère (voir l'Eq. (I.20)). En reportant la valeur de F déduite de l'Eq. (III.30) dans l'Eq. (III.29), et en utilisant l'Eq. (I.20) et l'Eq. (III.28), la vitesse v de l'onde de déformation à l'intérieur de la chaîne de billes est

$$v = \left[\frac{2E_s}{\rho_s\pi(1-\nu_s^2)}\right]^{2/5} v_{imp}^{1/5}. \tag{III.31}$$

8. En pratique, comme une chaîne de billes est dispersive (voir le § (III.8)), le front de l'onde de déformation change de forme au cours de sa propagation à travers la chaîne, ce qui est contraire à l'hypothèse conduisant à l'Eq. (III.28).

9. Il y a en réalité $N_f - 1$ contacts et ainsi $\Delta L = (N_f - 1)\delta$, mais on suppose $N_f \gg 1$.

En reportant l'Eq. (I.20) dans l'Eq. (III.31), l'Eq. (III.31) a alors la même expression que l'Eq. (III.18) trouvée numériquement et les cœfficients numériques de ces deux équations sont identiques.

De plus, la seule différence avec la barre homogène est l'utilisation d'une interaction non linéaire (loi de Hertz) entre les billes tandis que la loi linéaire Hooke décrit le comportement de la barre. En conséquence, la vitesse de l'onde de déformation v dépend de la vitesse d'impact v_{imp} pour le cas non linéaire tandis que pour la barre, la vitesse c_l des ondes longitudinales est indépendant de v_{imp}.

En reportant l'Eq. (III.31) dans l'Eq. (III.6) avec $T_q' = T_q$, le temps T_q mis pour que le transfert d'impulsion d'une bille à une autre fasse un aller retour dans une bille est alors

$$T_q = \left(16\pi\rho_s \frac{1-\nu_s^2}{E_s}\right)^{2/5} R v_{imp}^{-1/5} \ . \tag{III.32}$$

En reportant l'Eq. (I.20) dans l'Eq. (III.32), l'Eq. (III.32) a alors la même expression que l'Eq. (III.19) trouvée numériquement et que les cœfficients numérique de ces deux équations sont identiques. En utilisant les caractéristiques de l'acier inoxydable pour E_s, ν_s et ρ_s (*cf.* tableau de la page 16) et l'Eq. (III.31), la vitesse de l'onde de déformation est calculée pour trois valeurs de la vitesse d'impact $v_{imp} = 0,191\,;\, 0,246$ et $0,316\ m/s$ correspondant respectivement à trois hauteurs de chute $h = 1,9\,;\, 3,1$ et $5,1\ mm$. Ces résultats sont regroupés dans le Tab. (III.1) et sont en bon accord avec les vitesses mesurées expérimentalement au § (III.3.3) et celles déduites des simulations du § (III.6.5).

III.8 Mécanisme de l'effet de détachement

Considérons une colonne unidimensionnelle de N billes identiques toutes séparées les unes des autres d'une distance d_0 et possédant chacune une vitesse $v_i^{\mathrm{i}} = v_{imp}$ le long de leur axe commun. Laissons cette colonne entrer en contact avec le sol et négligeons les effets de la gravité au cours de l'interaction. Après la collision, les billes s'éloignent du sol avec une vitesse v_i^{f}. Luding *et al.* [67, 80, 81] ont étudié numériquement ce problème (voir aussi la Ref. [66] pour une rapide description), à l'aide de simulations de dynamique moléculaire, en utilisant une loi d'interaction linéaire ou non linéaire dissipative entre chacune des billes en contact. Ils mesurent le cœfficient de restitution effectif ϵ_{col} de la colonne entière qui est défini comme

$$\epsilon_{col} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} {v_i^{\mathrm{f}}}^2}{\sum_{i=1}^{N} {v_i^{\mathrm{i}}}^2}} = \frac{1}{N\,v_{imp}}\sqrt{\sum_{i=1}^{N} {v_i^{\mathrm{f}}}^2} \ . \tag{III.33}$$

Ils montrent que ϵ_{col} dépend du rapport t_0/τ_N, où $t_0 = d_0/v_{imp}$ est le temps nécessaire à une bille pour rattraper sa suivante quand cette dernière est brusquement arrêtée (*e.g.* par l'impact sur le sol) et τ_N le temps que dure la colision de la colonne de N billes avec le sol. Dans le cas où $t_0/\tau_N \gg 1/N$, la collision entre la colonne et le sol conduit à un très grand nombre de collisions binaires entre les billes. Le cœfficient de restitution effectif ϵ_{col} est ainsi considérablement plus petit que le cœfficient de restitution pour un impact binaire. D'un autre côté, dans le cas où $t_0/\tau_N \ll 1/N$, la collision entre la colonne et le sol conduit à ce que toutes les billes soient en contact mutuel au même instant. Ainsi, les billes intéragissent avec le sol comme une chaîne d'oscillateurs couplés amortis plutôt que comme N billes distinctes. Dans ce cas, le cœfficient de restitution effectif ϵ_{col} est alors proche de 1, et les billes se détachent les unes des autres avec des distances inter–billes très variables : ce phénomène a été appelé « l'effet de détachement » [67], mais n'a pas de réelle interprétation.

Dans notre problème $d_0 = 0\ m$ puisque toute les billes sont en contact lors de la chute de la colonne et nous retrouvons l'effet de détachement annoncé par Luding *et al.* . En effet, nous avons montré expérimentalement au § (III.3.5) et de manière indirecte, que les billes ne restent pas en contact les unes avec les autres après la collision de la colonne avec le sol. De plus, nous avons montré numériquement aux § (III.6.1) et (III.6.6), qu'après le cycle de compression entre la colonne et le sol, deux types de détachement des billes peuvent intervenir selon que le nombre de billes dans la colonne est plus grand ou plus petit qu'un certain nombre critique. Dans les deux cas, les billes se détachent les unes des autres avec des distances inter–billes très variables (voir la Fig. (III-19)) et des vitesses très différentes (voir les Figs. (III-20) et (III-26)).

Cet effet est essentiellement dû aux propriétés élastiques du matériau constituant les billes puisque les simulations [67] pour $d_0 = 0$, dans la limite d'une intéraction de sphères dures (c.-à-d. un temps de collision nulle), montre que cet effet disparaît pratiquement (c.-à-d. que la distance entre chaque bille est constante et est très petite par rapport à celle trouvée pour des interactions de sphères molles, comme le montre les Figs. (1a) et (1d) de la Ref. [67]). De plus, pour un modèle d'interaction linéaire dissipatif avec $d_0 = 0$, ces auteurs ont montré que l'effet de détachement était le résultat d'un modèle dépendant des propriétés dissipatives. En effet, il semble raisonnable qu'une colonne de billes en acier doît se détacher plus qu'une colonne de billes en aluminium (c.-à-d. que la collision de l'ensemble de la colonne de billes en acier est moins dissipative que celle en aluminium) puisque une collision binaire entre billes d'acier est faiblement dissipative alors que celle entre billes d'aluminium est fortement dissipative. Cependant, la dissipation n'est pas la cause de cet effet puisque le modèle d'interaction non linéaire de Hertz, présenté dans aux § (III.5) et (III.6), qui est non dissipatif, montre l'effet de détachement des billes de la colonne. La cause du détachement provient de la redistribution d'énergie à l'intérieur du système lors de la collision. Cette redistribution a lieu parce que la propagation de l'énergie à travers la colonne de billes est dispersive.

Pour comprendre cela, considérons maintenant le cas d'une chaîne horizontale de N billes élastiques toutes identiques, chacune suspendue par l'intermédiaire de deux fils, qui est soumise à l'impact de n billes incidentes. Au cours de la collision, l'énergie des billes impactantes est distribuée dans toute la chaîne, cette dernière étant faiblement dispersive. Les transferts d'énergie et de quantité de mouvement à l'intérieur de la chaîne sont dits dispersifs dans le sens où, à la fin de la collision, chaque bille possède une fraction de l'énergie des billes impactantes. Ainsi, à la fin de la collision, les $N - n$ billes, considérées générallement comme étant au repos et en contact mutuel (voir le § (III.1)), sont en mouvement et sont séparées de leurs voisines par une petite distance. Au contraire, le système est non dispersif (ou encore appelé *dispersion–free* [21] ou *perfect transmission* [73]), si la perturbation engendrée lors de l'impact se propage, à travers la chaîne, sans changer de forme et transfert alors son énergie et sa quantité de mouvement aux n billes à l'autre extrémité de la chaîne. Générallement, un système possédant la propriété de transmission parfaite est une chaîne de billes de natures différentes, c.-à-d. différentes masses interagissant par l'intermédiaire de ressorts, soit tous linéaires ou non linéaires mais de raideurs différentes [21, 73]. Pour une interaction linéaire (la loi de Hooke), Reinsch [73] obtient la solution générale (c.-à-d. les masses de chaque bille et les raideurs de chaque ressort) pour avoir une chaîne de billes non dispersive quels que soient

N et n. Dans la limite continue, cette chaîne de transmission parfaite conduit à une équation d'onde non dispersive. Pour une interaction non linéaire (loi de Hertz), les simulations numériques pour $N = 3$, $n = 1$ [73] et $N = 4$, $n = 1$ [21] montrent que, pour des billes identiques, la chaîne est dispersive. Cependant, pour une interaction hertzienne avec des billes différentes, la propriété de transmission parfaite peut être obtenue [73]. Par conséquent, l'expérience très connue que l'on retrouve dans le commerce avec $n = 1$ et $N \simeq 5$ billes identiques est une chaîne dispersive, les billes en interactions étant bien décrites par la loi de Hertz [21]. Ainsi, après la première collision, seule la bille à l'autre extrémité de la chaîne s'envole au loin, les autres étant maintenant légèrement séparées de leurs voisines. C'est la raison pour laquelle, dans toutes les séries de collisions suivantes, la chaîne est alors non dispersive puisque seules des collisions binaires sont mises en jeu. Cette interprétation est initiallement due à Herrmann *et al.* [21].

Revenons maintenant à notre problème en négligeant les effets dissipatifs. C'est le même problème que celui ci–dessus avec $n = 1$, N billes identiques élastiques et des interactions réalistes entres elles, c.-à-d. *via* la loi de Hertz. Par conséquent, le cas non dispersif pour la colonne (c.-à-d. pas d'effet de détachement des billes) ne peut arriver, quel que soit la valeur de N. De plus, Luding *et al.* [67, 80, 81] ont remarqué que cet effet de détachement est plus faible dans le cas d'une interaction non linéaire (loi de Hertz) que dans le cas d'une interaction linéaire (loi de Hooke). Ceci est raisonnable puisque une chaîne de billes identiques en interaction de Hertz est, par nature, moins dispersive que celle en interaction de Hooke [21, 73]. Ainsi, il semble normal que, dans la limite d'une interaction de sphères dures donc fortement non linéaire, l'effet de détachement disparaisse pratiquement puisque le système devient alors non dispersif. Lors de la collision d'une colonne de billes avec le sol, l'importance de la faible dispersion d'énergie à l'intérieur de la colonne de billes en interaction de Hertz est donc reponsable de la redistribution d'énergie dans toute la colonne et de l'effet de détachement. Par conséquent, ce mécanisme est non dissipatif, mais peut bien évidemment dépendre, pour une colonne réelle, des propriétés dissipatives.

Enfin, une autre expérience très simple devrait permettre de se convaincre de l'importance de la dispersion de l'energie dans une chaîne de billes par rapport à la dissipation d'énergie : si l'on lâche une petite bille sur un plan très massif, son rebond sera de l'ordre de sa hauteur initiale, montrant ainsi que le cœfficient de restitution est proche de l'unité ; alors que si l'on lâche la même bille sur une colonne de billes identiques, elle s'arrêtera net et ne rebondira pas du tout. Cette différence frappante de comportement collectif provient de la redistribution de l'énergie incidente à l'intérieur du système. La dispersion d'énergie est par conséquent un phénomène d'une importance majeure.

III.9 Conclusion

L'étude expérimentale de la collision d'une colonne de N billes avec un mur stationnaire a été présentée dans ce chapitre. Dans le cas d'un mur rigide et à hauteur de chute fixée, nous avons montré que la force maximale ressentie par le mur est indépendante du nombre de billes. Nous avons aussi mesuré, en fonction de N, la durée de collision, la vitesse de l'onde de déformation et un cœfficient de restitution effectif de la colonne. De plus, nous avons souligné que l'indépendance de la force maximale avec N est reliée à la propagation de l'onde de déformation à travers la colonne et dépend de la rigidité du mur. En outre, nous sommes capable de définir de façon précise le mot « rigidité ». Une expression analytique de la vitesse de telles ondes a été obtenue et est en accord avec les résultats expérimentaux.

Un modèle numérique non dissipatif, fondé sur l'interaction non linéaire de Hertz, donne des résultats en très bon accord avec l'expérience. De plus, numériquement, nous avons montré qu'après la phase de compression entre la colonne et le mur, les billes se séparent les unes des autres avec des vitesses et des distances inter-billes très différentes. Deux sortes de détachements des billes de la colonne ont alors été observé numériquement : un en dessous du nombre critique $N = 5$ et un pour $N \geq 5$. Pour $N \geq 5$, les billes du haut de la colonne se détachent les unes après les autres de la colonne avec une vitesse plus grande que leur vitesse initiale. Les billes du bas rebondissent alors, vers le haut, en bloc avec une vitesse inférieure à leur vitesse initiale.

Une interprétation de l'effet de détachement des billes a alors été donnée. En effet, nous avons souligné que cet effet de détachement provient de la redistribution d'énergie à l'intérieur du système au cours de la collision, et non pas à cause d'effets dissipatifs. Cette redistribution a lieu car la propagation de l'énergie à travers la colonne est dispersive.

Notre travail montre de plus que la collision de N billes inélastiques avec un mur stationnaire (c.-à-d. pas d'énergie injectée au cours de la collision) est régie par deux mécanismes fondamentaux : la dispersion dénergie à travers toute la colonne et la dissipation dénergie lors de la collision inélastique. Le rôle de la dispersion dénergie est de redistribuer l'énergie, au cours de la collision, à l'intérieur de tout le système. Cette redistribution dépend essentiellement de la nature intrinsèque de la loi d'interaction entre deux billes (c.-à-d. la loi de Hertz pour des interactions réalistes). La dispersion d'énergie à travers le système conduit alors à l'effet de détachement des billes de la colonne et à une distance typique de séparation entre chaque bille. Nous avons vu numériquement que cette distance typique augmente avec N. D'un autre coté, puisque de l'énergie est toujours perdue lors de la collision, la dissipation tend à réduire cette distance typique de séparation entre chaque bille. La dissipation et la dispersion sont par conséquent deux effets antagonistes. De plus, l'énergie dissipée augmente avec N (voir la Fig. (III-12)). Par conséquent, si les effets dissipatifs compensent les effets dispersifs, c.-à-d. pour N grand, nous pensons que la colonne ne rebondira pas.

Finallement, ces mécanismes ne sont pas spécifiques aux expériences unidimensionnelles et doivent être très important pour les expériences plus réalistes à deux ou trois dimensions : l'effet purement dispersif (c.-à-d. l'effet de détachement des billes) est probablement un mécanisme précurseur de la fluidisation des milieux granulaires vibrés [11, 12] tandis que la prépondérance des effets dissipatifs peut conduire à la phase condensée (ou dite « en amas ») des milieux granulaires vibrés [12, 67].

Chapitre IV

Propagation d'ondes solitaires dans une chaîne de billes en contact de Hertz

IV.1 Introduction

L'étude de la propagation d'ondes dans les milieux granulaires est un domaine très vaste, tant au niveau industriel, mécanique que géophysique. Par exemple, les ondes acoustiques sont généralement utilisées pour réaliser des tests non destructifs et sont parfois le seul moyen expérimental pour accéder à certaines informations géophysiques. Le comportement acoustique des milieux granulaires s'est alors développé expérimentalement [82, 83] et théoriquement [84], depuis fort longtemps.

La propagation d'excitations dans un milieu granulaire dépend de nombreux paramètres: la forme des grains [1], la nature du contact entre chaque grains, la géométrie du réseau des contacts [2] ainsi que la dimensionalité du système étudié. Cette diversité rend le problème complexe et de nombreuses questions restent encore ouvertes (voir la Ref. [86] pour un résumé récent). Les premières études expérimentales concernèrent la propagation d'ondes sismiques dans des matériaux soumis à de très hautes pressions [87, 88, 89], matériaux à l'intérieur desquels tous ces paramètres agissent simultanément. Plus récemment, des travaux expérimentaux [90, 91, 92], numériques [93] et théoriques [94] ont tenté de dissocier ces effets. Ces études se sont focalisées sur l'importance des effets géométriques dûs au désordre des contacts entre grains, lors de la propagation du son dans le sable. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons plus particulièrement aux effets dûs à la nature du contact entre chaque grains et aux comportements non linéaires et dispersifs qui lui sont associés.

La loi d'intéraction entre deux sphères adjacentes est une solution exacte de l'élasticité linéaire, connue sous le nom de loi de Hertz (voir le Chap. I). A cause d'un effet purement géométrique, la relation entre la force statique, F_0, appliquée sur les sphères et la distance de rapprochement, δ_0, de leurs centres est non linéaire: $F_0 \sim \delta_0^{3/2}$. En conséquence, la vitesse des ondes linéaires (les ondes sonores) dans les systèmes unidimensionels évolue alors comme $F_0^{1/6}$. Ce résultat classique a été observé expérimentalement depuis longtemps [82, 83], mais ne semble pas être valable pour des systèmes de dimensions plus élevées du fait de l'intervention des effets géométriques du réseau des contacts [86]. Pour s'affranchir de ce problème, nous devons nous limiter à l'étude d'un système ordonné unidimensionel comme une chaîne de billes élastiques identiques. Cette configuration permet alors de « sonder » le régime non linéaire du système.

Le comportement non linéaire d'une chaîne de billes a été, tout d'abord, analysé numériquement, pour différentes lois d'interaction non linéaire, afin d'étudier la propagation « d'ondes de choc [3] » à l'intérieur de la chaîne [95, 96, 97]. Nesterenko [76] a ensuite été le premier a donné une solution analytique à ce problème pour la loi d'interaction de Hertz. Il a mis en évidence le fait que les ondes de fortes compressions, c.-à-d. avec une amplitude beaucoup plus grande que celle de la force statique F_0, peuvent se propager, à travers la chaîne, à la manière *d'ondes solitaires* localisées [4]. Quelques temps plus tard, une preuve expérimentale de l'existence de ces ondes a été fournie par Lazaridi et Nesterenko [77, 99, 100]. Un problème

1. Appelé encore, dans la Ref. [85], le « désordre géométrique ».
2. Appelé encore, dans la Ref. [85], le « désordre de contact ».
3. Contrairement aux solitons qui sont issus d'un équilibre entre les effets non linéaires et dispersifs, les ondes de choc proviennent de l'effet combiné des non linéarités et de la diffusion. La vitesse de l'onde de choc dépend de son état final et initial, mais pas du front d'onde reliant ces deux états.
4. Une *onde solitaire* est une onde *non linéaire localisée* spatialement se propageant *sans déformation*, au cours du temps, avec une vitesse constante. Un *soliton* est une onde solitaire qui possède la propriété supplémentaire de rester inchangée après la collision avec une autre onde solitaire (voir la Ref. [98]).

fortement corrélé, bien que différent, concerne la propagation d'ondes à l'intérieur d'une colonne de billes soumises à la gravité (voir le Chap. III, l'annexe D et les Ref. [101, 102]), qui est crucial pour la compréhension de la dynamique de l'ensemble de la colonne après un impact. Soulignons, enfin, que les travaux théoriques de Nesterenko [76] ont été étendus à la propagation d'ondes de compression non linéaire dans les milieux 1–D consistués de deux types de sphères alternées [103, 104] ainsi qu'à la propagation d'onde de cisaillement non linéaire [104, 105].

Dans ce chapitre, nous présentons des expériences quantitatives sur la propagation d'ondes non linéaires dans une chaîne de billes élastiques identiques. La forme et la vitesse de ces ondes, ainsi obtenues, peuvent alors être comparées aux prévisions théoriques de la Ref. [76]. L'observation d'impulsions non linéaires localisées ainsi qu'une analyse détaillée, dans laquelle aucun paramètre ajustable intervient, permet d'identifier ces excitations avec les ondes solitaires décrites par Nesterenko [76]. En outre, notre dispositif expérimental permet, pour différentes forces statiques appliquées, une étude systématique de ces ondes sur une gamme d'amplitude très étendue. Par comparaison, dans les travaux expérimentaux décrits dans les Ref. [77, 99], l'amplitude de l'onde ne peut pas varier et seules des mesures indirectes de vitesse sont effectuées.

Au § (IV.2), nous présenterons le problème ainsi que l'équation non dissipative décrivant la dynamique de la chaîne. En outre, nous insisterons sur les hypothèses nécessaires à son obtention. Les diverses limites de cette équation seront exposées au § (IV.3), afin de savoir si elles ont un possible intérêt expérimental. Le § (IV.4) sera alors consacré à la description du dispositif expérimental. Le comportement du système dans le régime linéaire sera développé au § (IV.5). A l'intérieur de ce dernier, on linéarisera les équations tout en gardant leurs natures discrètes (voir le § (IV.5.1)) et on présentera les résultats expérimentaux obtenus (voir le § (IV.5.2)). L'accord entre la théorie et l'expérience permettra de retrouver les résultats classiques [82, 83] et consistera surtout en un test de notre dispositif expérimental. Au § (IV.6), nous aborderons le régime fortement non linéaire des équations du problème. L'analyse théorique de Nesterenko [76] sera alors résumée, au § (IV.6.1), par souci de clarté et de références ultérieures à certaines de ses équations. De plus, les passages « obscurs » de son article seront développés en détail, de même que certaines conclusions qui n'apparaissent pas dans la Ref. [76]. L'extension de cette analyse théorique à une méthodologie de mesure sera exposée au § (IV.6.2) tandis que les résultats expérimentaux en régime fortement non linéaire seront décrits au § (IV.7). Nous présenterons, au § (IV.7.1), la forme expérimentale des excitations non linéaires pour une chaîne soumise à une force statique modérée ($29,4$ et 167 N). Nous exposerons, au (IV.7.2), la mesure de la vitesse de propagation des excitations non linéaires pour une chaîne soumise à trois valeurs différentes de la force statique ($9,8$; $29,4$ et 167 N). Si cette vitesse (respectivement l'amplitude maximale de l'excitation) est adimensionnée par la vitesse du son des ondes *linéaires* (respectivement la force statique appliquée), nous verrons que toutes les mesures de vitesse se répartissent sur une courbe unique. Le § (IV.7.3) sera consacré au comportement de la chaîne en l'absence de force statique, puisque, dans ce cas là, les expressions théoriques deviennent quelque peu singulières. Enfin, au § (IV.7.4), nous comparerons nos résultats avec ceux obtenus antérieurement dans les Ref. [77, 99, 100] tandis que les conclusions de cette étude seront données au § (IV.8)

IV.2 Mise en place du problème

Considérons une chaîne horizontale de N billes identiques, de rayon R, en contact les unes avec les autres et soumises à une force statique de compression F_0. Ce dispositif est représenté schématiquement sur la Fig. (IV-1). On ne tiendra pas compte dans toute la suite d'un possible effet de rotation des billes ou de flambement de la chaîne de billes.

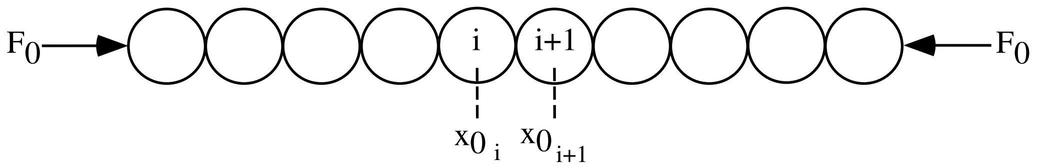


FIG. IV-1 – *Schéma du dispositif de compression statique : le centre de chaque bille i se trouve dans sa position d'équilibre sous compression* x_{0_i}.

Nous avons vu au Chap. I, que lorsque deux sphères élastiques identiques, de rayon R, sont en contact et sont soumises à une force statique normale F_0, la distance d'approche δ_0 de leurs centres s'écrit, d'après les Eqs. (I.19) et (I.20),

$$\delta_0 = \left(\frac{F_0}{k}\right)^{2/3}, \qquad \text{avec} \qquad k \equiv \frac{\sqrt{2R}}{3}\frac{E_s}{1-\nu_s^2}\ ; \tag{IV.1}$$

E_s et ν_s étant respectivement le module d'Young et le cœfficient de Poisson du matériau constituant les sphères. Cette solution, appelée la loi de Hertz, est un résultat exact de *l'élastostatique linéaire* et la relation non linéaire entre δ_0 et F_0 est un effet uniquement géométrique (voir le Chap. I).

Cette solution quasi-statique reste valable, dans le cas d'un problème dynamique, lorsque la force F, ainsi que la distance d'approche δ, sont des fonctions lentement variable du temps. Ces variations sont considérées comme lentes si tous les temps caractéristiques intervenant au cours du mouvement sont beaucoup plus grands que le temps nécessaire aux ondes acoustiques longitudinales pour traverser un diamètre de la sphère (voir le § (I.3.2)). Pour des billes en acier inoxydable, de 8 mm de diamètre, qui seront utilisées dans nos expériences, cette condition est vérifiée si tous les temps caractéristiques sont beaucoup plus grands que 2 μs, ou toutes les fréquences beaucoup plus petites que 500 kHz (voir l'annexe A). Tel sera le cas, comme nous le verrons sur les Figs. (IV-14) à (IV-16) et (IV-21) à (IV-23).

Par ailleurs, la solution de Hertz décrit un contact entre solides parfaitement élastiques. Cette limite élastique impose que la pression maximale lors du contact reste strictement inférieure à la pression limite de déformation plastique du matériau constituant les solides entrant en contact (voir le § (I.3.2)). Dans le cas de deux sphères en acier sous compression statique F_0, cette limite est dépassée[5] pour $F_0 \gtrsim 330\ N$. Dans nos expériences, la force statique appliquée à la chaîne sera inférieure à 170 N. Dans le cas dynamique, pour un impact entre deux sphères en acier, cette limite est dépassée pour des vitesses d'impact de l'ordre de $0,3\ m/s$ [20, 22]. Lors de l'étude du régime fortement non linéaire du § (IV.7), la vitesse maximale de la bille impactante sera environ de $0,5\ m/s$ (voir le § (IV.4)). Le choc sera

5. La limite complètement plastique est atteinte lorsque la pression maximale au centre du disque de contact (*cf.* l'Eq. (I.22)) est supérieure à $3Y$ où Y est la pression limite d'élasticité du matériau constituant les billes ($Y = 1000\ N/mm^2$ pour l'acier) [20].

donc élastique-plastique (voir le § (I.4.4)). Cependant, la loi de Hertz reste encore valide si le volume de la région où a lieu la déformation plastique est assez petit devant le volume qui est déformé élastiquement lors de l'impact ; en pratique celà correspond à des vitesses d'impact de l'ordre de huit fois la vitesse critique requise pour observer un début d'indentation plastique [22].

En outre, les travaux de Hertz (voir le Chap. I) montrent que lorsqu'une bille subit une compression, la pression est beaucoup plus importante dans le voisinage immédiat de la région de contact que dans tout le reste de la bille (voir aussi la Ref. [43]). On peut alors considérer la bille comme constituée d'une partie déformable, agissant comme un ressort non linéaire dans ce voisinage, et d'une partie indéformable dans pratiquement tout le corps de la bille. Par conséquent, il est légitime de modéliser une chaîne de billes indentiques en contact par une chaîne de masses ponctuelles de masse $m = 4\pi\rho_s R^3/3$, ρ_s étant la densité de chaque bille, chacune interagissant avec ses plus proches voisines par la loi de Hertz, c.-à-d. reliées par des ressorts non linéaires satisfaisant

$$F_i = \begin{cases} k(\delta_0 + x_i - x_{i+1})^{3/2} & \text{si} \quad x_i - x_{i+1} > -\delta_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \forall\ i \geq 1\ , \qquad \text{(IV.2)}$$

F_i étant la force d'interaction entre la $i^{\grave{e}me}$ et la $i+1^{\grave{e}me}$ masse, x_i est le déplacement du centre de la $i^{\grave{e}me}$ bille par rapport à sa position d'équilibre *sous compression* x_{0_i} et δ_0 l'interpénétration initiale due à la force statique F_0, donnée par l'Eq. (IV.1). Avec la convention de signe pour le déplacement x_i (voir la Fig. (IV-2b)), la $i^{\grave{e}me}$ masse interagit avec la $i+1^{\grave{e}me}$, *via* la loi de Hertz, si $x_{i+1} - x_i > -\delta_0$ (voir la Fig. (IV-2a)) tandis qu'elles se détachent l'une de l'autre si $x_{i+1} - x_i < -\delta_0$.

En ne tenant pas compte d'éventuels effets dissipatifs[6] et en utilisant d'une part les forces d'interaction, données par l'Eq. (IV.2), ainsi que leurs sens (voir la Fig. IV-2b)), la dynamique de la chaîne, à suffisamment basse fréquence, est alors décrite par le système d'équations différentielles non linéaires couplées

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{k}{m}\left[(\delta_0 - (x_i - x_{i-1}))^{3/2} - (\delta_0 - (x_{i+1} - x_i))^{3/2}\right] \qquad \forall\ 2 \leq i \leq N-1\ , \qquad \text{(IV.3)}$$

où t représente la variable temporelle. La validité des approximations conduisant à l'Eq. (IV.3) sera vérifiée *a posteriori* expérimentalement. En effet, dans le cas d'excitations de faible amplitude, les effets plastiques n'ont pas lieu d'être et le comportement de la chaîne est très bien décrit par le modèle non dissipatif d'Eq. (IV.3) (voir le § (IV.5)). Dans le régime fortement non linéaire, c.-à-d. pour des excitations de grande amplitude, il y a un très bon accord entre les résultats expérimentaux du § (IV.7) et la théorie du § (IV.6), qui ne tient pas compte d'éventuels phénomènes dissipatifs.

Dans les Eqs. (IV.3), il est supposé que la distance entre les centres de deux particules voisines n'excède pas $2R$, c.-à-d. $x_{i+1} - x_i > -\delta_0$. La quantité $|x_i - x_{i-1}|$ dans l'Eq. (IV.3) correspond à l'interpénétration, entre la $i-1^{\grave{e}me}$ et la $i^{\grave{e}me}$ masse, due à la force dynamique $F(t)$ tandis que δ_0 correspond à l'interpénétration, entre ces mêmes billes, sous l'action de la compression statique F_0. Le rapport entre ces deux quantités et leur importance relative par rapport à l'unité permet de se placer dans le cas où les effets dynamiques priment par

6. Une des causes de dissipation peut provenir du comportement viscoélastique du matériau constituant les billes (voir le § (I.4.3) et la Ref. [34]), mais cet effet est probablement très petit pour des billes en acier.

rapport aux effets statiques. Ce cas constitue la limite fortement non linéaire des Eqs. (IV.3). Le cas inverse, c.-à-d. $|x_i - x_{i-1}|/\delta_0 \ll 1$, correspond à la limite faiblement non linéaire ou complètement linéaire selon que, respectivement, l'on garde ou non les termes d'ordre supérieur en puissance de $|x_i - x_{i-1}|/\delta_0$ dans le développement du membre de droite des Eqs. (IV.3).

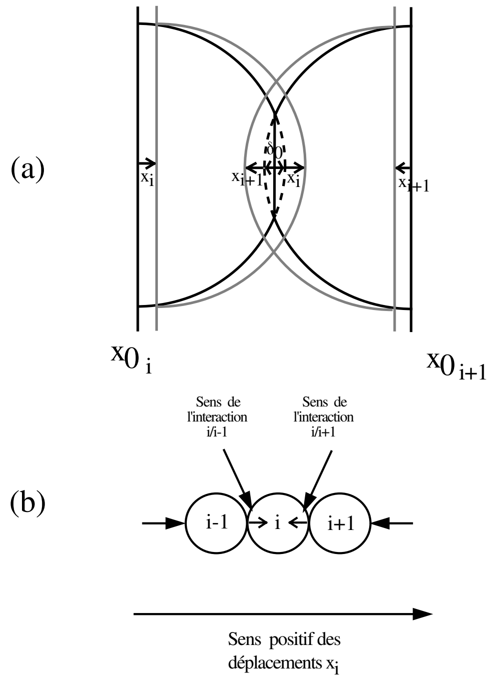


FIG. IV-2 – *Représentation schématique du modèle : (a) interaction entre la $i^{ème}$ et la $i+1^{ème}$ masse : sous l'effet de la force statique F_0, les centres des sphères se rapprochent d'une distance δ_0 et se trouvent alors dans leurs positions d'équilibre x_{0_i} et $x_{0_{i+1}}$; sous l'action d'une force dynamique $F(t)$, les centres des sphères se déplacent d'une distance x_i par rapport à x_{0_i} ; (b) directions des forces d'interaction entre la $i^{ème}$ et la $i+1^{ème}$ masse et entre la $i-1^{ème}$ et la $i^{ème}$.*

IV.3 Diverses limites de l'équation décrivant la chaîne de billes

Le système d'équations (IV.3) n'est pas intégrable, c.-à-d. qu'il n'est pas possible de prendre en compte analytiquement *à la fois* les effets non linéaires et le caractère discret du réseau. Lorsqu'on linéarise complètement le problème, comme au § (IV.5), on peut garder totalement la nature discrète du système. Au § (IV.6), on abordera la limite fortement non linéaire $|x_i - x_{i-1}|/\delta_0 \gg 1$, mais dans une approximation continue. Tous les autres cas « intermédiaires » sont discutés rapidement ci–dessous afin de savoir s'ils ont un possible intérêt expérimental.

La limite faiblement non linéaire des Eqs. (IV.3), tout en gardant complètement le caractère discret du réseau, s'écrit alors

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = K_1(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i) - \sum_{n=2}^{n=\infty} K_n \left[(x_i - x_{i-1})^n - (x_{i+1} - x_i)^n\right] \quad , \tag{IV.4}$$

où $2 \leq i \leq N-1$, n est entier et $K_n \sim (k\delta_0^{3/2-n})/m > 0$, $\forall\ n \geq 1$. Cette équation se rencontre habituellement dans les problèmes du type Fermi–Pasta–Ulam [7] [106, 107]. Ce type d'équation a beaucoup été étudié numériquement lorsque l'on tronque, jusqu'à une certaine valeur de n, la somme dans les Eqs. (IV.4). Jusqu'à $n = 2$, cette équation permet d'étudier la propagation d'ondes de choc dans les réseaux [106, 108, 109], la limite continue se ramènant [76] alors à une équation du type Korteweg–de–Vries dont les propriétés sont bien connues [110]. Jusqu'à $n = 3$ pour $K_2 = 0$ et $K_3 < 0$, des travaux théoriques [111] et numériques [112] montrent l'existence d'excitations non linéaires (ENL), spatialement localisées [8], intrinsèques au réseau. De tels modes localisés persistent lorsque $K_2 \neq 0$ [113, 114].

Pour notre problème, le fait que K_3 soit positif ne permet pas d'obtenir des solutions ENL. Cependant, il est possible de prendre en compte les effets faiblement non linéaires au 3$^{\text{ème}}$ ordre en puissance de $|x_i - x_{i-1}|/\delta_0 \ll 1$, c.-à-d. jusqu'à $n = 3$. En effet, en considérant des excitations semi-discrètes [9], Flytzanis *et al.* [115] ont montré que l'amplitude du fondamental obéit à l'équation de Schrödinger non linéaire (SNL). SNL est une équation aux dérivées partielles, intégrable à une dimension, qui possède des solutions de type *soliton* (voir la définition dans le § (IV.1)). L'évolution de telles solutions dans la limite fortement discrète [10] est un sujet de débat actuel [116, 117], d'autant plus que le système d'équations différentielles sous-jacent, lui, n'est pas intégrable. La catégorie de solutions de SNL pour notre problème est appelée « soliton trou » ou « soliton noir [11] » [118] en optique, car il correspond à un creux d'amplitude dans l'onde porteuse, accompagné d'une variation de phase. Cependant, il semble difficile d'obtenir expérimentalement de tels solitons car cela imposerait de construire un émetteur qui devrait envoyer un signal de forte amplitude avec une modulation importante. La première condition suppose que l'on soit à une résonance et la deuxième que l'amortissement de l'émetteur soit suffisant pour qu'un transitoire ne subisse pas de déformation. Ces propriétés sont en un certain sens contradictoires et un bon compromis semble difficile à atteindre.

Enfin, terminons ce paragraphe en signalant quelle forme générale prend l'équation régissant la dynamique de la chaîne dans le cas où aucune approximation n'est faite. En faisant les changements de variables

$$u_i(t) = \delta_0 i - x_i(t) \qquad \text{et} \qquad \theta = t\sqrt{\frac{k}{m}}\ , \tag{IV.5}$$

les Eqs. (IV.3) s'écrivent alors

$$\frac{d^2 u_i}{d\theta^2} = [u_i - u_{i-1}]^p - [u_{i+1} - u_i]^p \qquad \text{avec } p = 3/2\ , \quad \forall\ 2 \leq i \leq N-1\ , \tag{IV.6}$$

où u_i représente maintenant le déplacement *absolu* (ou *total*) du centre de la $i^{ème}$ masse par rapport à sa position qu'elle aurait si la chaîne n'était soumise à aucune force statique. Les Eqs. (IV.6) ont été trouvées sans aucune approximation et constituent le système d'équations

7. Ces problèmes concernent l'étude des propriétés dynamiques d'un réseau discret avec un potentiel d'interaction entre plus proches voisins comprenant un terme harmonique et des termes anharmoniques.

8. Ces modes impliquent typiquement quelques sites du réseau (~ 3) et peuvent posséder des fréquences supérieures à la fréquence de coupure des phonons.

9. Le mouvement du centre de la $i^{ème}$ masse résulte de la modulation lentement variable en espace et en temps d'une phase discrète, variant à l'échelle d'une maille du réseau.

10. Par exemple, pour un « soliton gris », les effets de discretisation sont atteints facilement car plus son amplitude est grande, plus il est étroit.

11. Le soliton noir est un type de « solitons gris » dont l'amplitude est exactement nulle au centre du soliton.

exactes de départ de notre problème. Le membre de droite des Eqs. (IV.6) ne contient aucun terme linéaire, ce qui est atypique des équations décrivant les systèmes mécaniques. Cependant, de nombreuses situations aboutissent à ce type d'équation avec p entier : par exemple, $p = 3$, pour un écoulement d'un mélange successif de liquide et de gaz [12] ne réagissant pas chimiquement entre eux [119, 120] ou pour une chaîne de masses, reliées par des ressorts linéaires, ne pouvant se mouvoir que dans la direction transversale [120, 121]. En restant dans le domaine discret spatialement, ces équations, avec $p > 1$ entier, peuvent se ramener au problème FPU (voir ci–dessus), tandis que pour un exposant p non entier, les Eqs. (IV.6) ne sont pas intégrables. Bien évidemment, ce type d'équation se prête fort bien au passage à la limite continue quelque soit p entier [122] ou non entier [123, 124].

IV.4 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est représenté sur la Fig. (IV-3). Le système étudié est une chaîne de 51 billes identiques en acier inoxydable [13], chacune de 8 mm de diamètre et de rugosité maximum $0,06$ μm. La tolérance sur le diamètre et la sphéricité de chaque bille est respectivement ± 4 μm et ± 2 μm. Les propriétés physiques de ces billes se trouvent dans le tableau p. 16. La chaîne de billes est confinée à l'intérieur d'un bâti en Teflon [14], matériau possédant une densité élevée et un module d'Young faible (*cf.* le tableau p. 16). Ces deux propriétés conduisent à ce que la vitesse du son à l'intérieur du Teflon soit très inférieure à la vitesse des ondes linéaires ou non linéaires observées expérimentalement [15] au § (IV.5) et (IV.7). L'observation des ondes se propageant à l'intérieur de la chaîne de billes n'est donc pas perturbée par des ondes qui se propageraient plus rapidement à l'intérieur du bâti. Par ailleurs, les propriétés autolubrifiantes du Teflon permettent de diminuer une des causes éventuelles de dissipation. Ce bâti en Teflon est constitué de deux parties, chacune de 30 mm de haut, 40 mm de large et 400 mm de long. La partie inférieure possède à sa surface une gorge rectiligne de section carrée de 8 mm de côté qui contient les billes. La force statique F_0 est mesurée à l'aide d'un dynamomètre FD117 dans la gamme 0–170 N avec une précision de ± 2 N.

Trois capteurs de force dynamique Dytran 1050V3, de sensibilité $11,2$ mV/N, sont maintenus, perpendiculairement à l'axe de la chaîne à l'aplomb de la $6^{ème}$, $26^{ème}$ et $46^{ème}$ bille. Ce dispositif permet de mesurer la vitesse de l'onde par temps de vol, mais ne donne pas accès au profil de l'onde. En effet, chaque capteur est sensible à la déformation *transverse* [16] de la bille qui est reliée, de façon relativement compliquée, à la force exercée sur la bille par ses deux voisines dans la direction de propagation de l'onde (voir la Ref. [125]). En outre, chaque capteur n'est sensible qu'à des variations dynamiques. Le profil de l'onde est obtenu à l'aide d'un quatrième capteur de force dynamique Dytran 1050V4, de sensibilité $2,2$ mV/N, plaçé à l'une des extrémités de la chaîne paralèllement à son axe. Dans cette configuration, la force mesurée par ce capteur est reliée, d'une manière assez simple, à l'onde de déformation qui se propage le long de la chaîne (voir l'Eq. (IV.36)). Tous les capteurs sont des

12. Le gaz étant près du point critique thermodynamique.

13. Cet acier inoxydable AFNOR de norme Z 100 C 17 est un alliage constitué de 16 à 18% de chrome, plus de 1% de manganèse, de silicium et de carbone et $0,4$ à $0,7$% de molybdène.

14. Le Teflon est le nom de marque du PTFE (PolyTétraFluoroEthylène).

15. La vitesse de ces ondes est supérieure à 500 m/s tandis que la vitesse du son dans le Teflon est environ de 430 m/s.

16. Perpendiculairement à la direction de propagation de l'onde.

transducteurs piézoélectriques à amplificateur de charge intégré, nécessitant seulement une alimentation électrique stabilisée. Comme le montre la Fig. (IV-3), les capteurs sont reliés à un oscilloscope digital Tektronix TDS420, approprié pour l'observation d'impulsions non répétitives. Les signaux issus des capteurs de force peuvent être transférés sur un ordinateur pour des analyses supplémentaires permettant par exemple de comparer le profil expérimental de l'onde avec le profil théorique (voir le § (IV.7)).

Les trois capteurs perpendiculaires à l'axe de la chaîne sont vissés à l'intérieur de supports en laiton. Nous pouvons contrôler le couple de serrage à l'aide d'une clé dynamométrique Facom R305DA [17]. Le dernier capteur est centré sur l'axe de la chaîne, sa surface de contact étant normale à cet axe. Il est vissé à l'intérieur d'un cylindre massif de laiton de la même façon que précédemment. En outre, ce cylindre en laiton est guidé le long de l'axe de la chaîne, afin de permettre le déplacement du capteur de force, requis pour imposer la force statique. Le dynamomètre peut alors comprimer le cylindre afin d'exercer une force longitudinale F_0 sur la chaîne. Cette pression n'est cependant pas permanente et peut être interrompue si aucune force statique n'est nécessaire. Ce dispositif, de même que celui permettant le déplacement de l'émetteur dans trois directions perpendiculaires, n'est pas représenté sur la Fig. (IV-3).

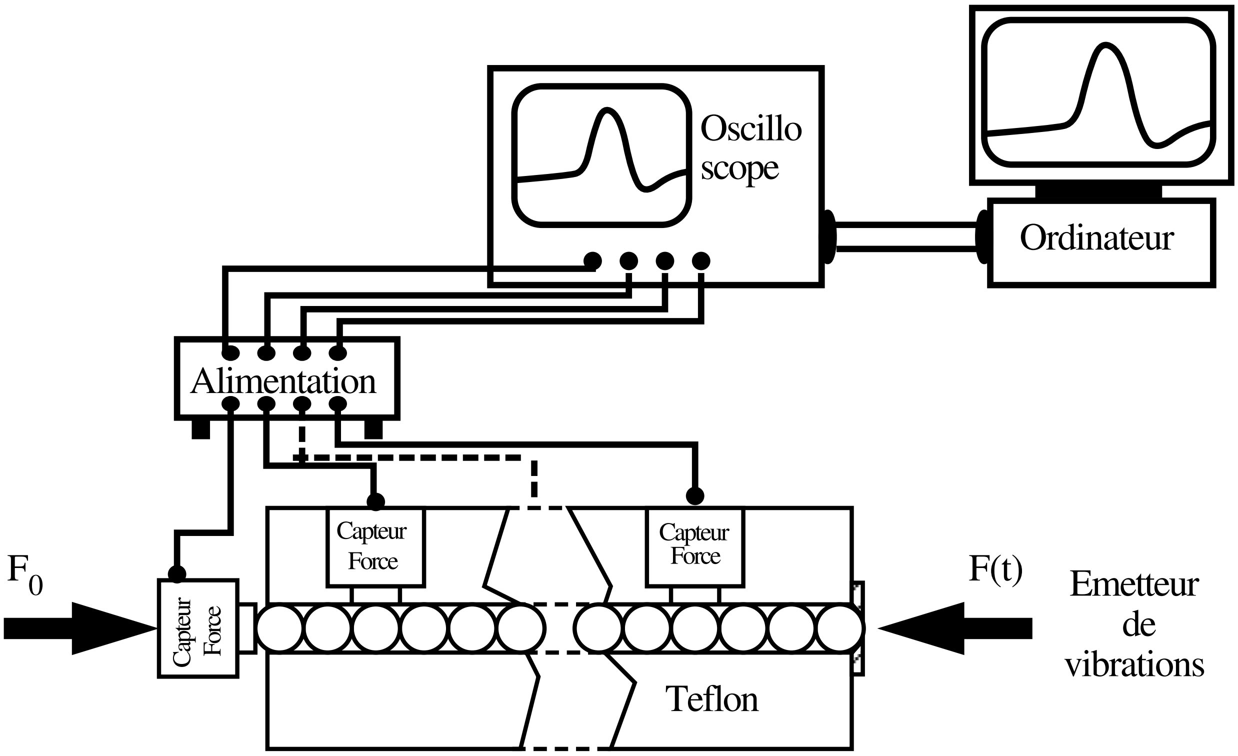


FIG. IV-3 – *Schéma du dispositif expérimental. L'échelle n'est pas respectée. Seulement deux des capteurs plaçés perpendiculairement à la chaîne ont été représentés. Deux appareils mécaniques, qui n'apparaissent pas sur ce schéma, permettent un déplacement de l'émetteur de vibration dans trois directions perpendiculaires ainsi qu'un déplacement longitudinal (c.-à-d. parallèle à l'axe de la chaîne) du dynamomètre. Voir le corps du texte et la Fig. (IV-4) pour la description des différents émetteurs utilisés.*

17. La gamme d'utilisation de cette clé est de 5 à 25 $N \times m$ et est graduée tous les $0,1$ $N \times m$.

L'émetteur est constitué, en régime linéaire, par une céramique piézoélectrique[18], tandis que nous avons construit un émetteur à impact pour obtenir des ondes de grandes amplitudes. Les céramiques utilisées (P1 89 de Quartz et Silice) sont des plaques en titanate–zirconate de plomb de 50×50 mm, d'épaisseur 13 mm et ont une fréquence de résonance de 150 kHz environ. Afin d'envoyer dans la chaîne de billes des ondes de compression de grande amplitude, nous avons construit un émetteur à impact qui est schématisé sur la Fig. (IV-4). Une bille placée à l'intérieur d'un cylindre en duralumin se déplace librement entre la première bille de la chaîne et un piston en duralumin solidaire d'un vibreur électromagnétique Brüel & Kjær 4809. L'alésage du cylindre a été soigneusement ajusté et un orifice a été percé dans le cylindre pour évacuer l'air et ainsi réduire le frottement de l'air sur la bille, au cours de son mouvement. Lorsque le piston oscille, la bille mobile entre en collision successivement avec le piston et la première bille de la chaîne. Lorsque la longueur ζ, que parcourt la bille mobile entre deux collisions successives, est de quelques millimètres[19] et la fréquence de vibration du piston est comprise entre 70 et 110 Hz, il y a un accrochage entre le mouvement de la bille et celui du piston : la bille mobile oscille indéfiniment entrant en collision avec la première bille de la chaîne à chaque période du vibreur. Pour d'autres conditions, les mouvements de la bille sont en général désordonnés et chaotiques.

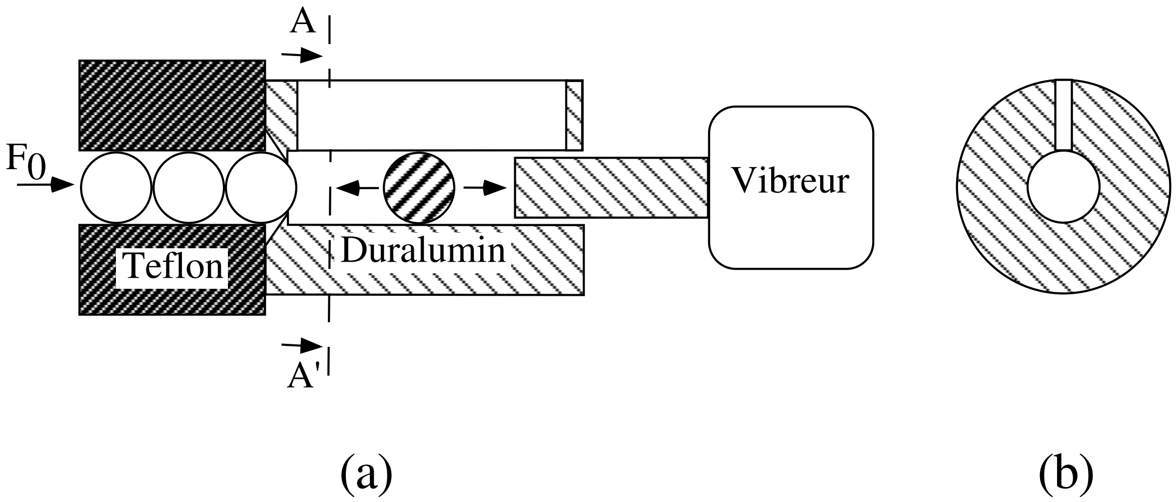


FIG. IV-4 – *(a) Schéma de l'émetteur à impact. La bille impactante (voir le Tab. (IV.1) pour ses caractéristiques) se déplace librement, à l'intérieur d'un cylindre creux en duralumin, entre la première bille de la chaîne et un piston animé d'un mouvement sinusoïdal par un vibreur électromagnétique. (b) Section transverse du cylindre le long du plan AA' normal à son axe. Ce dessin souligne la présence d'un orifice permettant une rapide évacuation d'air et ainsi de réduire considérablement le frottement de l'air sur la bille. En régime permanent, cet appareil envoie périodiquement dans la chaîne de billes des impulsions non linéaires quasiment identiques avec une période correspondant à celle du mouvement du piston.*

18. Découvert en 1880 sur le quartz, par les frères Curie, l'effet piézoélectrique direct est la propriété que présentent certains corps de se charger électriquement lorsqu'ils sont soumis à une contrainte mécanique. Lippmann prévoit, en 1881, l'effet inverse : un champ électrique provoque une déformation mécanique du matériau (dilatation ou contraction selon le sens du champ).

19. $4 \leq \zeta \leq 10$ mm, pour une bille en carbure de tungstène de 8 mm de diamètre.

Puisque la durée de collision est très courte[20], typiquement 50 μs, une grande quantité de mouvement peut être transférée à la chaîne de billes, jusqu'à 1200 N pour l'amplitude maximale de l'onde (voir le § (IV.7)). En régime permanent, la période des collisions successives est la même que celle des oscillations du piston. Elle est beaucoup plus grande que la durée d'une collision et que le temps mis par l'onde pour voyager jusqu'à l'autre extrémité de la chaîne, qui ne dépasse pas 1 ms dans le cas le plus défavorable. L'onde est ainsi complètement amortie, entre deux impacts successifs, principalement à cause du très faible cœfficient de réflexion au début de la chaîne[21]. Par conséquent, deux impulsions consécutives n'interagissent pas. La quantité de mouvement transférée au cours de l'impact croît avec l'amplitude des oscillations du piston, leur fréquence, la distance ζ parcourue par la bille mobile, les cœfficients de restitution pour les deux impacts ressentis par la bille mobile et la densité du matériau constituant cette dernière. Bien que strictement empirique, un choix judicieux de ces paramètres permet d'obtenir l'amplitude désirée de l'excitation que l'on voudrait faire propager à l'intérieur de la chaîne de billes. Dans la plupart des cas, la bille mobile utilisée est une bille en carbure de tungstène, de 8 mm de diamètre et de masse 4 g, possédant un cœfficient de restitution élevé. Cependant, nous avons utilisé d'autre billes impactantes dont leurs caractéristiques sont regroupées dans le Tab. (IV.1).

Matériau	Diamètre (mm)	Masse (g)
Carbure de tungstène	8	$3,91$
Carbure de tungstène	12	$13,54$
Bronze	8	$2,33$
Acier Inoxydable	8	$2,05$
Duralumin	8	$0,71$

TAB. IV.1 – *Caractéristiques des différentes billes impactantes utilisées au cours des expériences. Les matériaux constituants les billes sont énumérés par ordre (qualitativement) décroissant de leur cœfficient de restitution. La bille en carbure de tungstène de 8 mm de diamètre est la plus fréquemment utilisée. Cette diversité de billes impactantes permet d'envoyer dans la chaîne de billes des excitations d'amplitude très variée.*

IV.5 Approximation linéaire : « le vide sonique »

IV.5.1 Analyse théorique du régime linéaire

On suppose que le déplacement relatif dynamique, $|x_i - x_{i-1}|$, est très inférieur au déplacement statique, δ_0, c.-à-d. que $|x_i - x_{i-1}|/\delta_0 \ll 1$. Chaque terme du membre de droite des

20. Cette durée est cependant suffisamment importante pour que l'approximation quasi-statique reste valable (voir le § (IV.2)).

21. En effet, la première bille de la chaîne est en contact avec l'air, milieu d'impédance acoustique très différente de celle de l'acier. Par contre à l'autre extrémité de la chaîne, le cœfficient de reflexion est très grand. C'est, par conséquent, le second aller–retour qui n'a pas lieu.

Eqs. (IV.3) s'écrit alors, en utilisant un développement limité,

$$\left(1-\frac{x_i-x_{i-1}}{\delta_0}\right)^{3/2}=\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{x_i-x_{i-1}}{\delta_0}\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{x_i-x_{i-1}}{\delta_0}\right)^2+\ldots\right] \quad \forall\ 2\leq i\leq N-1\ . \tag{IV.7}$$

En ne tenant compte que des termes linéaires en x_i et en négligeant les termes d'ordres supérieurs, les Eqs. (IV.3) se réduisent à

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{\mathcal{K}}{m}\left(x_{i+1}+x_{i-1}-2x_i\right) \quad \text{avec } \mathcal{K}=\frac{3}{2}k\sqrt{\delta_0} \quad \forall\ 2\leq i\leq N-1\ , \tag{IV.8}$$

qui est l'équation habituelle d'une chaîne de masses ponctuelles identiques reliées par des ressorts linéaires identiques de raideur $\mathcal{K}$. En utilisant l'Eq. (IV.1), on note que cette raideur dépend de la force de compression statique F_0 et que de plus,

$$\mathcal{K}=\left(\frac{\partial\delta_0}{\partial F_0}\right)^{-1}\ . \tag{IV.9}$$

En utilisant les notations complexes et en cherchant des solutions de l'Eq. (IV.8) sous formes d'ondes propagatives du type

$$x_i=Ae^{j(2Riq-\omega t)}+\ c.c.\quad , \tag{IV.10}$$

où $j^2\equiv -1$, *c.c.* désigne le complexe conjugué du 1$^{\text{er}}$ terme et A l'amplitude de l'onde de pulsation ω et de nombre d'onde q, on retrouve la relation de dispersion habituelle, en reportant l'Eq. (IV.10) dans l'Eq. (IV.8),

$$\omega=2\sqrt{\frac{\mathcal{K}}{m}}|\sin Rq|\quad . \tag{IV.11}$$

La variation de ω en fonction de q est représentée sur la Fig. (IV-5)

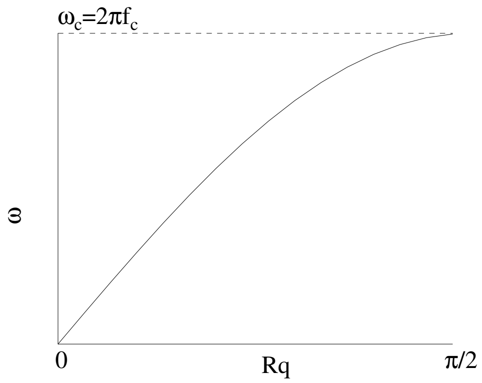


FIG. IV-5 – *ω en fonction de Rq. La région où $q\ll 1/R$ soit $\lambda\gg R$ correspond à l'approximation continue et dans ce cas $\omega=qc_s$. ω_c désigne la pulsation de coupure du réseau et $\lambda\equiv 1/q$, la longueur d'onde.*

On déduit de l'Eq. (IV.11) et de la Fig. (IV-5), la fréquence de coupure f_c du réseau, au-delà de laquelle une onde de fréquence $f > f_c$ ne se propage plus,

$$f_c = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mathcal{K}}{m}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{3}{2m}}k^{1/3}F_0^{1/6} \quad . \tag{IV.12}$$

En outre, on déduit de l'Eq. (IV.11) la vitesse de propagation des ondes de grande longueur d'onde, c.-à-d. la vitesse du son c_s dans le réseau[22],

$$c_s \equiv \lim_{q\to 0}\frac{\omega}{q} = 2R\sqrt{\frac{\mathcal{K}}{m}} = \sqrt{\frac{6}{m}}Rk^{1/3}F_0^{1/6} \quad . \tag{IV.13}$$

On notera que la vitesse du son c_s et la fréquence de coupure f_c dépendent toutes deux de la compression statique comme $F_0^{1/6}$. Le résultat simple de l'Eq. (IV.13), bien que déjà connu (voir par exemple la Ref. [86]), fait apparaître un phénomène remarquable pour $F_0 = 0$: la vitesse du son s'annule, et par conséquent, les ondes acoustiques linéaires ne se propagent plus dans le système! Nesterenko [76] appelle ce régime celui du « vide sonique » (sonic vacuum). Cependant, il a montré que des ondes fortement non linéaires peuvent se propager dans le système, même lorsque les billes sont en contact, mais ne sont soumises à aucune force statique, c.-à-d. lorsque $F_0 = 0\ N$. Nous reviendrons sur ce phénomène au § (IV.6).

IV.5.2 Résultats expérimentaux en régime linéaire

La figure (IV-6) présente les résultats sur l'évolution de la fréquence de coupure (Figs. (IV-6a) et (IV-6c), voir l'Eq. (IV.12)) et de la vitesse du son (Figs. (IV-6b) et (IV-6d), voir l'Eq. (IV.13)) avec la force statique appliquée. Pour les billes d'acier utilisées dans l'expérience, si F_0 est exprimée en N, les valeurs théoriques sont, d'après les Eqs. (IV.12), (IV.13) et le tableau p. 16, $f_c = 16,2 \times F_0^{1/6}\ kHz$ et $c_s = 408 \times F_0^{1/6}\ m/s$. L'accord théorie/expérience est excellent, ce qui n'est pas surprenant mais constitue un test de notre dispositif expérimental. Un deuxième test est de remplacer toutes les billes en acier de la chaîne par des billes en verre. Pour ces billes, les valeurs théoriques sont, d'après les Eqs. (IV.12), (IV.13) et le tableau p. 16, $f_c = 18,8 \times F_0^{1/6}\ kHz$ et $c_s = 472 \times F_0^{1/6}\ m/s$.

Les mesures de vitesses ont été effectuées par la méthode dite « de temps de vol ». Le signal envoyé par le générateur de fonction[23] à la céramique piézoélectrique est un train d'ondes de 5 oscillations, chacune de fréquence 10 kHz, à comparer à la fréquence de coupure la plus basse (pour $F_0 = 1\ N$) de 16 kHz. Ces signaux sont envoyés tous les 100 ms. Le temps mis par l'onde pour voyager jusqu'à l'autre extrémité de la chaîne étant au minimum 5 ms, pour $F_0 = 1\ N$, l'onde est complètement amortie entre l'émission de deux trains d'onde successifs. Par conséquent, deux trains d'onde consécutifs n'interagissent pas. Comme le signal envoyé est un paquet d'ondes d'extension en fréquence non négligeable, il se peut que l'émetteur ne réponde à cette excitation qu'en ne propageant certaines fréquences, majoritairement celles proches des résonances de la céramique. Il est donc préférable d'exciter la céramique avec un signal possédant des variations temporelles moins brutales, c.-à-d. un train d'ondes obtenu

22. Cette vitesse du son c_s dans le réseau ne doit pas être confondue avec la vitesse des ondes acoustiques longitudinales c_l dans le matériau constituant les billes.

23. Le générateur de fonction est un synthétiseur multifonction HP8904A permettant de créér des formes d'ondes arbitraires.

en modulant une porteuse par une arche de sinusoïde. Ce type d'excitation, de même que la réponse de la céramique, sont représentés sur la Fig. (IV-7).

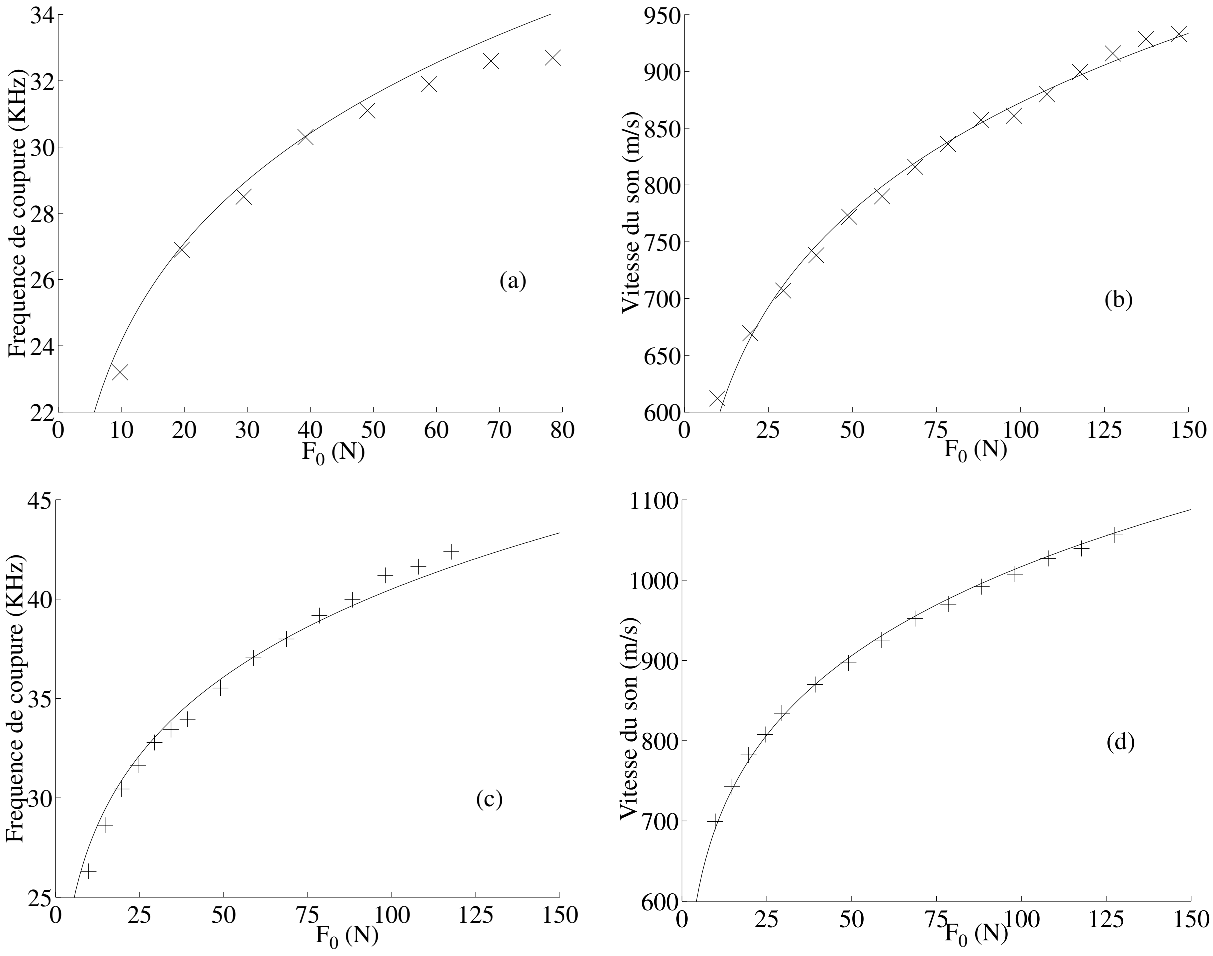


FIG. IV-6 – *(a) Evolution de la fréquence de coupure f_c, en KHz, en fonction de la force statique F_0 appliquée en N, pour un réseau de billes en acier. (b) Evolution de la vitesse du son c_s, en m/s, en fonction de la force statique F_0 appliquée en N, pour un réseau de billes en acier. (c) Même courbe qu'en (a) pour un réseau de billes en verre. (d) Même courbe qu'en (b) pour un réseau de billes en verre. Dans chacun des cas les symboles $\times$, pour l'acier, ou $+$, pour le verre, représentent les points expérimentaux, la courbe en traits pleins la valeur théorique, donnée dans le texte.*

La mesure de la fréquence de coupure du réseau a été réalisée en envoyant à l'intérieur de la chaîne, *via* la céramique piézoélectrique, soit une source de « bruit blanc (BB) » (Random Noise), soit un « balayage sinusoïdal (BS) » (Sweep Sine) fournit par l'analyseur de spectre HP 3562A. La réponse en fréquence du réseau est visualisée sur l'analyseur de spectre et correspond au rapport [24] entre le signal fréquentiel envoyé par l'analyseur et le signal fréquentiel

24. La réponse en fréquence $H(f)$ de deux signaux temporels $a(t)$ et $b(t)$ est définie comme le rapport de l'autospectre $S_{AA}(f) \equiv A^\star(f).A(f)$ du signal temporel $a(t)$ sur le spectre croisé $S_{AB}(f) \equiv A^\star(f).B(f)$ des signaux $a(t)$ et $b(t)$, où $A(f)$ et $B(f)$ sont les transformées de Fourier de $a(t)$ et $b(t)$, et $\star$ indique le complexe

reçu par le capteur en bout de chaîne. L'amplitude ou la phase de la réponse en fréquence permet alors de déterminer la fréquence de coupure f_c. L'analyse, à la fois en BB ou en BS, permet d'obtenir la dépendance attendue de f_c avec $F_0^{1/6}$. Cependant, le cœfficient de proportionnalité entre f_c et $F_0^{1/6}$ est en très bon accord avec la théorie lorsque l'on utilise le bruit BS et est systématiquement supérieur avec le bruit BB. Cela provient du fait que le bruit BB fournit plusieurs fréquences en même temps et que le système répond à ses modes propres en même temps. Il se peut que ces modes propres se couplent entre eux pour que le système réponde en un mode de fréquence supérieure[25]. L'analyse en bruit BS permet de faire une analyse fréquence par fréquence et évite ainsi le couplage entre modes. C'est cette dernière qui a été utilisé pour les courbes des Figs. (IV-6a) et (IV-6c).

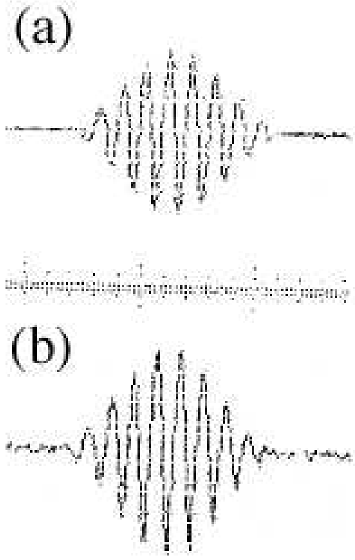


FIG. IV-7 – *(a) Exemple de profil de train d'onde envoyé à la céramique piézoélectrique pour les mesures de vitesse du son dans la chaîne : une porteuse constituée de 10 arches de sinusoïde chacune de fréquence* 10 kHz *est modulée par une arche de sinusoïde de fréquence* 1 kHz. *(b) Réponse de la céramique à l'excitation représenté en (a). Sur les deux figures, les échelles de temps en abscisse sont identiques, les échelles d'amplitude en ordonnée étant différentes.*

Enfin, il est connu que lorsqu'une onde plane arrive dans un milieu où elle ne peut se propager, elle est absorbée sur une distance finie L : c'est la « distance d'absorption » ou la « longueur de pénétration » (voir l'annexe E). Si L est de l'ordre de la taille de l'expérience, la fréquence de coupure mesurée apparaît alors plus grande que la fréquence de coupure réelle du milieu. Cependant, comme il l'est montré dans l'annexe E, lorsque L est de l'ordre de 40 cm, cet effet est négligeable puisque la fréquence de coupure réelle du milieu apparaît augmenter de 2 Hz seulement.

conjugué.

25. Par exemple, par couplage non linéaire de deux modes.

IV.6 Approximation fortement non linéaire : les ondes solitaires

IV.6.1 Analyse théorique de Nesterenko

Le comportement du système dans la limite fortement non linéaire a été étudié théoriquement par Nesterenko [76]. Par souci de clarté et de références ultérieures à certaines de ses équations, nous résumons ci–dessous son analyse qui se trouve dans la Ref. [76]. De plus, les passages « obscurs » de son article sont développés en détail ici, de même que certaines conclusions qui n'apparaissent pas dans la Ref. [76].

Le limite fortement non linéaire des Eqs. (IV.3) correspond au cas où le déplacement relatif dynamique, $|x_i - x_{i-1}|$, est très supérieur au déplacement statique, δ_0, c.-à-d. que $|x_i - x_{i-1}|/\delta_0 \gg 1$. Pour alléger les notations, les équations (IV.3) s'écrivent

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{k}{m}\left[(x_{i-1} - x_i)^{3/2} - (x_i - x_{i+1})^{3/2}\right] \qquad \forall\, 2 \leq i \leq N-1 \ . \tag{IV.14}$$

où x_i représente maintenant le déplacement *total*[26] du centre de la $i^{ème}$ bille par rapport à la position qu'il occuperait si la chaîne n'était soumise à aucune force statique. Comme il l'a été souligné dans le § (IV.3), ce type d'équation ne peut être résolue analytiquement en tenant compte *à la fois* des effets non linéaires et du caractère discret du réseau. Dans ce paragraphe, on s'intéresse principalement aux effets fortement non linéaires et il est par conséquent nécessaire pour la suite de l'analyse de se placer dans une approximation de type continue. Dans la limite continue, lorsque la taille caractéristique Λ des perturbations est supposée très supérieure au rayon R d'une bille, on peut écrire

$$\begin{cases} x_i(t) = x(2Ri, t) = x(l, t) \ , \\ x_{i\pm1}(t) = x(2R(i \pm 1), t) = x(l \pm 2R, t) \ , \end{cases} \tag{IV.15}$$

où l représente l'abscisse le long de la chaîne, c.-à-d. la variable spatiale qui est maintenant une variable continue. Il existe donc quatre échelles spatiales pour ce problème : $\Lambda \gg l \sim R \gg x \gg \delta_0$. L'approximation fortement non linéaire signifie alors que $|\partial x/\partial l| \gg \delta_0/(2R)$. x représente maintenant le déplacement *total*[27] du centre de la bille par rapport à la position l qu'il occuperait si la chaîne n'était soumise à aucune force statique. Utilisons le développement de Taylor,

$$x_{i\pm1}(t) = x(l \pm 2R, t) = x \pm 2R\frac{\partial x}{\partial l} + 2R^2\frac{\partial^2 x}{\partial l^2} \pm \frac{4R^3}{3}\frac{\partial^3 x}{\partial l^3} + \frac{2R^4}{3}\frac{\partial^4 x}{\partial l^4} + \dots \ , \tag{IV.16}$$

où $x \equiv x(l,t)$. On posera, dans la suite, $x_l \equiv (\partial x/\partial l)$ et $x_t \equiv (\partial x/\partial t)$ pour alléger les expressions. En insérant ce développement dans l'Eq. (IV.14) et en utilisant le développement limité

$$(1 + \mathcal{X})^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}\mathcal{X} + \frac{3}{8}\mathcal{X}^2 - \frac{1}{16}\mathcal{X}^3 + \dots \quad \text{avec } \mathcal{X} \ll 1 \ , \tag{IV.17}$$

26. Y compris le déplacement dû à la déformation statique.
27. Y compris le déplacement dû à la déformation statique.

on obtient alors

$$x_{tt} = \mathcal{C}^2 \left[\frac{3}{2} x_{ll} \sqrt{-x_l} + \frac{R^2}{2} x_{llll} \sqrt{-x_l} - \frac{R^2 x_{ll} x_{lll}}{2\sqrt{-x_l}} - \frac{R^2}{16} \frac{(x_{ll})^3}{(-x_l)^{3/2}} \right] , \qquad \text{(IV.18a)}$$

$$-x_l > 0 , \qquad \mathcal{C}^2 \equiv \frac{k}{m}(2R)^{5/2} . \qquad \text{(IV.18b)}$$

Les trois derniers termes du membre de droite de l'Eq. (IV.18a) sont d'ordre $(R/\Lambda)^2$ par rapport au premier et les termes d'ordre supérieur ont été omis.

On cherche des solutions en ondes progressives de vitesse V, qui sont donc de la forme $x(\xi \equiv l - Vt)$, où V reste à déterminer ; en posant $\psi \equiv -x_l = -x_\xi$ et en se plaçant dans le référentiel de l'onde, on obtient, à partir de l'Eq. (IV.18),

$$\frac{V^2}{\mathcal{C}^2} \psi_\xi = \frac{3}{2} \psi_\xi \sqrt{\psi} + \frac{R^2}{2} \frac{(\psi \psi_{\xi\xi})_\xi}{\sqrt{\psi}} - \frac{R^2}{16} \frac{\psi_\xi^3}{\psi^{3/2}} . \qquad \text{(IV.19)}$$

En effectuant le changement de variable

$$\psi = z^{4/5} , \qquad \text{(IV.20)}$$

le dernier terme du membre de droite de l'Eq. (IV.19) s'élimine, et l'Eq. (IV.19) se met sous la forme

$$\frac{V^2}{\mathcal{C}^2} \underbrace{\frac{z_\xi}{z^{\frac{1}{5}}}}_{\left(\frac{5}{4}\right)\left(z^{\frac{4}{5}}\right)_\xi} = \frac{3}{2} \underbrace{z^{\frac{1}{5}} z_\xi}_{\left(\frac{5}{6}\right)\left(z^{\frac{6}{5}}\right)_\xi} + \frac{R^2}{2} \underbrace{\left(\frac{1}{5} \frac{z_\xi z_{\xi\xi}}{z^{\frac{4}{5}}} + z^{\frac{1}{5}} z_{\xi\xi\xi} \right)}_{\left(z^{\frac{1}{5}} z_{\xi\xi}\right)_\xi} \qquad \text{(IV.21)}$$

Chaque terme peut ainsi s'intégrer une fois par rapport à ξ et l'équation peut se mettre sous forme adimensionnée en posant

$$z = \left(\frac{V}{\mathcal{C}} \right)^5 y \qquad , \qquad \xi = \sqrt{\frac{2}{5}} R \eta \quad , \qquad \text{(IV.22)}$$

et le résultat final s'écrit alors de façon particulièrement simple

$$y_{\eta\eta} = -\frac{d}{dy} W(y) , \qquad \text{avec} \quad W(y) = -\frac{5}{8} y^{8/5} + \frac{1}{2} y^2 + D y^{4/5} \quad \text{et} \quad y > 0, \qquad \text{(IV.23)}$$

où D est une constante d'intégration qui est fixée par les valeurs du champ $\psi(\xi)$ et de sa dérivée pour $\xi \to \pm\infty$. Par la suite, nous verrons que si l'on cherche des solutions localisées, les conditions aux limites du problème seront telles que $0 < D < 5/27$. En multipliant les deux membres de l'Eq. (IV.23) par y_η et en intégrant par rapport à η, l'équation devient

$$\frac{1}{2} y_\eta^2 + W(y) = E_t , \qquad \text{(IV.24)}$$

où E_t est une autre constante d'intégration.

Afin de connaître les solutions générales de l'Eq. (IV.23), il est préalablement nécessaire de déterminer les positions d'équilibre de $W(y)$ tels que $y_{\eta\eta} = 0$, c.-à-d. les extrema de $W(y)$ en annulant sa dérivée première. L'étude du signe de la dérivée seconde de $W(y)$ en ces points permet alors de connaître leur stabilité, c.-à-d. si ce sont des maxima ou des minima. Une telle étude est résumée dans le Tab. (IV.2) tandis que la Fig. (IV-8) montre l'allure de la fonction $W(y)$ pour différentes valeurs de D.

Valeur de D	$-\infty$	0		$5/27$	$+\infty$
Extrema de $W(y)$	1 minimum	1 minimum 1 pt sing.	1 minimum 1 maximum	1 pt inflex.	0 extremum
Solution bornée de l'Eq. (IV.23)	ONLP pour $E_t < 0$		ONLP/OS	0 solutions bornées	

TAB. IV.2 – *Etude des extrema et des solutions bornées de l'Eq. (IV.23) en fonction de la valeur du paramètre D. ONLP signifie Ondes Non Linéaires Périodiques et OS Ondes Solitaires. Un point est dit singulier si la dérivée seconde de $W(y)$ en ce point n'est pas définie. Un point d'inflexion est un point où la dérivée première de $W(y)$ s'annule sans changer de signe.*

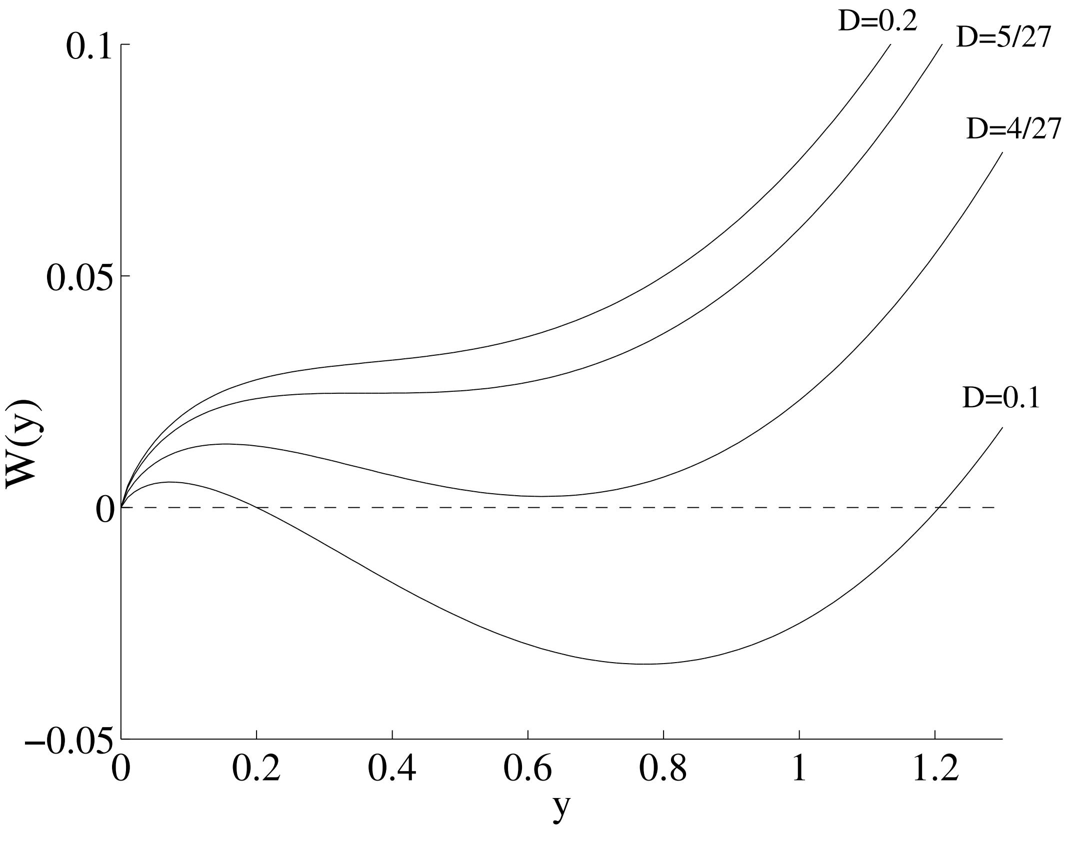


FIG. IV-8 – *Allure de la fonction $W(y)$ d'Eq. (IV.23) pour différentes valeurs de D. Les valeurs de D sont repectivement pour les courbes de bas en haut $D = 0,1$; $4/27$; $5/27$ et $0,2$. Pour $D = 5/27$, le minimum et le maximum coincident.*

Une analogie mécanique[28] du problème de propagation d'onde apparaît alors manifestement et permet de comprendre qualitativement l'apparition de solutions ondes solitaires. L'équation (IV.23) est en effet l'équation du mouvement d'une particule ponctuelle de masse unité, de « position » y, soumise à une force dérivant du « potentiel » $W(y)$, η jouant le rôle du temps. Pour $0 < D < 5/27$, $W(y)$ présente deux *extrema*, le maximum étant à la position $y_\infty > 0$ et le minimum à la position $y_- > y_\infty$. Pour ces valeurs de D, la courbe $W(y)$ à la forme représentée sur la Fig. (IV-10a). La forme de l'énergie potentielle $W(y)$ au voisinage de y_∞ fait que, dans le cadre de l'analogie mécanique, la particule met un « temps » infini pour tomber du point y_∞ si son « énergie » est $E_t = E_\infty$. La trajectoire partant et aboutissant en y_∞ est parcourue une seule fois lorsque le « temps » décrit un intervalle complet $-\infty < \eta < \infty$, ce qui correspond dans le contexte des ondes à une solution de type onde solitaire (voir la Fig. (IV-10c)). Ainsi, d'après cette analyse, l'abscisse y_∞ du maximum du potentiel est la valeur prise par y lorsque $\eta \to \pm\infty$. Ainsi, l'onde solitaire a une amplitude y_∞ à $\eta \to \pm\infty$ et une amplitude maximale y_m définie par

$$W(y_m) = W(y_\infty) \quad . \tag{IV.25}$$

En reprenant ce type d'analyse pour $D < 0$ et $D > 5/27$ et aux vues des « potentiels » tracés sur la Fig. (IV-8), on obtient les solutions possibles de l'Eq. (IV.23) pour ces valeurs de D. Les solutions bornées de cette équation, issues de l'analogie mécanique, sont alors regroupées dans le Tab. (IV.2) en fonction de la valeur de D. Nous nous focaliserons dans la suite au cas des solutions localisées de type onde solitaire, c.-à-d. avec les conditions aux limites suivantes : pour $\xi \to \pm\infty$, la valeur des champs ψ et ψ_ξ sont tels que $\psi \to \psi_\infty$ et $\psi_\xi \to 0$. Ces conditions impliquent alors d'avoir D tel que $0 < D < 5/27$.

Lorsque l'on cherche les solutions non nulles de l'équation $dW(y)/dy = 0$, il est facile de voir qu'en posant $\mathcal{X} = y^{2/5}$, cette équation se ramène à une équation polynomiale du 3ème degré en $\mathcal{X}$. Pour $0 < D < 5/27$, toutes les racines sont réelles distinctes. En revenant à la variable d'origine y, une des solutions devient imaginaire, et les deux autres donnent alors les expressions analytiques du minimum y_- et du maximum y_∞ de $W(y)$ en fonction de D

$$y_\infty = \left(\frac{3D}{5}\right)^{5/4} \left[\cos\left(\frac{\Theta}{3}\right)\right]^{-5/2} \quad , \tag{IV.26a}$$

$$y_- = \left(\frac{3D}{5}\right)^{5/4} \left[\cos\left(\frac{\Theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)\right]^{-5/2} \quad , \tag{IV.26b}$$

$$\text{avec} \qquad \cos\Theta \equiv -\sqrt{\frac{27D}{5}} \; . \tag{IV.26c}$$

L'évolution de ces extrema en fonction de D est représentée sur la Fig. (IV-9).

28. Ce type d'analogie est extrèmement fécond (voir par exemple le § (II.5)) et donne lieu à une méthode d'analyse des équations aux dérivées partielles non linéaires, la *méthode de l'espace des phases*. Pour plus de détails, on pourra consulter la Ref. [126].

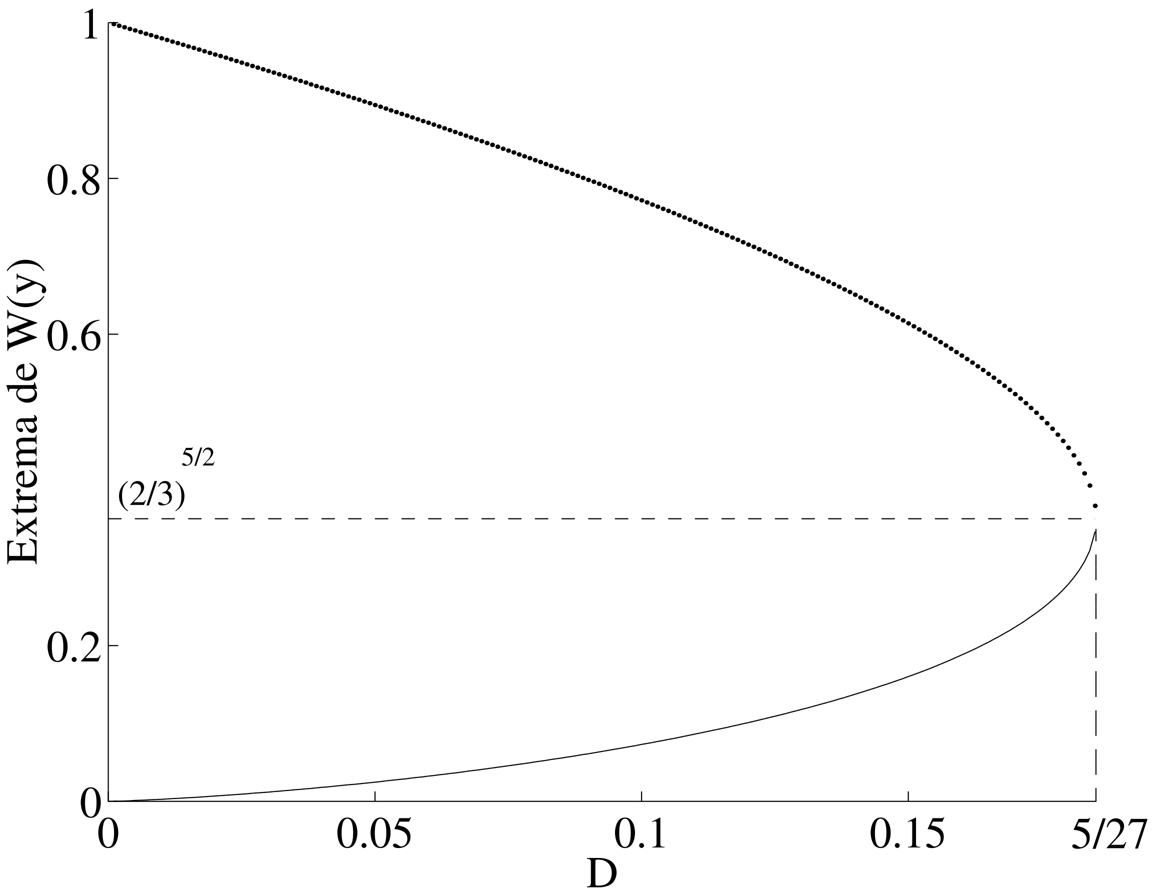


FIG. IV-9 – *Evolution du minimum y_- (en points noirs; Eq. (IV.26b)) et du maximum y_∞ (en traits pleins; Eq. (IV.26a)) de $W(y)$ en fonction de D.*

Fig. IV-10 – *(a) Graphe de la fonction* $W(y)$ *dans le cas* $0 < D < 5/27$*, illustrant l'analogie mécanique entre les solutions de l'Eq. (IV.23) et le mouvement d'une particule de masse unité dans le potentiel* $W(y)$*. Deux mouvements possibles de la « particule » : si son « énergie » est celle du maximum local,* $E_\infty = W(y_\infty)$*, la « particule » va de* y_∞ *à* y_m *telle que* $W(y_m) = W(y_\infty)$ *en un « temps » infini ; cette « trajectoire » correspond à une solution onde solitaire de l'Eq. (IV.23). Si son « énergie » est* $E_p < E_\infty$*, la particule va de* y_{p_1} *à* y_{p_2} *en un « temps » fini ; cette « trajectoire » correspond à une solution de type onde périodique non linéaire de l'Eq. (IV.23). Si* $E_t > E_\infty$*, il n'existe pas de solutions bornées. (b) Représentation des « trajectoires » de (a) dans le plan de phase (« position »* y*, « vitesse »* y_η*) ; la trajectoire qui tourne en un « temps » fini autour de la position d'équilibre stable* y_- *correspond à l'onde périodique non linéaire (courbe en traits pointillés), alors que l'orbite homocline (courbe en traits pleins), qui présente un point anguleux en* y_∞*, correspond à l'onde solitaire. (c) Allure de l'onde solitaire, obtenue par intégration numérique de l'Eq. (IV.23) correspondant au mouvement d'une particule d'énergie* E_∞*. (d) Allure de l'onde périodique non linéaire, obtenue par intégration numérique de l'Eq. (IV.23) correspondant au mouvement d'une particule d'énergie* E_p*. Les paramètres utilisés pour tracer les courbes (a–c) sont* $D = 0,135$ *;* $E_\infty = 0,011$ *(c.-à-d.* $y_\infty = 0,128$ *et* $y_m = 1,007$*), et* $E_p = 0,005$ *(c.-à-d.* $y_{p_1} = 0,311$ *et* $y_{p_2} = 0,947$*).*

Attardons nous maintenant au cas où $D = 0$. Les conclusions ci–dessus concernant l'existence de solution onde solitaire ne sont alors plus valables. En effet, dans ce cas, il existe un point singulier $y_\infty = 0$ et un minimum $y_- = 1$ du potentiel $W(y)$. La stabilité d'un point singulier n'étant pas définie, des solutions ondes solitaires ne peuvent alors exister pour $E_t = E_\infty = 0$. Cependant, il existe pour $E_t = E_\infty = 0$ une solution onde non linéaire périodique dont l'amplitude oscille autour de $y_- = 1$ et est comprise entre $y_\infty = 0$ (son amplitude minimale) et y_m (son amplitude maximale), comme le montre la Fig. (IV-10). En revenant aux variables d'origines ψ et η, il est facile de montrer, à partir de la quadrature de l'Eq. (IV.24) avec $D = E_t = 0$, que l'expression analytique de l'onde non linéaire périodique s'écrit

$$\psi(\xi) = \left[\frac{5}{4}\left(\frac{V}{\mathcal{C}}\right)^2\right]^2 \cos^4\left(\frac{\xi}{R\sqrt{10}}\right) \quad . \tag{IV.27}$$

Cette solution est cependant mathématiquement singulière [29] car elle ne satisfait pas l'inégalité de départ $\psi = -x_l = -x_\xi > 0$ (voir l'Eq. (IV.18b)). En effet, lorsque l'amplitude de l'onde est minimale pour $y_\infty = 0$ (voir la Fig. (IV-10d)), c.-à-d. $\xi = R\sqrt{10}(\pi/2) \mod \pi$, on a d'après l'Eq. (IV.27), $\psi = 0$. Ce cas où $D = 0$ avec $E_t = 0$, c.-à-d. $y_\infty = 0$, correspond physiquement à $F_0 = 0$ (*cf.* le début du § (IV.6.2)). D'un autre côté, il a été montré [127] que ces ondes non linéaires périodiques sont *stables* vis à vis de petites perturbations et ne peuvent alors développer une modulation spontanée d'amplitude, c.-à-d. *l'instabilité modulationnelle*. Ainsi, on peut, peut–être, s'attendre à les observer dans la chaîne de billes.

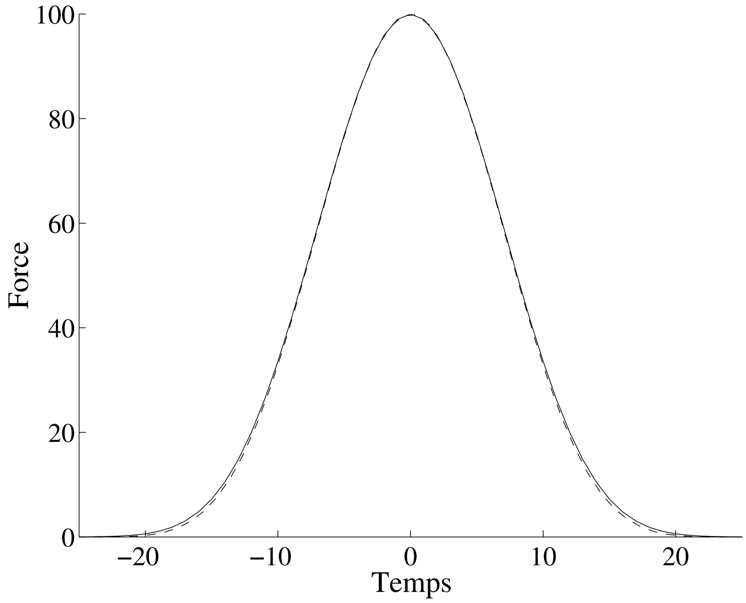


FIG. IV-11 – *Evolution théorique de la force, en N, en fonction du temps, en μs, avec une amplitude maximale de 100 N et pour une force statique, respectivement, de 1 N (courbe en traits pleins; le profil de l'onde solitaire étant déterminé par l'Eq. (IV.39)) et une force statique nulle (courbe en traits pointillés; le profil de l'arche de l'onde non linéaire périodique étant déterminé par l'Eq. (IV.44)). La ressemblance entre ces deux courbes est remarquable. La valeur de 1 N choisie est telle qu'elle corresponde approximativement à la résolution de la force statique délivrée par le dynamomètre (voir § (IV.4)).*

Cependant, expérimentalement, il semble que les ondes solitaires existent aussi lorsqu'il n'y a pas de force statique appliquée à la chaîne de billes (voir la Ref. [77, 99] et le § (IV.7.2)). Il serait, en effet, très surprenant qu'un changement qualitatif survienne soudainement lorsque la force statique atteind sa valeur zéro, puisque les ondes solitaires existent pour une force

29. Des solutions ondes non linéaires périodiques existent, bien évidemment, pour $D = 0$ dans la cas où $E_t < 0$ mais n'ont pas de forme analytique.

statique infiniment petite. En outre, la forme théorique de l'onde solitaire avec une force statique très faible est extrèmement similaire à celle d'une arche de l'onde non linéaire d'Eq. (IV.27), comme le montre la Fig. (IV-11). Ce comportement est confirmé par les simulations de Nesterenko et Lazaridi [99, 100], qui observent les mêmes propriétés pour une onde d'amplitude maximale de 200 N se propageant dans une chaîne soumise soit à une force statique de 2 N ou à aucune compression statique. De plus, la vitesse théorique de l'onde solitaire tend aussi *continuement* vers sa limite, à force statique nulle, comme nous le verrons au § (IV.6.2). L'analyse théorique de ces ondes non linéaires périodiques sera développée au § (IV.6.2), et nous discuterons au § (IV.7.3) de leur possible observation expérimentale.

IV.6.2 Extension de l'analyse théorique à une méthode de mesure

Cas de la force statique non nulle

Dans nos expériences, nous pouvons mesurer la vitesse de l'onde, par la méthode des temps de vols, et l'évolution temporelle de la force ressentie par le capteur situé à l'extrémité de la chaîne. La force statique F_0 appliquée sur la chaîne est mesurée à l'aide du dynamomètre. Attardons nous un instant sur la signification physique de ψ défini, au § (IV.6.1), par $\psi \equiv -x_l$. ψ représente le gradient du déplacement total x (y compris celui dû à la déformation statique) du centre d'une bille par rapport à sa position l qu'il occuperait si la chaîne n'était soumise à aucune force statique. Supposons que l'on impose uniquement une force statique. Le rapport du déplacement relatif δ_0, entre deux centres de sphères consécutives, sur la distance $2R$, qu'ils occupaient, permet d'obtenir la valeur de ψ en présence de la force statique seule, c.-à-d. pour $\xi \to \pm\infty$. En effet, en utilisant l'Eq. (IV.16) et $\psi \equiv -x_l$, on obtient

$$\delta_0 = x(l-2R,t)\big|_{t\to\pm\infty} - x(l,t)\big|_{t\to\pm\infty} = -2R\frac{\partial x}{\partial l}\bigg|_{t\to\pm\infty} = 2R\psi_\infty \ , \qquad \text{(IV.28)}$$

où ψ_∞ est la valeur de ψ pour $t \to \pm\infty$, c.-à-d. $\xi \to \pm\infty$. L'équation (IV.1) permet alors, à partir de la force statique F_0, d'avoir accès à cette distance de rapprochement

$$\psi_\infty = \frac{\delta_0}{2R} = \frac{1}{2R}\left(\frac{F_0}{k}\right)^{2/3} . \qquad \text{(IV.29)}$$

En utilisant les changements de variables des Eqs. (IV.20) et (IV.22), nous obtenons alors une première relation entre les quantités inconnues y_∞ et V

$$\psi_\infty = \left(\frac{V}{\mathcal{C}}\right)^4 y_\infty^{4/5} \ , \qquad \text{(IV.30)}$$

où l'on rappelle que la constante $\mathcal{C}$ ne dépend seulement que des propriétés physiques du matériau constituant les billes. Tentons maintenant de déterminer une relation entre l'amplitude maximale y_m de l'onde solitaire et sa valeur minimale y_∞ en $\eta \to \pm\infty$ (voir la Fig. (IV-10c)). L'amplitude maximale, y_m, est une solution de l'Eq. (IV.25). D'autre part, la définition de $W(y)$ étant donnée par l'Eq. (IV.23), on voit que l'Eq. (IV.25) est une équation algébrique du 5$^{\text{ème}}$ ordre en $y_m^{2/5}$. $y_m = y_\infty$ est bien évidemment une des racines de cette équation et puisque $dW/dy|_{y_\infty} = 0$, cette racine est une racine double. Par conséquent, nous devons seulement résoudre une équation algébrique du 3$^{\text{ème}}$ ordre en $y_m^{2/5}$, dont nous obtenons explicitement [30] la fonction $y_m(y_\infty)$. L'évolution de cette fonction est alors traçée sur la Fig.

30. Nous n'exposons pas ici cette expression trop encombrante qui peut être retrouvée aisément à l'aide d'un logiciel de calcul formel tel que *Mathematica*.

(IV-12). L'inconnue y_∞ est ainsi donnée par

$$\frac{y_m(y_\infty)}{y_\infty} = \left(\frac{\psi_m}{\psi_\infty}\right)^{5/4} , \tag{IV.31}$$

où ψ_m est relié à y_m par les changements de variables des Eqs. (IV.20) et (IV.22).

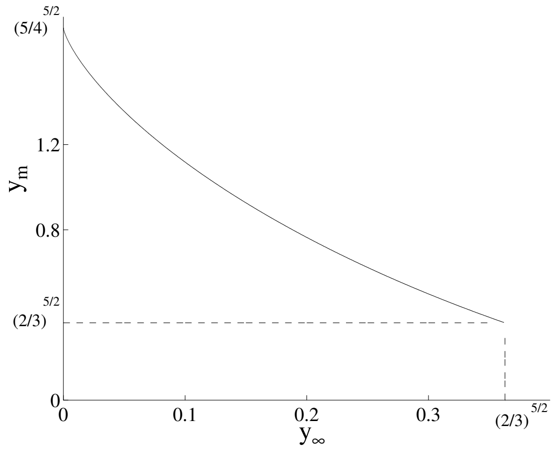


FIG. IV-12 – *Evolution de y_m en fonction de y_∞. Les variations de y_∞ correspondent implicitement à $0 < D < 5/27$ (voir la Fig. (IV-9)).*

Montrons, maintenant, que les mesures de la force statique et de la force maximale ressentie par le capteur de force en bout de chaîne suffisent pour avoir accès à la valeur expérimentale du rapport ψ_m/ψ_∞. ψ est le gradient du déplacement *total* du centre de la bille, d'abscisse l, et est la somme d'une constante, c.-à-d. la valeur à l'équilibre sous compression statique, ψ_∞, et d'une partie variant au cours du temps, $\tilde{\psi}(t)$, reliée à la valeur de la force dynamique mesurée par le capteur (voir l'Eq. (IV.36)),

$$\psi = \psi_\infty + \tilde{\psi}(t) \ . \tag{IV.32}$$

Dans la suite, nous mettrons en exposant les lettres[31] « *sp* » sur les quantités relatives au contact entre la dernière bille de la chaîne et le capteur de force dynamique, d'abscisse $l = l^{sp}$. Pour tous les autres contacts, c.-à-d. entre deux billes consécutives, nous ne spécifierons aucun exposant de dénomination. La force dynamique est mesurée via un contact entre une surface plane et une sphère de rayon R, correspondant au contact entre le capteur et la dernière bille de la chaîne, contact différent de celui entre deux sphères identiques (voir le § (I.3.1)). Cette différence implique alors, en utilisant les Eqs. (I.19), (I.20), (I.23) et (I.24), que[32]

$$\delta^{sp}(t) = \frac{\delta(t)}{2^{1/3}} , \tag{IV.33}$$

31. « *sp* » signifie sphère–plan.

32. Le capteur étant recouvert d'acier inoxydable, il peut être assimilé, dans son ensemble, comme étant constitué par le même matériau que celui des billes de la chaîne, et ainsi, d'après les Eqs. (I.20) et (I.24), $K = k\sqrt{2}$.

où $\delta^{sp}(t)$ correspond[33] au déplacement dynamique entre le centre de la dernière bille de la chaîne et le capteur de force, sous l'effet d'une force dynamique. En outre, la surface de contact entre le capteur d'abscisse l^{sp} est à une distance R du centre de la dernière bille, et ainsi

$$\delta^{sp}(t) = x(l^{sp} - R, t) - x(l^{sp}, t) = -R \frac{\partial x}{\partial l}\bigg|_{l=l^{sp}} = R\psi^{sp} \ . \tag{IV.34}$$

Soit $F(t)$ le signal, de valeur maximale F_m, donné par le capteur dynamique. La loi de Hertz d'Eq. (I.19), pour un contact sphère–sphère, permet alors d'écrire

$$F(t) + F_0 = k \left[\delta(t) + \delta_0\right]^{3/2} \ , \tag{IV.35}$$

En utilisant les Eq. (IV.34), (IV.33), (IV.32), (IV.35) et (IV.29), la relation entre le signal $F(t)$, donné par le capteur de force, et $\tilde{\psi}(t)$ s'écrit

$$\tilde{\psi}(t) = \frac{1}{2Rk^{2/3}} \left\{ \left[2F(t) + 2F_0\right]^{2/3} - (2F_0)^{2/3} \right\} \ , \tag{IV.36}$$

En utilisant les Eqs. (IV.36), (IV.32), et (IV.29), on obtient alors l'équation donnant accès à la valeur expérimentale de ψ_m,

$$\frac{\psi_m}{\psi_\infty} = \frac{(2F_m + 2F_0)^{2/3} - (2F_0)^{2/3} + F_0^{2/3}}{F_0^{2/3}} \ . \tag{IV.37}$$

La connaissance de la force statique appliquée F_0 ainsi que de la mesure de la force maximale F_m ressentie par le capteur, donne accès, d'après l'Eq. (IV.37), à la valeur du rapport ψ_m/ψ_∞. En introduisant cette valeur dans l'Eq. (IV.31), qui est résolue numériquement, afin d'obtenir la valeur expérimentale de y_∞, nous trouvons une racine numérique qui est particulièrement simple car nous savons qu'il existe une et une seule racine dans l'intervalle $y_\infty \in [0, (2/3)^{5/2}]$ (voir les Figs. (IV-9) et (IV-12)). Nous obtenons alors, d'après les Eqs. (IV.29) et (IV.30), la vitesse V de la vitesse des ondes solitaires prévue par la théorie, qui pourra être comparée à celle observée expérimentalement (voir le § (IV.7.2)).

En utilisant la vitesse du son c_s des ondes linéaires (voir l'Eq. (IV.13)), les Eqs. (IV.18b) et (IV.29), l'Eq. (IV.30) se réécrit

$$\frac{V}{c_s} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[y_\infty \left(\frac{F_m}{F_0} \right) \right]^{-1/5} \ , \tag{IV.38}$$

où l'on a souligné que $y_\infty(\cdot)$ est une fonction du seul rapport F_m/F_0 (voir les Eqs. (IV.31) et (IV.37)). L'Eq. (IV.38) montre alors que les mesures de vitesse, pour différentes forces statiques appliquées, doivent se répartir sur une unique courbe, si les variables sont correctement adimensionnées. Ceci est effectivement la cas expérimentalement, comme nous le verrons sur la Fig. (IV-20).

La forme théorique de l'onde solitaire peut être calculée grâce aux Eqs. (IV.20), (IV.22) et (IV.37), cette dernière donnant aussi la relation entre ψ et $F(t)$, et s'écrit alors

$$F(t) = \frac{F_0}{2} \left\{ \left[\left(\frac{y\left(\frac{Vt}{R\sqrt{2/5}}\right)}{y_\infty} \right)^{4/5} - 1 + 2^{2/3} \right]^{3/2} - 2 \right\} \ , \tag{IV.39}$$

33. $\delta(t)$ étant l'analogue de $\delta^{sp}(t)$ pour un contact sphère–sphère.

où la fonction $y(\eta)$ est obtenue par une intégration numérique de l'Eq. (IV.23). La forme de l'onde solitaire prévue par l'Eq. (IV.39) peut alors être comparée à celle issue de l'observation expérimentale. Ceci sera effectué au § (IV.7.1). Il est à noter que dès l'instant où F_0 et F_m sont connus, la forme théorique de l'onde solitaire ainsi que la valeur théorique de sa vitesse sont obtenues sans l'aide d'aucun autre paramètre ajustable.

Cas de la force statique nulle

Ce cas est d'une certaine façon formellement plus simple que le précédent, puisqu'il existe une solution analytique (l'Eq. (IV.27)) à l'Eq. (IV.23). Cependant, la situation physique est moins claire, et ce cas nécessite une discussion plus poussée puisque la théorie prévoit une propagation d'ondes non linéaires *périodiques* plutôt que d'ondes *solitaires* comme dans le cas précédent. En identifiant la solution analytique de l'Eq. (IV.27) avec la valeur ψ_m donnée par l'Eq. (IV.32) et (IV.36) dans le cas $F_0 = 0$, on obtient une relation explicite entre la vitesse de l'onde et son amplitude maximale,

$$V|_{F_0=0} = \mathcal{C}\sqrt{\frac{4}{5}}\frac{1}{(2R)^{1/4}}\left(\frac{2F_m}{k}\right)^{1/6} \quad . \tag{IV.40}$$

La loi d'échelle entre V et F_m peut être comprise d'une façon simple. Gardons seulement le terme de plus grand ordre dans l'Eq. (IV.18) ; nous obtenons alors

$$x_{tt} \approx \frac{3}{2}\mathcal{C}^2 x_{ll}\sqrt{-x_l} \qquad -x_l > 0 \ , \tag{IV.41}$$

qui est l'équation habituelle d'une onde se propageant avec une vitesse V dépendante de son amplitude selon $V \sim \mathcal{C}(-x_l)^{1/4}$. L'interpénétration maximale δ_m entre deux billes soumises à une force $F(t)$ qui est maximale en F_m est donnée par la loi de Hertz d'Eq. (IV.1) en changeant les indices 0 par m. En utilisant cette loi et le fait que $\psi_m = \delta_m/2R$, on peut écrire que $(-x_l) \sim (F_m/k)^{(2/3)}/(2R)$, et ainsi

$$\frac{V}{\mathcal{C}} \sim \frac{1}{(2R)^{1/4}}\left(\frac{F_m}{k}\right)^{1/6} \quad . \tag{IV.42}$$

D'une façon plus générale, la vitesse dépend à la fois de la force statique F_0 et de la force maximale F_m, et l'expression précédente doit être alors modifiée selon

$$\frac{V}{\mathcal{C}} = \frac{1}{(2R)^{1/4}}\left(\frac{F_m}{k}\right)^{1/6} f\left[\frac{F_0}{F_m}\right] \ , \tag{IV.43}$$

où la fonction $f[\cdot]$ est simplement la fonction implicite déterminée par l'intermédiaire des Eqs. (IV.37), (IV.30) et (IV.31). La formule d'Eq. (IV.40) impose que $f(0) = 2^{1/6}\sqrt{4/5}$, tandis que la limite opposée est fournie par l'Eq. (IV.13) stipulant, en utilisant la définition de $\mathcal{C}$ de l'Eq. (IV.18b), que $\lim_{F_m \to 0} F_m^{1/6} f[F_0/F_m] = \sqrt{3/2}F_0^{1/6}$.

Lorsqu'aucune force statique n'est appliquée à la chaîne, l'équation (IV.42) est exacte à une constante numérique près. Cette équation traduit le fait que l'interaction de Hertz entre deux billes adjacentes est responsable de la propagation de l'onde, et d'une façon plus générale de toutes les ondes pouvant se propager dans ce type de milieu. Par exemple, la même loi d'échelle[34] existe pour la vitesse d'une onde de déformation se propageant dans une colonne de billes en contact (voir le Chap. III et notamment les § (III.6.2) et (III.7)). La dépendance de la vitesse avec $F_m^{1/6}$ est clairement confirmée expérimentalement comme le montre la Fig. (IV-24). En outre, cela confirme que les approximations[35] conduisant à l'Eq. (IV.18), décrivant un modèle de masses ponctuelles reliées par des ressorts non linéaires, sont aussi valables dans le régime non linéaire.

Bien que la limite $F_0 = 0$ soit singulière pour la forme de l'onde, puisque mathématiquement la solution onde solitaire disparaît, la vitesse de cette onde tend de façon *continue* vers l'expression de l'Eq. (IV.40). En effet, l'Eq. (IV.23) impose que $y_m(y_\infty = 0) = (5/4)^{5/2}$ (voir la Fig. (IV-12)), d'où nous déduisons la vitesse en fonction de ψ_m à l'aide des Eqs. (IV.20) et (IV.22), et finallement comme une fonction de F_m grâce à l'Eq. (IV.36), conduisant ainsi à l'Eq. (IV.40). Probablement, l'Eq. (IV.40) est une très bonne approximation de la vitesse des ondes solitaires en l'absence de force statique.

Dans cette limite $F_0 \to 0$, la forme de l'onde solitaire, prévue par la théorie, est précisément donnée par la forme d'une arche de l'onde non linéaire périodique d'Eq. (IV.27) (voir la Fig. (IV-11) et la discussion à la fin du § (IV.6.1)) et s'écrit, d'après l'Eq. (IV.40) et (IV.36),

$$F(t) = F_m \cos^6 \left(\frac{V\,|_{F_0=0}\, t}{R\sqrt{10}} \right) . \tag{IV.44}$$

34. En utilisant les Eqs. (IV.18b), (III.31) et (I.38), en changeant K par k dans cette dernière, on retrouve la loi d'échelle (IV.42).

35. L'Eq. (IV.17) a pour but de tronquer le nombre de non linéarités.

IV.7 Résultats expérimentaux en régime fortement non linéaire

IV.7.1 Forme de l'onde pour une force statique non nulle

La Fig. (IV-13) montre l'évolution de la force délivrée par le capteur de force pendant un temps très long devant la durée de l'impulsion. Cette impulsion correspond à une onde de compression, c.-à-d. une onde solitaire (voir la légende de cette figure), qui exerce uniquement un force positive sur le capteur de force. La présence d'oscillations après l'arrivée de l'impulsion est due à la réponse du capteur (sa période de résonance de 13 μs n'est pas trop éloignée de la durée typique de l'impulsion qui est d'environ 50 μs) ainsi que des multiples réflexions à l'intérieur des différentes parties du dispositif expérimental situées en bout de la chaîne.

FIG. IV-13 – *Les points représentent l'évolution de la force délivrée par le capteur de force en bout de chaîne, pendant un temps très long, typiquement* 10 *fois la durée de la première impulsion. L'abscisse correspond au temps représenté en μs et l'ordonnée à la force en N. Les conditions expérimentales sont telles que la force statique $F_0 = 167$ N et le paramètre de non-linéarité $\psi_m/\psi_\infty = 2,74$. La première partie positive de l'impulsion est identifiée comme étant l'onde solitaire prévue théoriquement par Nesterenko [76]: la courbe en traits pleins correspond à la forme théorique de l'onde solitaire de même amplitude (voir l'Eq. (IV.39) et le § (IV.6.2)). Excepté les oscillations qui proviennent principalement des résonances du capteur de force (voir le corps du texte), nous observons une impulsion isolée.*

La forme de l'onde solitaire délivrée par le capteur de force, situé en bout de chaîne, est représentée sur les Figs. (IV-14) à (IV-16), et est comparée à la forme théorique d'Eq. (IV.39). La force statique vaut $F_0 = 29,4\ N$ pour les Figs. (IV-14) à (IV-15), et $F_0 = 167\ N$ pour la Fig. (IV-16). Sur cette dernière figure, les valeurs possibles du paramètre de non–linéarité ψ_m/ψ_∞ sont alors beaucoup plus petites. En effet, ψ_m/ψ_∞ varie de $3,7$ sur la Fig. (IV-14a) à 17 sur la Fig. (IV-15d), et varie de $2,5$ sur la Fig. (IV-16a) à $5,2$ sur la Fig. (IV-16d), la force maximale ressentie par le capteur variant essentiellement dans la même gamme de valeurs, pour les deux forces statiques considérées. Bien que l'arrivée de chaque impulsion soit légèrement différente des prévisions théoriques, tous les résultats expérimentaux sont en bon accord avec ces prévisions. Il est important de souligner qu'*aucun* paramètre ajustable n'a été introduit au cours de cette comparaison entre la théorie et les expériences.

La durée typique d'une impulsion est environ $30 - 40\ \mu s$ et sa vitesse typique environ $1000\ m/s$. Son échelle de longueur typique est, par conséquent, $3 - 4\ cm$ ou $4 - 5$ billes. L'approximation continue[36] de l'Eq. (IV.15), est ainsi satisfaite. En effet, il est connu d'après des simulations numériques [128], que dans les chaînes discrètes non linéaires, les excitations sont parfaitement décrites par une approximation continue si leur taille est supérieure où égale à 5 particules. Cette longueur étant très inférieure à la longueur totale de la chaîne, on peut donc dire que l'impulsion a conservé sa forme initiale sur une grande distance, à la façon d'une onde solitaire. Nous pouvons alors appeler cette impulsion, une onde solitaire. Aux vues de ces figures, une autre conclusion générale apparaît : dans tous les cas, la durée de l'impulsion, c.-à-d. de l'onde solitaire, est beaucoup plus grande que le temps nécessaire à une onde acoustique longitudinale pour traverser le diamètre d'une bille ; ce qui correspond à la condition nécessaire pour pouvoir appliquer la théorie de Hertz dans ce problème dynamique (voir le § (IV.2)).

IV.7.2 Vitesse de l'onde pour une force statique non nulle

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats expérimentaux, concernant la propagation d'excitations non linéaires à l'intérieur de la chaîne, pour trois valeurs différentes de la force statique F_0 : $9,8 \pm 1\ N$; $29,4 \pm 1\ N$ et $167 \pm 1\ N$. Un paramètre important à considérer est le rapport ψ_m/ψ_∞ qui est donné par l'Eq. (IV.37) en fonction de la force statique F_0 et de la force dynamique maximale F_m. Ce rapport caractérise la non-linéarité de l'onde et doit être beaucoup plus grand[37] que 1 afin que l'Eq. (IV.18) soit valable. Pour nos expériences, ce rapport est tel que

$$\begin{cases} \frac{\psi_m}{\psi_\infty} \in [1,9\ ;\ 17] & \text{pour} \quad F_0 = 9,8\ N\ , \\ \frac{\psi_m}{\psi_\infty} \in [1,4\ ;\ 16,5] & \text{pour} \quad F_0 = 29,4\ N\ , \\ \frac{\psi_m}{\psi_\infty} \in [1,5\ ;\ 5,2] & \text{pour} \quad F_0 = 167\ N\ . \end{cases} \tag{IV.45}$$

Dans nos expériences, la vitesse de l'onde est obtenue, d'une manière très simple, à partir des mesures de temps de vol entre 4 capteurs placés le long de la chaîne (voir le § (IV.4) pour de plus amples détails). Comme nous l'avons déjà souligné précédemment, les 3 capteurs de force, maintenus perpendiculairement à l'axe de la chaîne, sont bien adaptés à ce type de

36. Cette approximation est appelée encore « l'approximation de grande longueur d'onde » : la taille caractéristique des phénomènes observés est supposée très supérieure au rayon d'une bille

37. Le régime fortement non linéaire, conduisant à l'Eq. (IV.18), est atteint si $\delta(t) \gg \delta_0$, c.-à-d. d'après (IV.28), si $\psi(t) \gg \psi_\infty$.

FIG. IV-14 – *Allures de quatre ondes solitaires, mesurées par le capteur de force situé à l'extrémité de la chaîne, pour une force statique* $F_0 = 29,4\ N$. *Pour chaque Fig. (a-d), l'évolution de la force en* N *est représentée en fonction du temps en* μs. *Les points, c.-à-d. les courbes épaisses, correspondent aux profils expérimentaux tandis que les courbes en traits pleins minces correspondent aux prévisions théoriques issues de l'Eq. (IV.39). L'amplitude maximale* F_m, *la vitesse* V *et le paramètre de non–linéarité* ψ_m/ψ_∞ *de chaque onde solitaire sont : (a)* $F_m = 100\ N$; $V = 895\ m/s$; $\psi_m/\psi_\infty = 3,7$; *(b)* $F_m = 138\ N$; $V = 921\ m/s$; $\psi_m/\psi_\infty = 4,5$; *(c)* $F_m = 209\ N$; $V = 960\ m/s$; $\psi_m/\psi_\infty = 5,8$ *et (d)* $F_m = 290\ N$; $V = 994\ m/s$; $\psi_m/\psi_\infty = 7,2$.

FIG. IV-15 – *Idem que pour la Fig. (IV-14), avec les mêmes notations, mais pour des plus grandes valeurs de* ψ_m/ψ_∞. *Les caractéristiques de chaque onde solitaire sont respectivement: (a)* $F_m = 503\ N$; $V = 1060\ m/s$; $\psi_m/\psi_\infty = 10,4$; *(b)* $F_m = 608\ N$; $V = 1086\ m/s$; $\psi_m/\psi_\infty = 11,8$; *(c)* $F_m = 705\ N$; $V = 1106\ m/s$; $\psi_m/\psi_\infty = 13,0$ *et (d)* $F_m = 1060\ N$; $V = 1168\ m/s$; $\psi_m/\psi_\infty = 17$.

FIG. IV-16 – *Idem que pour la Fig. (IV-14), avec les mêmes notations, mais pour une force statique* $F_0 = 167\ N$. *Les caractéristiques de chaque onde solitaire sont respectivement: (a)* $F_m = 274\ N$; $V = 1131\ m/s$; $\psi_m/\psi_\infty = 2,5$; *(b)* $F_m = 474\ N$; $V = 1178\ m/s$; $\psi_m/\psi_\infty = 3,3$; *(c)* $F_m = 842\ N$; $V = 1239\ m/s$; $\psi_m/\psi_\infty = 4,7$ *et (d)* $F_m = 1005\ N$; $V = 1260\ m/s$; $\psi_m/\psi_\infty = 5,2$.

mesure, mais ne donnent aucune information sur le profil réel de l'onde. D'un autre côté, la valeur théorique de la vitesse de l'onde a été obtenue au § (IV.6.2), sans l'intervention d'aucun paramètre ajustable, dès lors qu'à la fois la force statique appliquée et la force maximale sont connues.

Les mesures de vitesse sont représentées sur les Figs. (IV-17) à (IV-19), pour une force statique de $9,8$; $29,4$ et $167\ N$ respectivement. Pour les deux forces statiques les plus basses, un bon accord apparaît entre les mesures expérimentales et les prévisions théoriques. Dans chacun de ces cas, le paramètre de non–linéarité varie approximativement entre les mêmes limites (voir l'Eq. (IV.45)). Pour les mesures à $167\ N$, un léger désaccord est observé (voir la Fig. (IV-19)). Une possible explication est l'augmentation de l'énergie transférée entre l'onde et le bâti, contenant les billes, en raison de l'importance de la force statique. Une onde arrivant à l'extrémité de la chaîne, et ayant perdu une certaine quantité d'énergie[38], a dû, par conséquent, se propager plus rapidement que ne le prévoyait la théorie construite à partir de la valeur *finale* de son amplitude maximale. Cette interprétation est confirmée par le bon accord entre la forme expérimentale et théorique de l'onde, pour la même force statique considérée (voir la Fig. (IV-16)). Si le désaccord, observé sur la Fig. (IV-19), provenait de la petitesse du paramètre de non–linéarité (voir l'Eq. (IV.45)), un désaccord aurait dû aussi apparaître sur la Fig. (IV-16). Il est important de noter que les mesures successives de temps de vol, le long de la chaîne, ne sont pas rigoureusement identiques. Les barres d'erreur sur les Figs. (IV-17) à (IV-19) représentent alors cet effet. Cependant, aux 3 endroits de mesure, aucune évolution systématique de la vitesse n'a été observée, signifiant alors, qu'elle semble relativement constante, au cours de la propagation de l'impulsion, même pour une force statique de $167\ N$.

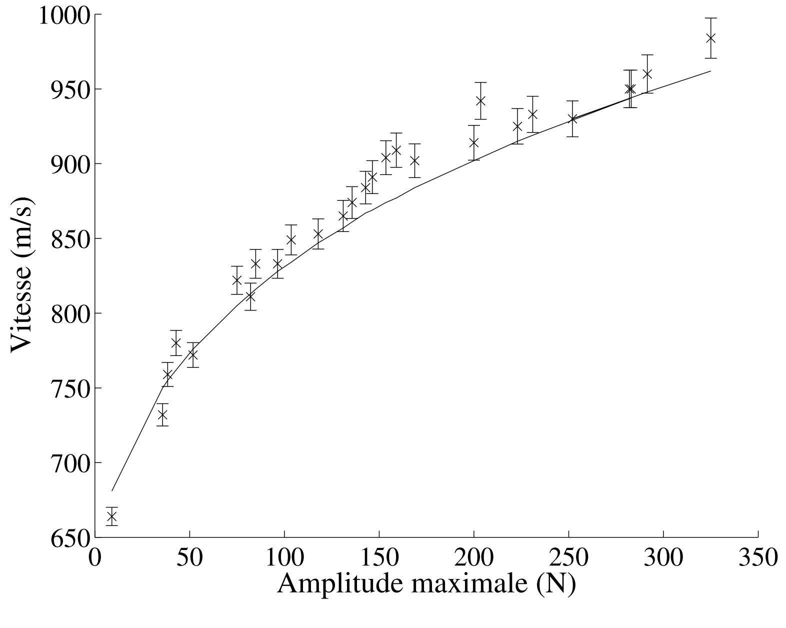


FIG. IV-17 – *Evolution de la vitesse de l'onde solitaire, en m/s, en fonction de son amplitude maximale F_m, en N, pour une force statique appliquée $F_0 = 9,8\ N$. La courbe en traits pleins est la courbe théorique issue des Eqs. (IV.37), (IV.30) et (IV.31).*

38. L'amplitude maximale finale de l'onde est alors plus faible que celle qu'elle possédait initialement.

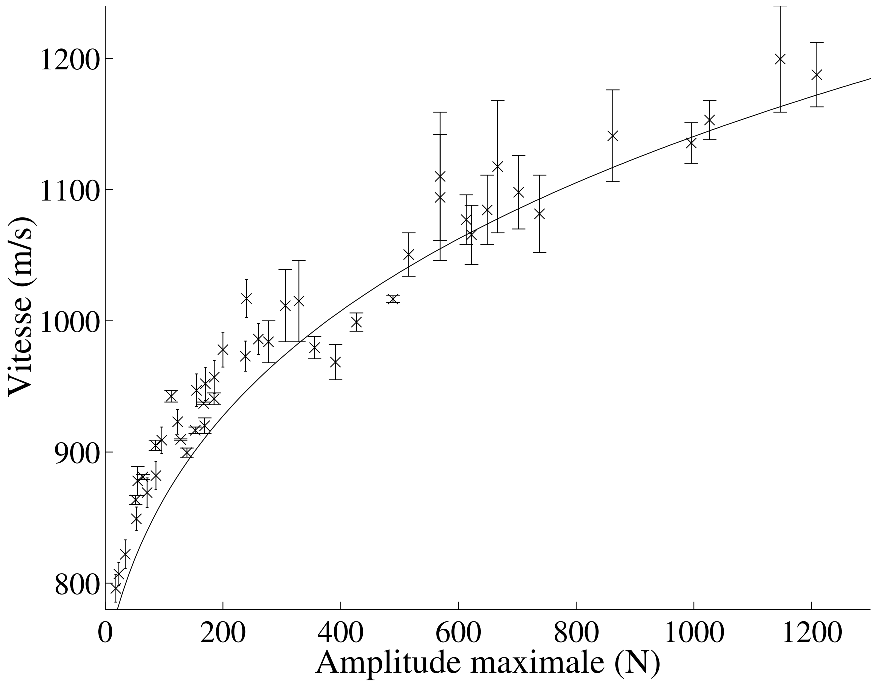


FIG. IV-18 – *Idem que pour la Fig. (IV-17), mais pour une force statique appliquée* $F_0 = 29,4\ N$.

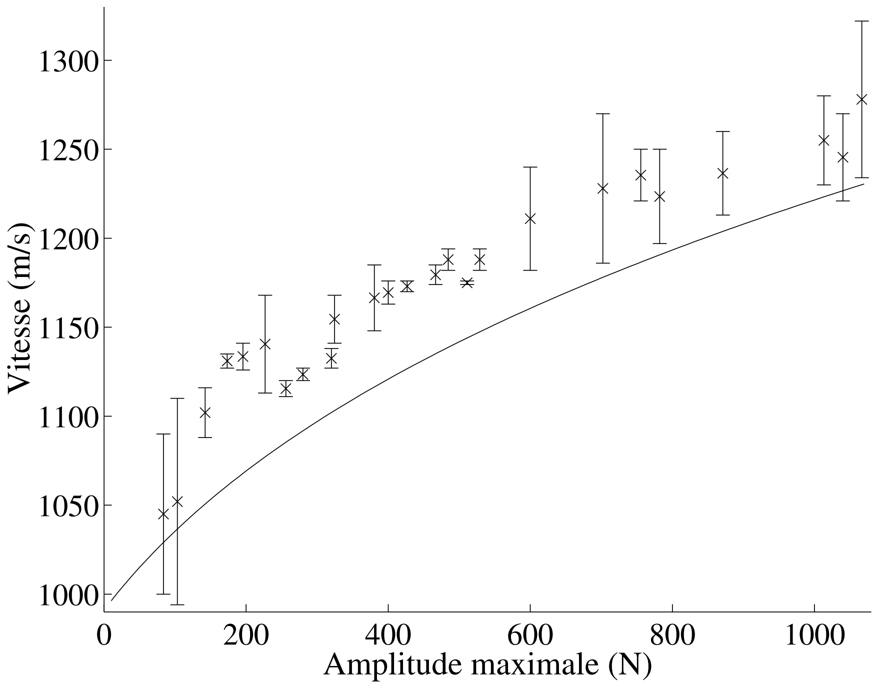


FIG. IV-19 – *Idem que pour les Figs. (IV-17) et (IV-18), mais pour une force statique appliquée* $F_0 = 167\ N$.

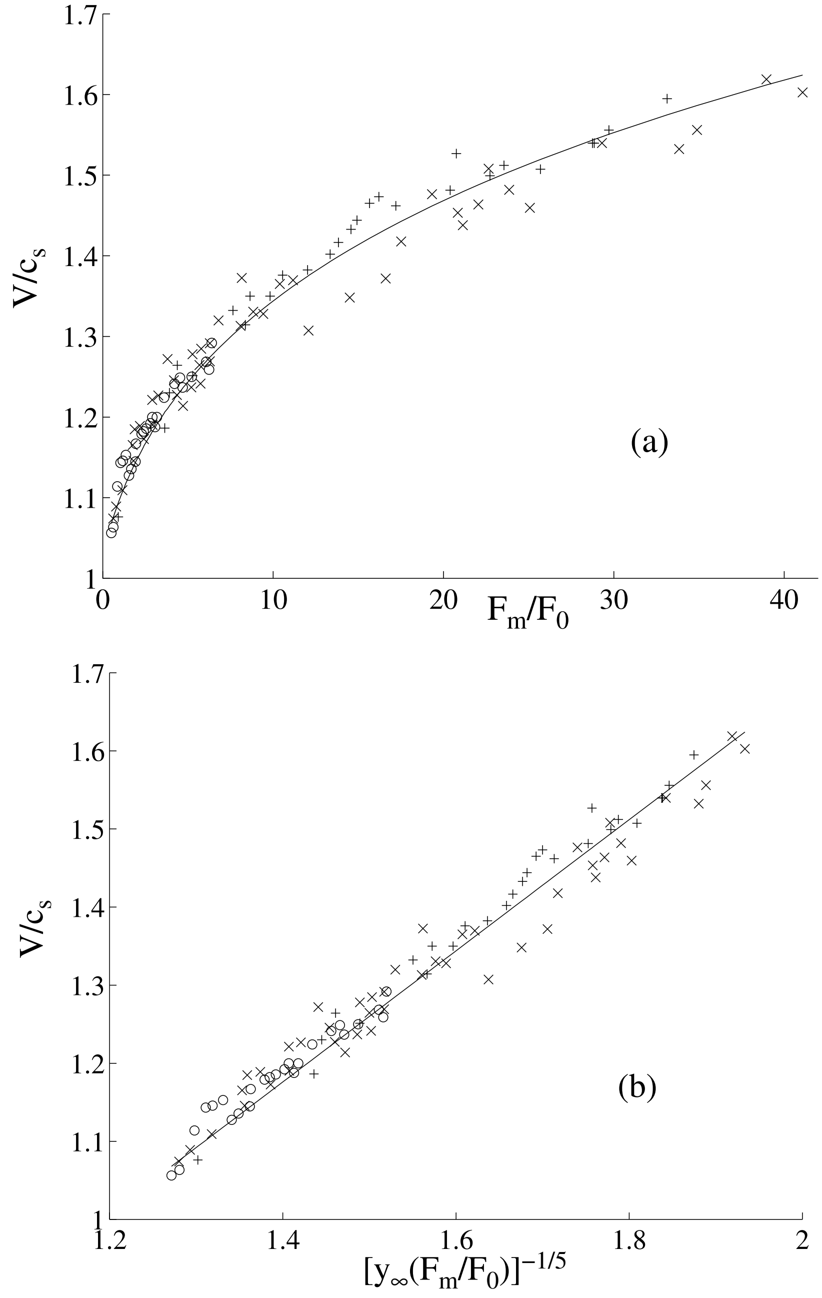


FIG. IV-20 – *(a) Evolution du rapport sans dimension V/c_s en fonction de la quantité sans dimension F_m/F_0. Les points expérimentaux correspondent à une force statique de $9,8$ N (+) ; $29,4$ N ($\times$) et 167 N ($\circ$). Tous les points expérimentaux se répartissent sur une seule courbe, en traits pleins, d'équation $Cste \times [y_\infty(F_m/F_0)]^{-1/5}$, où la valeur expérimentale de la constante $Cste$ est $0,84$. Cette dernière est à comparer avec la valeur théorique $Cste = \sqrt{2/3}$ obtenue à partir de l'Eq. (IV.38). (b) Evolution du rapport sans dimension V/c_s en fonction de la quantité sans dimension $[y_\infty(F_m/F_0)]^{-1/5}$. Chaque symbole utilisé a la même signification que pour la Fig. (a). Tous les points expérimentaux se répartissent sur une seule courbe linéaire de pente $Cste = 0,84$.*

Comme nous l'avons déjà expliqué, dans le paragraphe suivant l'Eq. (IV.38), les mesures de vitesses des Figs. (IV-17) à (IV-19) peuvent se répartir sur une seule et même courbe représentée en fonction des variables adimensionnées V/c_s et F_m/F_0. Ceci est clairement démontré par les Fig. (IV-20a–b). D'une part, la Fig. (IV-20a) montre que toutes les mesures de vitesses se répartissent sur une seule courbe exprimée en fonction des variables V/c_s et F_m/F_0. D'autre part, la Fig. (IV-20b) montre que V/c_s est une fonction linéaire de $[y_\infty(F_m/F_0)]^{-1/5}$, comme le prévoit l'Eq. (IV.38). Sur ces deux figures, la constante de proportionnalité, des courbes en traits pleins, est $0,84$; cette valeur étant à comparer avec la valeur attendue théoriquement $\sqrt{2/3} \simeq 0,8165$. En outre, la Fig. (IV-20) montre clairement que les ondes non linéaires sont *supersoniques*, et elle confirme le résultat prévu théoriquement par Nesterenko [76].

IV.7.3 Le cas de la force statique nulle

Afin d'être aussi proche que possible du cas de la force statique nulle, nous procédons expérimentalement de la façon suivante : nous appliquons une force statique à la chaîne afin de mettre les billes en contact les unes avec les autres, puis nous relâchons cette force jusqu'à ce que le contact entre le dynamomètre et le cylindre en laiton, solidaire du capteur de force longitudinale, se rompt. Il n'y a pratiquement aucune adhésion entre des billes en acier, mais il peut exister une force de frottement entre les billes et les murs de la gorge les contenant. Nous espérons que le frottement est amoindri pour des billes lisses, en acier, en contact avec du Teflon, ce matériau étant auto–lubrifiant. Experimentalement, la force statique entre deux billes voisines, ainsi obtenue, doit être certainement très petite, mais nous ne pouvons affirmer qu'elle soit exactement égale à zéro. Dans cet esprit, la singularité du cas de la force statique nulle est plutôt une singularité de nature mathématique qu'un effet physique réel.

Lorsqu'aucune force statique n'est appliquée sur la chaîne, la théorie prévoit une propagation d'ondes non linéaires périodiques plutôt que d'ondes solitaires, comme dans le cas précédent. La forme des impulsions arrivant à l'extrémité de la chaîne a été enregistrée pour une gamme d'amplitude maximale de 40 à 700 N. Expérimentalement, la comparaison des Figs. (IV-14) à (IV-16), ci–dessus, avec les Figs. (IV-21) à (IV-23), ci–dessous, prouve qu'il n'y a aucune différence qualitative entre le cas de la force statique nulle et non nulle. En ce qui concerne la forme de l'onde, il n'est pas possible, comme le montre clairement la Fig. (IV-11), de distinguer une onde solitaire, dans la limite de force statique très faible, d'une arche d'onde non linéaire périodique. Sur les Figs. (IV-21) à (IV-23), nous comparons la forme expérimentale d'une impulsion à celui d'une arche de la solution d'Eq. (IV.27) de même amplitude maximale, pour différentes valeurs de l'amplitude maximale de l'impulsion. A l'exception des impulsions de petites amplitudes (voir la Fig. (IV-21)), l'accord entre la forme observée de l'impulsion et celle calculée théoriquement est remarquable. La durée[39] de l'impulsion est environ 30 μs et sa vitesse environ 900 m/s. L'extension spatiale d'une impulsion est, par conséquent, d'environ 30 mm, approximativement 4 billes, ce qui est encore suffisant [128] pour vérifier l'approximation de grande longueur d'onde d'Eq. (IV.16). Cette longueur étant très inférieure à la longueur totale de la chaîne, on peut donc dire que l'impulsion a conservé sa forme initiale sur une grande distance, à la façon d'une onde solitaire. La différence avec le cas précédent du § (IV.7.1) provient du fait que nous sommes maintenant dans le régime complètement non linéaire, et par conséquent le développement conduisant à l'Eq. (IV.18) est certainement très correct.

39. Là encore, cette durée est tout à fait compatible avec l'hypothèse quasi-statique de la loi de Hertz (voir le § (IV.2)).

FIG. IV-21 – *Allure de l'impulsion à l'extrémité de la chaîne, lorsqu'aucune force statique n'est appliquée. Pour chaque Fig. (a-d), l'évolution de la force en N est représentée en fonction du temps en μs. Les points, c.-à-d. les courbes épaisses, correspondent aux profils expérimentaux enregistrés par un oscilloscope digital tandis que les courbes en traits pleins minces correspondent aux prévisions théoriques issues de l'Eq. (IV.44) pour une onde de même amplitude maximale. A l'exception des impulsions de plus grande amplitude de la Fig. (d), les impulsions ont une petite amplitude et l'accord avec la théorie est médiocre. La vitesse V et l'amplitude maximale F_m de chaque impulsion sont respectivement : (a) $V = 629\ m/s$; $F_m = 36,7\ N$; (b) $V = 659\ m/s$; $F_m = 48,5\ N$; (c) $V = 685\ m/s$; $F_m = 61,4\ N$ et (d) $V = 725\ m/s$; $F_m = 86,4\ N$.*

FIG. IV-22 – *Idem que pour la Fig. (IV-21), mais pour des ondes d'amplitudes maximales plus grandes. La partie négative du signal de force à l'arrière des impulsions des Figs. (b),(c) et (d) est la signature d'une résonance du capteur de force. L'accord avec la théorie est très satisfaisante, et est bien meilleur que pour les impulsions de la Fig. (IV-21). La vitesse* V *et l'amplitude maximale* F_m *de chaque impulsion sont respectivement: (a)* $V = 811\ m/s$ *;* $F_m = 168,5\ N$ *; (b)* $V = 845\ m/s$ *;* $F_m = 216,2\ N$ *; (c)* $V = 877\ m/s$ *;* $F_m = 269,7\ N$ *et (d)* $V = 919\ m/s$ *;* $F_m = 356,4\ N$.

FIG. IV-23 – *Idem que pour les Figs. (IV-21) et (IV-22), mais pour des ondes d'amplitudes maximales plus grandes. La partie négative du signal de force à l'arrière des impulsions est la signature d'une résonance du capteur de force. Comme pour la Fig. (IV-22), l'accord avec la théorie est très satisfaisante. La vitesse* V *et l'amplitude maximale* F_m *de chaque impulsion sont respectivement : (a)* $V = 963$ m/s ; $F_m = 473,1$ N ; *(b)* $V = 1000$ m/s ; $F_m = 594$ N ; *(c)* $V = 1014$ m/s ; $F_m = 646,1$ N *et (d)* $V = 1029$ m/s ; $F_m = 704,6$ N.

Comme le montre la Fig. (IV-21), l'accord entre la forme expérimentale de l'impulsion et celle prévue par la théorie devient très médiocre pour une amplitude maximale inférieure à 70 N environ. Une interprétation possible, pour expliquer l'écart entre la forme observée et la forme théorique, est de dire que le frottement des billes sur les murs produit une force statique résiduelle que l'on note $F_0^\star > 0$. Cependant, n'importe quel ordre de grandeur de $F_0^\star$ donné, par exemple, par la Figs. (IV-16) est alors beaucoup trop grand pour être acceptable[40]. Une autre possibilité est, qu'à basse vitesse d'impact, la forme initiale de l'excitation n'ait pas le temps d'atteindre sa forme asymptotique, c.-à-d. le profil en onde solitaire, avant que l'excitation ne soit arrivée en bout de chaîne. Malheureusement, nous ne disposons d'aucune information théorique concernant ce temps de formation et nous ne sommes pas capable de tester numériquement cette interprétation. De plus, il est à noter que les amplitudes des ondes de ces expériences sont beaucoup plus faible que celles des expériences exposées dans le § (IV.7.1), dans lesquelles cet effet n'avait pas été observé.

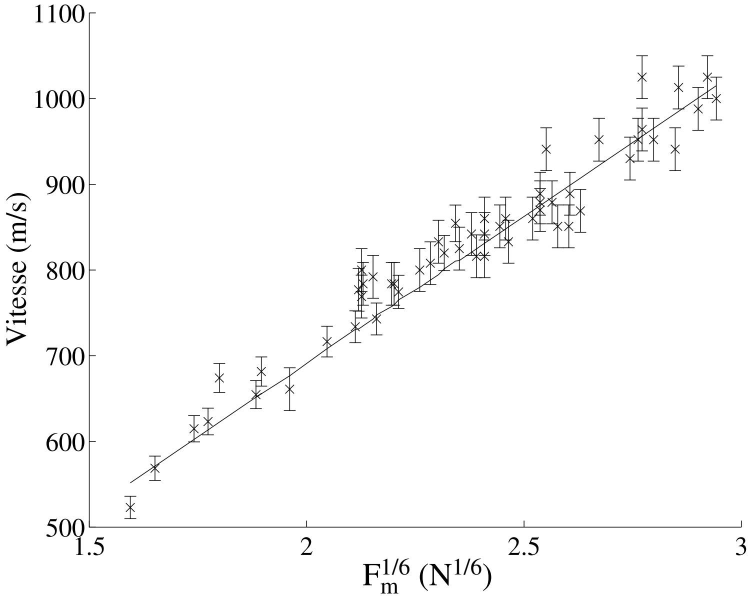


FIG. IV-24 – *Evolution de la vitesse de l'onde, en m/s, en fonction de $F_m^{1/6}$, où F_m représente l'amplitude maximale de l'onde lorsqu'aucune force statique n'est appliquée sur la chaîne. La courbe en traits pleins représente la solution théorique d'Eq. (IV.40). La relation est clairement linéaire, signifiant que l'interaction de Hertz entre deux billes voisines est responsable de la propagation de l'onde solitaire.*

A partir des mesures de vitesses des impulsions, nous pouvons vérifier tout d'abord que $V|_{F_0=0}$ croît comme $F_m^{1/6}$. La Fig. (IV-24) confirme alors qu'il en est bien ainsi. De plus, ce résultat indique que l'interaction de Hertz d'Eq. (IV.1), dans l'approximation quasi-statique, permet de décrire, de façon très satisfaisante la propagation de l'onde aussi bien dans le régime linéaire (voir le § (IV.5)) que dans le régime non linéaire. Comme dans le cas précédent, aucune évolution systématique de la vitesse de l'onde n'est observée pendant toute la durée nécessaire

40. En effet, la Fig. (IV-16) montre que même pour un paramètre de non–linéarité de l'ordre de 3, on a un bon accord ; cela voudrait donc dire que, pour $F_m \simeq 80$ N environ, ce paramètre est inférieur à 3, ce qui suppose, en utilisant l'Eq. (IV.37), une force statique « résiduelle » énorme, $F_0 \gtrsim 33$ N.

à l'onde pour traverser la chaîne d'une extrémité à l'autre. La figure (IV-25) montre que la vitesse théorique, donnée par l'Eq. (IV.40) à force statique nulle, donne une valeur très précise de la vitesse de l'onde. Ce comportement est relié au fait que la vitesse des ondes solitaires tend continuement vers l'Eq. (IV.40) dans la limite $F_0 \to 0$, comme nous l'avons montré au § (IV.6.2).

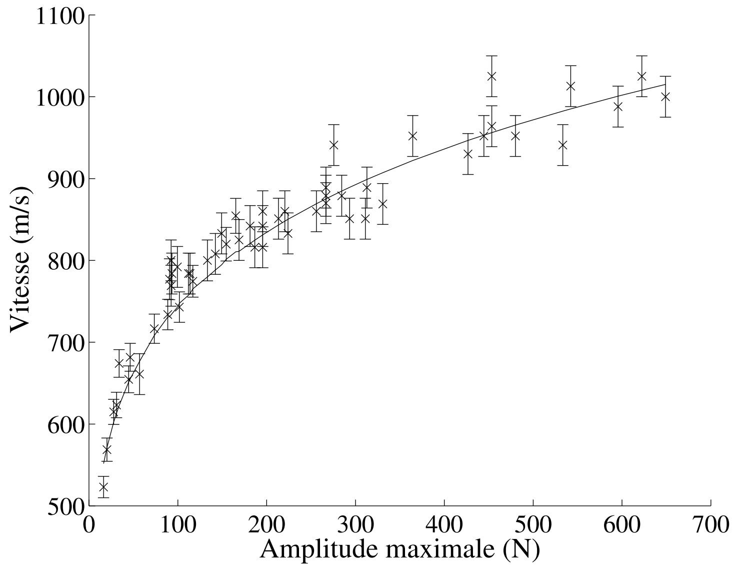


FIG. IV-25 – *Evolution de la vitesse de l'onde, en m/s, en fonction de son amplitude maximale F_m, en N, lorsqu'aucune force statique n'est appliquée. La courbe en traits pleins représente la solution théorique d'Eq. (IV.40).*

Même dans le cas d'une force statique nulle, nous observons des impulsions qui se propagent à vitesse constante, sans déformation, sur une distance grande devant leur taille. Par conséquent, on peut les identifier aux *ondes solitaires*. Leur vitesse ainsi que leur forme sont en bon accord avec les calculs théoriques de Nesterenko [76, 124] si nous oublions que, dans cette limite singulière non linéaire, des ondes périodiques sont prévues plutôt que des ondes solitaires. L'émetteur à impact, décrit dans le § (IV.4), n'est malheureusement pas adapté pour engendrer des ondes périodiques[41], et nous ne pouvons espérer que ce type d'onde apparaisse spontanément. A nos précisions de mesures près, les impulsions sont capables de voyager sur des distances plus grandes que dix fois leur taille tout en conservant leur forme et leur vitesse, cela signifiant par delà même qu'ils sont relativement stable.

IV.7.4 Discussion

Dans ce paragraphe, nous comparons nos résultats avec ceux obtenus antérieurement par Lazaridi et Nesterenko [77].

Ils ont observé la propagation de trains d'ondes, composés de plusieurs ondes solitaires, dans une chaîne de billes en acier lorsqu'aucune force statique n'est appliquée. Dans leur

41. L'accrochage entre le mouvement de la bille « mobile » et le piston du vibreur est comprise entre 70 et 110 Hz. Cette fréquence est à comparer avec la fréquence des ondes périodiques non linéaires, c.-à-d. d'après l'Eq. (IV.44) à $V|_{F_0=0}/(2\pi R\sqrt{10})$.

expérience, l'impact initial était beaucoup plus violent (la masse impactante était cinq fois celle d'une bille de la chaîne, et sa vitesse 1 m/s, c.-à-d. plus de deux fois la vitesse de notre bille impactante), ce qui explique que plusieurs ondes solitaires soient émises dans le système. En outre, ils n'ont pas fait varier l'intensité de l'impact initial. Ils ont aussi réalisé des expériences similaires [99, 100] pour une chaîne de billes soumises à une force statique non nulle de 2 et 20 N. Le résultat intéressant est que les excitations observées avec une force statique de 2 N sont quasiment identiques à celles observées sans aucune force statique appliquée, ce comportement étant confirmé par des simulations numériques.

Lazaridi et Nesterenko [77] ont enregistré l'arrivée du train d'ondes à l'extrémité de la chaîne et ont comparé sa forme avec celle obtenue à l'aide de simulations numériques. Ces dernières comprenaient la modélisation de *l'impact sur la première bille de la chaîne* de la masse impactante utilisée pour émettre le train d'ondes. La vitesse de la première impulsion du train d'ondes n'a pas été mesurée mais les intervalles de temps entre les impulsions successives ainsi que leurs amplitudes respectives ont été mesurés et ont été comparés aux prévisions théoriques pour une chaîne de 20 billes. L'accord était alors seulement qualitatif pour une chaîne plus longue de 40 billes. Dans tous les cas, la comparaison entre la forme des impulsions était simplement qualitative.

Notre dispositif expérimental permet de faire varier l'amplitude des impulsions émises dans une gamme relativement large, typiquement de 1 à 20, et de réaliser une étude systématique de la forme et de la vitesse des ondes en fonction de leur amplitude maximale. Dans nos expériences, la chaîne est constituée de 51 billes et l'accord avec la théorie est excellent à la fois pour la vitesse des impulsions et leur forme *complète*. De plus, nous ne confirmons pas la forte atténuation de l'amplitude de l'onde observée par Lazaridi et Nesterenko dans une chaîne de 40 billes.

Une interprétation possible de ces différences est la suivante. Dans leur expérience, la chaîne est constituée de billes, de 4,75 mm de diamètre, contenues à l'intérieur d'une tube en quartz de 5 mm de diamètre intérieur. Les billes peuvent alors se déplacer relativement facilement par rapport à l'axe du tube et perdent alors probablement de l'énergie lorsque, sous l'effet de l'impact initial, elles heurtent l'intérieur du tube. Cet effet est renforcé si la longueur de la chaîne augmente. Dans nos expériences, les billes sont contenues à l'intérieur d'une gorge rectiligne précisement fraisée, au $2/100^{\text{ème}}$ de millimètre, à l'intérieur d'un morceau de Teflon. Ainsi, pour nous, les collisions des billes sur les murs les contenant n'interviennent pas. De plus, le couplage acoustique entre l'acier et le Teflon est beaucoup plus faible que celui entre l'acier et le quartz [42].

IV.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une expérience sur une chaîne de billes identiques, en contact, soumises ou non à une force statique. Par l'intermédiaire d'un émetteur à impact, nous avons été capable d'envoyer, à l'intérieur de la chaîne, des impulsions de grande amplitude, c.-à-d. avec une amplitude dynamique beaucoup plus importante que celle de force statique.

Notre dispositif expérimental permet de faire varier la force statique appliquée à la chaîne ainsi que l'amplitude des impulsions. Nous complétons les travaux de Lazaridi et Nesterenko

42. Dans les deux cas, une dissipation de nature acoustique a inévitablement lieu : les billes rayonnent de l'énergie acoustique dans tout le bâti.

[77, 99, 100] par une étude systématique et quantitative de la vitesse et de la forme des ondes solitaires.

A l'extrémité de la chaîne, nous avons enregistré l'évolution de la force exercée, au cours du temps, sur un capteur de force dynamique et comparé ce profil expérimental de l'impulsion avec les prévisions théoriques de Nesterenko [76]. Lorsque la chaîne n'est soumise à aucune force statique, l'accord est alors très bon, excepté pour les excitations de très petites amplitudes. Pour une force statique non nulle, les prévisions théoriques sont en très bon accord avec les observations expérimentale. Dans tous les cas, aucun paramètre ajustable n'a été introduit dans l'analyse des résultats expérimentaux.

En présence ou non d'une force statique appliquée, la vitesse d'une onde semble être prévue par la théorie de façon très précise. Les mesures de vitesse, pour des forces appliquées non nulles, se répartissent sur une seule et même courbe représentée en fonction de variables adimensionnées. Nous soulignons là encore que, comme pour le profil de l'onde, aucun paramètre ajustable n'a été utilisé.

Dans tous les cas, la taille typique des excitations est de l'ordre de 4 à 5 billes, ce qui est suffisant pour vérifier l'approximation de grande longueur d'onde. Cette taille représente aussi environ un dixième de la longueur totale de la chaîne, signifiant par là même que l'impulsion se propage sur une distance grande devant sa taille tout en conservant sa forme et sa vitesse. Ce travail met ainsi très clairement en évidence la propagation d'ondes solitaires non linéaires, à l'intérieur d'une chaîne de billes en contact de Hertz, même dans la limite de force statique nulle.

Chapitre V

Instabilités d'une couche de matière granulaire vibrée

V.1 Introduction

Lorsqu'une couche horizontale de matière granulaire est soumise à un mouvement vibratoire vertical, elle présente des comportements très variés [1, 129], tels que l'apparition de rouleaux de convection [6, 130, 131, 132], la formation spontanée d'un tas [5, 133, 134, 135, 136, 137] et de poches d'air [138], les excitations de la surface libre (pour un résumé voir la Ref. [8]) et la fluidisation [10, 11, 12]. Plusieurs mécanismes peuvent être à l'origine de ces phénomènes : d'une part, la convection induite par le frottement des particules sur les parois latérales du récipient ou par la présence d'un gaz intersticiel, *e.g.* l'air, et d'autre part, la dissipation d'énergie due aux collisions inélastiques et aux frottements solide–solide entre particules. Quand l'accélération du récipient est plus grande que celle de la gravité, diverses structures peuvent apparaître à la surface de la couche de grains. La nature de ces structures dépend, en particulier, du paramètre sans dimension $\mathcal{N} = h/d$ où h est la hauteur moyenne de la couche de grains et d la taille typique d'une particule.

Lorsque la couche de grains est suffisamment épaisse [1], un tas se forme spontanément à partir d'une surface initialement horizontale. Ce phénomène a plusieurs causes possibles : la convection des grains induite par leur frottement sur les parois latérales du récipient [137, 140] ou la convection due à la présence d'un gaz intersticiel, c.-à-d. l'air [5, 140, 141]. Bien que des études numériques 2D aient modélisé les mouvements convectifs [64] et la formation d'un tas [63] induits par la présence des parois, aucune simulation n'a tenu compte, jusqu'à présent, des effets de l'air. Cependant, les effets du gaz intersticiel sont très importants pour une couche de grains relativement épaisse ($\mathcal{N} \gg d$) composée de particules dont la taille typique est suffisamment faible, c.-à-d. $d < 1\ mm$ [141]. En effet, dans le cas contraire, le gaz « suinte » rapidement entre les grains et ne joue aucun rôle sur la dynamique.

En plus des phénomènes intervenant à l'intérieur même du milieu granulaire vibré, sa surface libre peut présenter plusieurs comportements de nature ondulatoire. A la surface d'un tas possédant une pente assez raide, des ondes progressives peuvent apparaître provenant principalement des mouvements convectifs induits par la présence de l'air et/ou des parois du récipient [142]. Si la couche de grains est mince [2] et si la pente du tas est faible ou inexistante, des ondes stationnaires sont observées à la fois en géométrie quasi-2D [7, 129, 143] et 3D dans l'air [144] et sous vide [145, 146]. Ces ondes stationnaires de surface proviennent soit d'une « instabilité paramétrique [3] » [144, 145, 146, 147], de même nature que celle observée dans les fluides visqueux peu profonds soumis à des vibrations verticales [148, 149], soit de l'interaction de cette dernière avec une « instabilité de doublement de période » [145]. Récemment, des excitations localisées stationnaires, oscillant à la fréquence moitié de la fréquence excitatrice, ont été observées sous vide [9, 150]. Pour toutes ces ondes stationnaires, les effets convectifs dûs à l'air et aux frottements sur les bords sont négligeables. Ces ondes proviennent d'une part des corrélations entre les mouvements des grains, soumis à de nombreuses collisions, et d'autre part du mouvement cohérent entre l'ensemble de la couche de grains et le récipient [145].

A forte accélération, la couche de grains, qu'elle soit mince ou épaisse, subit uniquement

1. Approximativement, pour $\mathcal{N} > 10 - 20$ [129, 139, 140].
2. Typiquement, pour $\mathcal{N} < 10 - 20$ [129, 139, 140].
3. L'excitation est dite « paramétrique » car la force extérieure imposée module les fréquences propres du système. Les ondes stationnaires correspondent alors à des modes d'oscillations de la surface libre et possèdent la propriété caractéristique d'une excitation paramétrique : elles oscillent à la fréquence moitié de la fréquence imposée.

des bifurcations de doublement de période. Des états plus complexes apparaissent alors à 1D [140, 147] et à 2D [145] (voir aussi les Refs [129, 139]), résultant de défauts spatiaux de type « kink[4] » associés à la bifurcation de doublement de période. Ces défauts semblent être des états transitoires avant le régime chaotique. Contrairement à l'instabilité paramétrique, ces instabilités « sous harmoniques[5] » sont telles que la fréquence d'excitation n'impose pas la longueur d'onde des structures spatiales.

Dans ce chapitre, nous présentons une étude expérimentale qualitative de l'apparition de nouvelles instabilités à la surface d'une couche horizontale, relativement épaisse ($50 \lesssim \mathcal{N} \lesssim 200$), de matière granulaire soumise à un mouvement vibratoire vertical. Les grains utilisés sont non cohésifs, de forme quelconque, et possèdent une taille typique relativement faible (entre 60 et 200 μm). La petite taille des grains permet une importante dilatation de la couche, lors de son vol libre, et, par conséquent, rend prépondérant le rôle de l'air. La dynamique d'une telle poudre doit être fortement dissipative car le choix de grains de formes irrégulières permet d'augmenter la dissipation due aux collisions inélastiques et aux frottements solides. En effet, pour des grains de forme régulière et de surface rugeuse, la dissipation due au frottement solide peut devenir négligeable lorsque la couche de grains s'est légèrement fluidisée. Pour des grains de forme quelconque, cette dissipation subsite jusqu'à ce que la fluidisation de la couche devienne importante. Dans cet esprit, nos expériences diffèrent considérablement de celles utilisant des grains de forme régulière [137].

Le comportement dynamique de ce type de matériau granulaire s'avère très riche puisqu'en plus des instabilités déjà observées antérieurement (c.-à-d. la formation spontanée d'un tas [5, 133, 136, 137] et les ondes progressives à sa surface [142]), nous observons l'apparition de nouvelles instabilités. A basse fréquence d'excitation, la formation de « cannelures » à la surface du tas est observée, ainsi que la formation d'hexagones lorsque sa surface est horizontale. A haute fréquence, la surface horizontale du matériau granulaire présente un régime d'ondes stationnaires constituées de lignes de même fréquence que la fréquence excitatrice. Tous ces phénomènes ont pour origine les mouvements convectifs des grains dus à la présence de l'air et sont indépendants des effets dus aux parois latérales. A plus haute fréquence, le comportement des grains peut, en plus du régime convectif, provenir de différents mécanismes, *e.g.* l'excitation paramétrique.

---

4. Un kink est un défaut spatial constitué de deux régions horizontales, de phases relatives différentes, séparées entre elles par une discontinuité de phase.

5. Autre nom donné à l'instabilité de doublement de période.

V.2 Dispositif expérimental

Un récipient, contenant une poudre granulaire, est fixé sur un vibreur électromagnétique Brüel & Kjær 4808. L'ensemble est monté sur un système à pieds réglables afin d'obtenir une bonne horizontalité. L'excitateur engendre des accélérations verticales relativement propres[6] et est piloté par un signal sinusoïdal issu d'un générateur de fonction de précision en fréquence supérieure à $\pm 0,6\%$. L'accélération du récipient est mesurée à l'aide d'un accéléromètre piézo-électrique (Brüel & Kjær 4374) collé sur la partie haute du récipient. L'accéléromètre est relié à un amplificateur de charge (Brüel & Kjær 2635) lui même connecté à un voltmètre permettant la lecture de l'amplitude de l'accélération du récipient. On place à l'aplomb du récipient une caméra vidéo (i2S iMC562BC) ou un appareil photo (Nikon FA) permettant respectivement d'enregistrer sur cassette vidéo (Maxell EX120) ou de photographier sur film (Ilford 400HP5) les divers comportements développés par le matériau granulaire. Une photographie d'un tel dispositif expérimental est représentée sur la Fig. (V-1).

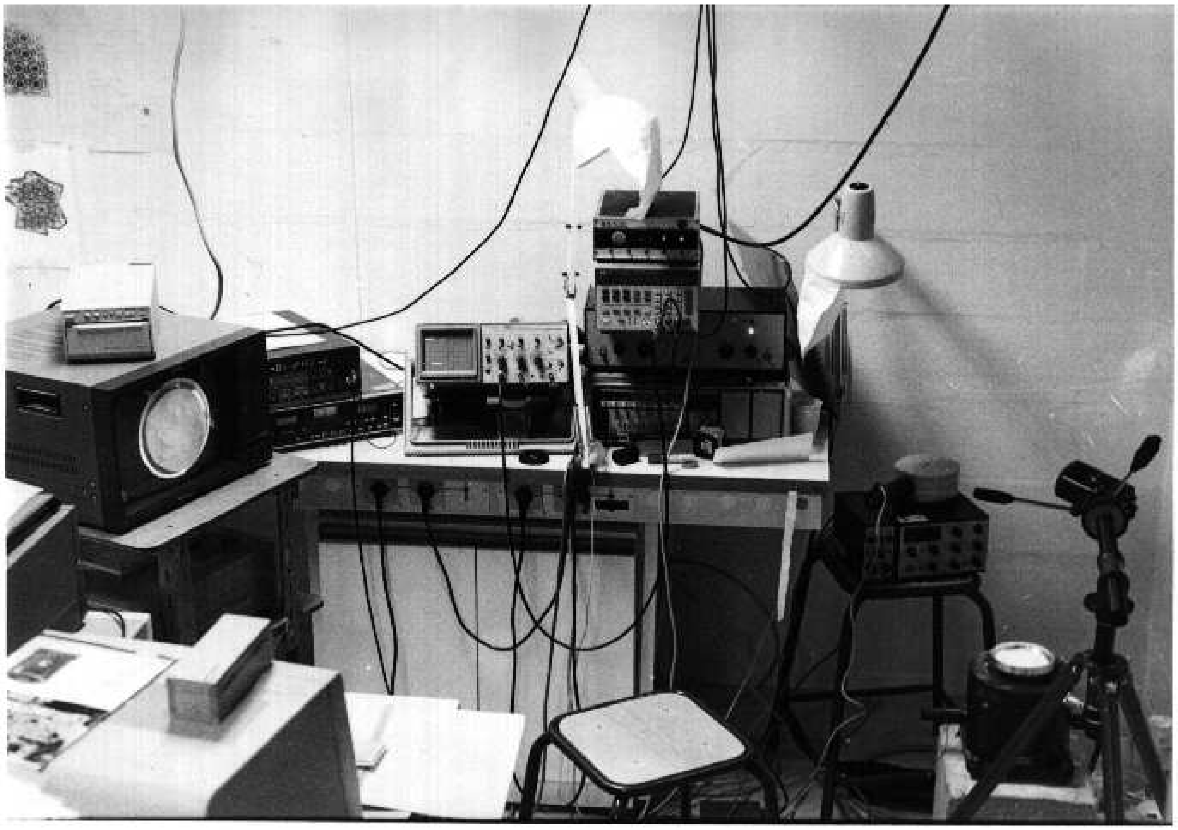


FIG. V-1 – *Photographie du dispositif expérimental. Noter, en bas à droite, la présence du récipient contenant la poudre.*

Plusieurs récipients de formes circulaires (de 80 à 150 mm de diamètre) ou carrées (de 80 à 150 mm de côté) et de différentes hauteurs (de 3 à 150 mm) ont été utilisés. Ces récipients sont remplis jusqu'à différents niveaux (typiquement de 50 à 200 couches de grains) soit par

6. Pour la gamme de fréquence f utilisée ($10 < f < 300$ Hz), l'accélération horizontale a été mesurée inférieure à $1,3\%$ de la composante verticale.

de la poudre d'alumine pure[7] ou de silice[8], soit par du sable du Gange. La granulométrie de ces matériaux varie de 60 à 200 μm. Toutes les expériences sont réalisées en augmentant ou en diminuant l'accélération pour une fréquence f fixée dans la gamme $10 - 300$ Hz. Les mouvements de la surface de la couche de grains sont observés soit directement, soit à l'aide d'un stroboscope. Pour une excitation sinusoïdale verticale du récipient, de fréquence f, on définit le nombre sans dimension Γ comme le rapport de l'amplitude a de l'accélération du récipient sur l'accélération de la gravité g. Il existe donc deux paramètres de contrôle : la fréquence f des excitations verticales avec $10 < f < 300$ Hz et « l'accélération » sans dimension Γ du récipient avec $0 < \Gamma < 12$.

Toutes les expériences présentées dans ce chapitre, sont réalisées avec de la poudre d'alumine dont la dispersion en taille est comprise entre 60 et 120 μm. Cependant, la majorité des comportements développés par cette poudre sont aussi observés pour la poudre de silice et le sable du Gange constitués aussi de grains de formes irrégulières[9] et possédant typiquement la même distribution en taille. Nous avons observé les mêmes types de comportement quel que soit le récipient utilisé, mais les résultats présentés ici concernent, sauf contre indications, un récipient cylindrique de 120 mm de diamètre intérieur et de 10 mm de profondeur rempli par environ 40 g de poudre d'alumine. Le récipient est fabriqué à l'intérieur d'un seul bloc de duralumin afin d'obtenir des mesures précises. La poudre est étalée à l'intérieur du récipient de façon à obtenir une hauteur relativement homogène. Une petite partie de la poudre est trempée dans de l'encre provenant d'une cartouche de stylo–plume et est séchée à 200 $^\circ$C environ pendant une heure. Cette poudre colorée pourra être mélangée (en une petite quantité de l'ordre de 1%) lorsqu'il sera nécessaire de visualiser plus clairement les mouvements des grains.

V.3 Formation spontanée d'un tas de sable

A f fixé, on augmente lentement l'accélération Γ à partir de la valeur nulle. La couche de particules est quasiment rigide et la surface libre horizontale est stable. Lorsque Γ dépasse une valeur critique Γ_c, les grains commencent à bouger et la surface libre horizontale du matériau granulaire devient alors instable. Les grains s'auto–organisent d'eux mêmes spontanément pour former un unique tas symétrique, comme on le voit sur la Fig. (V-2a). Ce tas possède un angle θ_d avec l'horizontal qui correspond à la configuration la plus stable au seuil de l'instabilité[10]. La pente du tas, c.-à-d. l'angle θ_d, est déterminée par l'équilibre dynamique entre les grains constituant les avalanches de surface et la circulation interne des particules fluidisées du bas vers le haut du tas (le régime d'écoulement convectif). Cette interprétation a été proposée pour la première fois par Faraday [133] en 1831 et l'effet de fluidisation par l'air a été récemment mis en évidence par Laroche *et al.* [5]. Nous avons vérifié le mouvement de convection des grains, responsable de la formation du tas, en plaçant, à la périphérie du tas, des particules colorées et en observant leurs trajectoires (voir la Fig. (V-3a)).

7. L'alumine est le nom donné à l'oxyde d'aluminium.
8. La silice est le nom donné au dioxyde de silicium.
9. Aucune mesure n'a été effectuée pour caractériser l'irrégularité de forme des grains.
10. Un tas de grains statique est caractérisé par un angle de repos statique θ_s [151], par rapport à l'horizontale, au dela duquel la tas perd sa nature solide puisque des avalanches apparaissent à sa surface. Pour un tas de grains vibrés, on parle d'un angle de repos dynamique θ_d. Cet angle est comparable à θ_s, mais il est cependant toujours inférieur à θ_s [135, 136, 152] car la pente du tas reste stable lorsque l'amplitude des oscillations est brusquement abaissée.

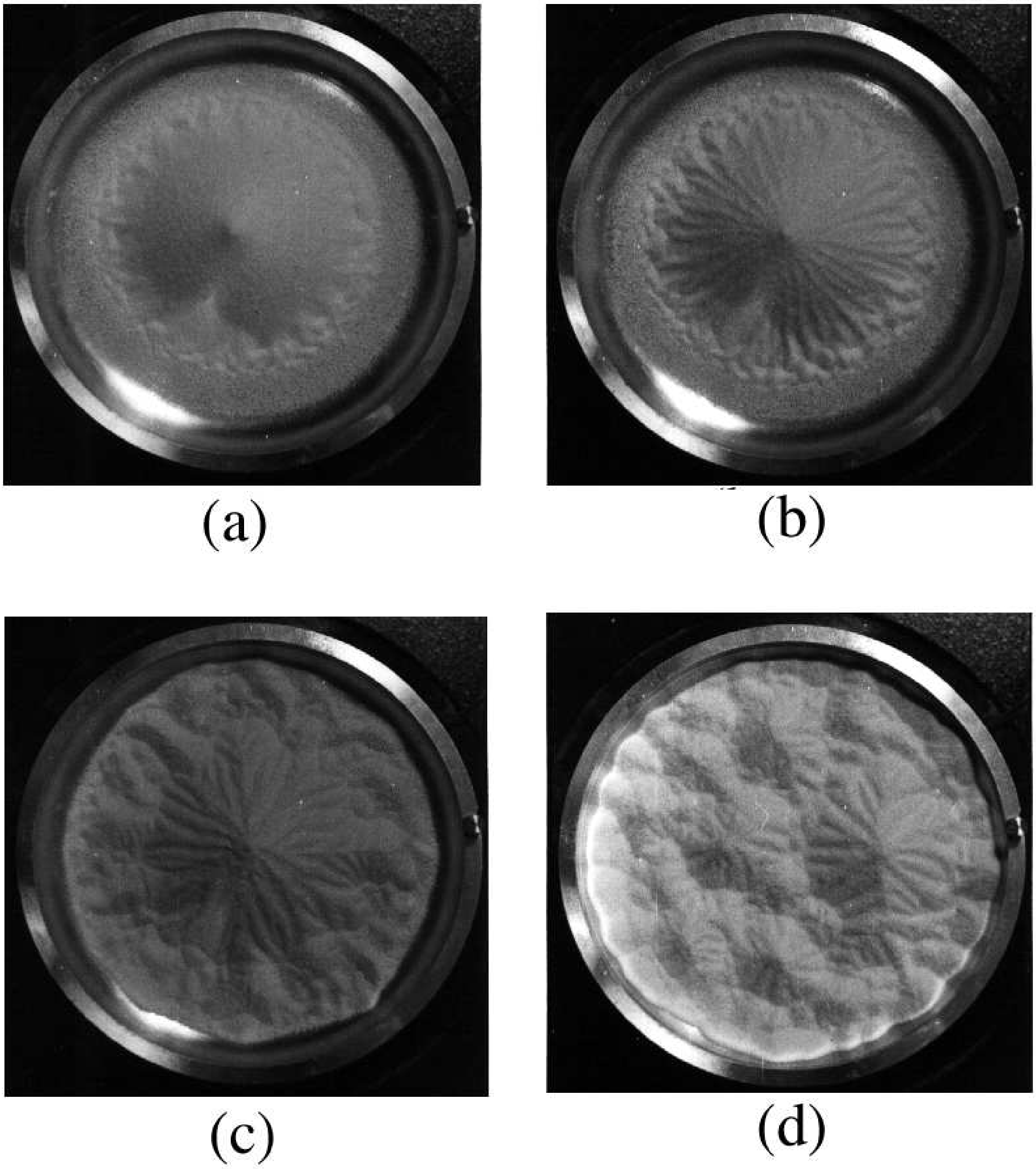


FIG. V-2 – *Vue de dessus d'une série d'instabilités de la surface d'une couche, initialement plane, de poudre d'alumine. Dans tous les cas, la fréquence d'excitation est fixée à* $f = 42\ Hz$ *et la masse de la poudre à l'intérieur du récipient est d'environ* $40\ g$. *(a) Formation spontanée d'un tas unique, due aux mouvements convectifs, pour une accélération du récipient* $\Gamma = 2,87$ *supérieure à* Γ_c. *(b) Apparition de cannelures ou d'ondulations à la surface du tas* ($\Gamma = 3,17$). *(c) Début de l'affaissement du tas, pour une amplitude de vibration plus élevée* ($\Gamma = 3,75$). *(d) Séparation du tas en plusieurs petits tas cannelés à beaucoup plus grande amplitude de vibration* ($\Gamma = 4,16$).

Au seuil Γ_c, nous constatons que le processus de convection est essentiellement confiné au voisinage de la surface du tas (voir la Fig. (V-3b)). Juste au dessus du seuil Γ_c de l'instabilité convective, nous observons qu'une infime partie des particules colorées entre dans la partie centrale à la base du tas[11]. Ainsi, au lieu d'une cellule convective torique, comme le supposait Laroche *et al.* (voir la Fig. (5c) de la Ref. [5]), il apparaît que l'écoulement convectif est limité à l'intérieur d'une couche conique, comme le montre la Fig. (V-3b). Nous avons aussi répété cette expérience avec un récipient pratiquement sous vide. Pour de basses pressions, c.-à-d. inférieures à 10 $Torr$[12] environ, la formation spontanée du tas n'est jamais observée confirmant ainsi que l'effet de l'air est fondamental pour la formation d'un tas de fines particules (voir aussi la Ref. [5]). Ce résultat est en accord avec les expériences [141, 146] montrant que les effets de l'air sur la formation d'un tas convectif persistent jusqu'à des pressions d'environ 10 $Torr$ et pour des grains de tailles inférieures à 1 mm.

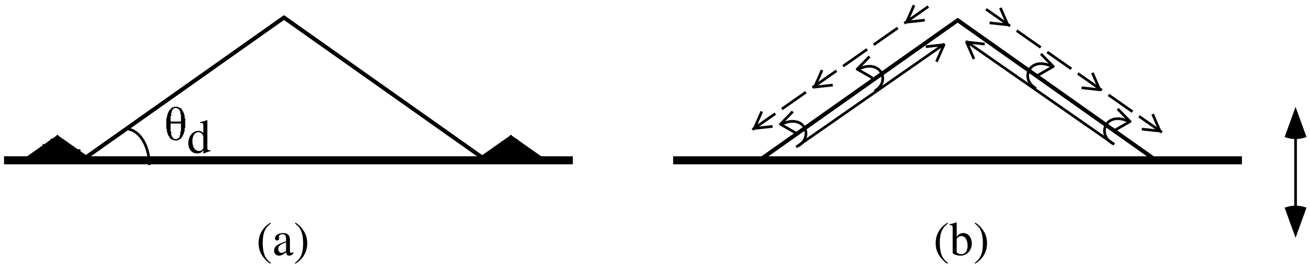


FIG. V-3 – *(a) Schéma en coupe de la condition initiale : à accélération nulle, on place de la poudre colorée à la périphérie d'un tas initialement préparé. (b) Schéma représentant, en coupe, les trajectoires, moyennées au cours du temps, des particules colorées, au seuil Γ_c. Le flux convectif interne (flèches en traits pleins) est compensé par les avalanches de surface (flèches en traits pointillés).*

Intuitivement, l'accélération critique Γ_c, l'angle de repos critique θ_d ainsi que la forme du tas doivent dépendre de nombreux paramètres (*e.g.* la fréquence de forçage, la taille, la forme, la rugosité et la cohésion des grains). Pour tous les grains fins et « secs »[13] utilisés, nous trouvons que le seuil de l'écoulement convectif est $\Gamma_c = 1,17 \pm 0,06$ et est indépendant de la fréquence pour la gamme $20 - 120$ Hz. Pour cette gamme de fréquence, la valeur de Γ_c ne dépend pas non plus de la forme, la taille et le type de grains utilisés [129, 136, 137, 138, 142]. Pour des fréquences plus importantes, Γ_c décroît légèrement (*e.g.* à 160 Hz, $\Gamma_c \simeq 0,74 \pm 0,03$). L'angle de repos θ_d est approximativement égal à 30° pour $f = 40$ Hz et $\Gamma \simeq 1,5 > \Gamma_c$. A plus hautes fréquences ($f > 100$ Hz), l'angle de repos diminue et finalement, vers environ 200 Hz, la surface devient plane. En l'absence d'effet des bords latéraux, le tas varie d'une forme conique (*e.g.* pour le sable, et l'alumine à basse fréquence d'oscillations) à une forme quasiment hémisphérique (*e.g.* pour la silice à basse fréquence et l'alumine à haute fréquence).

---

11. Pour cela, l'accélération est brutalement ramenée à zéro et, à l'aide d'un scalpel, on enlève délicatement et successivement de fines couches de grains, en commençant par le haut du tas ; la coupe se faisant perpendiculairement à son axe de symétrie.

12. Le *Torr* ou *mm de mercure* vaut 133, 3 N/m^2 ou *Pascal.*

13. Il faut entendre par grains « secs », un ensemble de grains non cohésifs sans liquide intersticiel, mais en présence d'un possible gaz intersticiel tel que l'air.

V.4 Ondes progressives à la surface d'un tas de sable

Pour Γ plus élevé, c.-à-d. au dessus de Γ_c, et pour des fréquences d'excitations inférieures à 100 Hz, nous remarquons, vers le bas du tas, une brisure de pente donnant naissance à un tas formé de deux pentes, celle en bas étant la plus raide. Au changement de pente, des gonflements ou bosses apparaissent. Cette corolle circulaire de bosses à la surface du tas reste initialement stabilisée à une certaine hauteur. Mais lorsque $\Gamma = \Gamma_{S_1} > \Gamma_c$, la corolle de gonflements commence à monter le long de la pente du tas, sous la couche d'avalanche sans interférer avec cette dernière. Cette onde progressive ainsi créée disparaît au sommet du tas et réapparaît périodiquement[14] à l'intersection des deux pentes. Ces ondes sont similaires à celles observées par Pak & Behringer [142] pour des matériaux granulaires ayant un angle de repos relativement élevé, c.-à-d. $\theta_d \gtrsim 30^\circ$, typiquement pour des grains non sphériques ou rugueux. Cependant, l'étroite géométrie annulaire de leur expérience ainsi que la taille relativement grande de leurs particules[15] auront dû masquer le phénomène de brisure de pente.

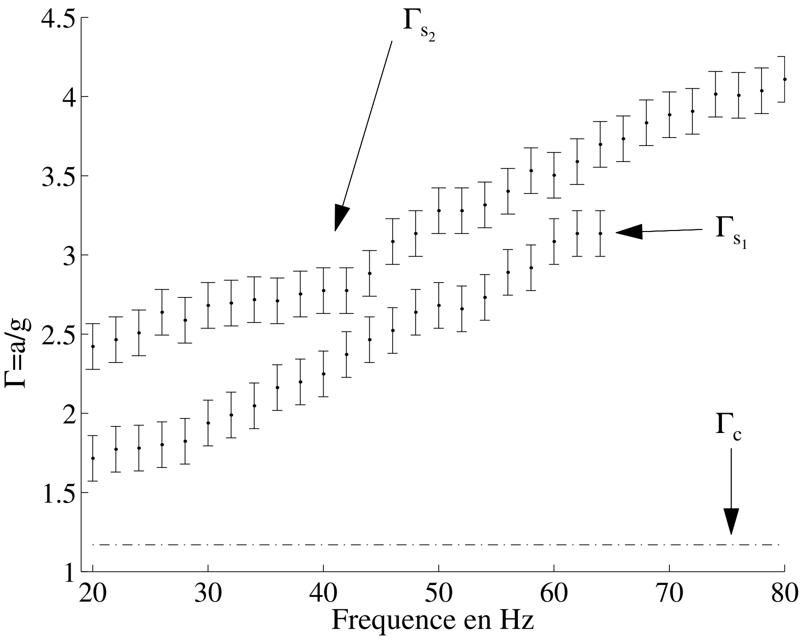


FIG. V-4 – *Diagramme de bifurcation montrant les différentes instabilités de la surface libre de la poudre d'alumine. Pour une fréquence donnée, les valeurs de Γ_c (courbe en traits pointillés), Γ_{S_1} (courbe du milieu) et Γ_{S_2} (courbe du haut) sont respectivement les valeurs des seuils d'apparition du régime convectif, des ondes progressives à la surface du tas (instabilité S_1) et des cannelures à la surface du tas (instabilité S_2). Chaque barre d'erreur a une longueur totale de 0,29 correspondant à l'incertitude sur la mesure de l'accéleration à l'apparition des seuils. Le poids de la poudre pour toutes ces expériences est de 40 g. Il existe, au-dela de la courbe Γ_{S_2} en fonction de f, la transition vers les hexagones. Cette transition n'est pas indiquée sur la figure.*

14. Aucune mesure, concernant la valeur de cette période, n'a été effectuée.
15. La taille de leurs particules est comprise entre 0,2 et 2 mm, c.-à-d. 10 fois la taille de nos particules.

Contrairement au seuil de convection Γ_c, la valeur critique Γ_{S_1} pour l'apparition des ondes progressives à la surface du tas dépend de la fréquence d'excitation. La valeur critique Γ_{S_1} est représentée sur la courbe du milieu de la Fig. (V-4) en fonction de la fréquence d'excitation. Ces valeurs ont été mesurées soit en augmentant Γ, soit en le diminuant. Les seuils d'instabilité Γ_{S_1} sont très légèrement hystérétiques. La dépendance de Γ_{S_1} avec la fréquence étend les résultats de Pak & Behringer qui avaient montré expérimentalement que Γ_{S_1} était fonction de la taille des grains à fréquence donnée [142]. De même l'interprétation du sens ascendant de la propagation des gonflements a été donnée [142], mais leur formation, issue de la brisure de pente du tas, restait jusqu'alors inconnue.

Il est à noter que l'instabilité S_1 conduisant aux ondes progressives à la surface du tas est fondamentalement différente de l'instabilité paramétrique conduisant aux ondes stationnaires observées [144, 145, 147] pour de très fines couches horizontales, c.-à-d. $\theta_d = 0$, de matière granulaire.

V.5 Cannelures à la surface d'un tas de sable

V.5.1 Observations

Si l'on continue à augmenter l'accélération, un nouveau phénomène remarquable se produit. Pour $\Gamma = \Gamma_{S_2} > \Gamma_{S_1} > \Gamma_c$, un ensemble régulier de « rainures » et de « rides » apparaît le long de la surface libre inclinée (voir les Figs. (V-2b) et (V-5)) : la surface conique du tas est plissée à la manière d'une « tôle ondulée ». L'emplacement des rainures et des rides alterne réciproquement et périodiquement avec une période beaucoup plus grande que celle imposée par le vibreur. Ce phénomène de « cannelures » est relativement robuste et est insensible aux petites perturbations extérieures ainsi qu'aux défauts d'horizontalité du système. Ce phénomène a été observé aussi dans la poudre de silice et dans le sable très fin du Gange. Cependant, nous n'observons pas ce comportement lorsque l'expérience est répétée soit avec des billes sphériques de verre ou de zirconium, toutes de diamètres compris entre $0,5$ et $3\ mm$. Bien que l'action de convection due à l'air est très amoindrie pour des particules de l'ordre du millimètre[16], elle subsiste tout de même donnant naissance là encore à la formation spontanée d'un tas (voir aussi les Refs. [142]). L'absence de cannelure sur ce tas provient sans doute du fait que le frottement entre deux grains sphériques est inférieur à celui intervenant entre deux particules de forme irrégulière, et que par conséquent moins d'énergie est dissipée au cours des nombreux contacts. Cela souligne l'importance de la dissipation d'énergie qui sélectionne le motif présenté par le matériau granulaire en réponse à l'excitation qui lui est imposée.

Lorsque l'on augmente encore Γ, le tas s'affaise (voir la Fig. (V-2c)) en créant à sa base une multitude de petits monticules. Finalement, le tas se divise alors en plusieurs petits tas cannelés interagissant entre eux de manière désordonnée (voir la Fig. (V-2d)).

Il est à noter que tous ces comportements (et notamment le phénomène de cannelure) ne sont pas observés lorsque l'expérience est répétée avec un récipient sous vide à une pression inférieure à 10 $Torr$. Ainsi, les effets dûs à l'air et à la forme irrégulière des grains semblent être *tous deux* nécessaires pour la formation de cannelures à la surface d'un tas.

Le valeur critique de Γ_{S_2} est représentée sur la Fig. (V-4) en fonction de la fréquence

16. L'air est plus facilement piégée à l'intérieur d'une couche épaisse de matériau granulaire constituée de grains de petite taille, cette propriété provenant de la viscosité de l'air [141].

d'excitation. Comme pour Γ_{S_1}, le seuil d'instabilité Γ_{S_2} est très légèrement hystérétique.

FIG. V-5 – *Grossissement de la Fig. (V-2b) mettant en evidence la série successive de « rainures » et de « rides » à la surface du tas cannelé. Noter la présence des petits monticules, à la base du tas, à l'extrémité des rainures. A l'extrème gauche de la figure, on voit l'accéléromètre collé sur la partie haute du récipient.*

V.5.2 Interprétations

L'origine des cannelures provient de l'intensification de l'écoulement convectif juste en dessous de la surface du tas. En effet, pour des accélérations $\Gamma > \Gamma_{S_2}$ et pendant une période, il y a beaucoup plus de particules qui sont convectées vers le haut du tas que de particules qui tombent, le long de la surface libre, à cause des avalanches. Cela a pour conséquence de déstabiliser le tas. La symétrie azimutale le long du tas est alors brisée et l'angle de repos devient dépendant de l'angle azimutal. Nous observons que la pente des rides est légèrement plus faible que la pente que possédait le tas juste avant l'apparition des cannelures, c.-à-d. pour $\Gamma_c < \Gamma < \Gamma_{S_2}$, tandis que la pente des rainures est légèrement plus grande. Cette différence est suffisante pour accroître les avalanches de surface qui sont compensées, en retour, par l'augmentation de l'écoulement convectif. En insérant à la périphérie du tas cannelé des particules colorées, nous observons que le mouvement est restreint à l'intérieur d'une petite couche conique comprenant la surface libre du tas (voir le schéma de la Fig. (V-3b)). Comme les rainures et les rides possèdent des pentes de valeurs différentes, les taux de particules tombant le long de ces deux pentes sont inégaux et donnent alors naissance aux petits monticules à la base du tas à la fin des rainures (voir la Fig. (V-5)). En réponse à cet effet, l'écoulement convectif local à la base du tas est alors affecté. Les rides deviennent alors des rainures et *vice versa*. Cette interprétation explique pourquoi nous observons une alternance périodique entre les rides et les rainures. Au seuil d'instabilité, la longueur d'onde de la cannelure, c.-à-d. la séparation angulaire entre le milieu de deux rides ou de deux rainures successives, décroît lorsque la fréquence des vibration augmente. Ce comportement est en accord qualitatif avec la formation de motifs dans d'autres systèmes dissipatifs [153].

V.6 Hexagones et lignes à la surface d'un milieu granulaire vibré

Si l'on continue à augmenter $\Gamma > \Gamma_{S_2}$, chaque petit tas cannelé de la Fig. (V-2d)) interagit plus vigoureusement avec ses voisins, les tas de plus grandes tailles donnent alors naissance à des tas de plus petites tailles de sorte que la hauteur de tous ces tas devient homogène. Des nucléations et des anihilations[17] interviennent sans cesse de façon chaotique. Un tel ensemble de tas n'est donc pas une structure stable. Lorsque Γ atteint une valeur critique $\Gamma = \Gamma_H > \Gamma_{S_2} > \Gamma_{S_1} > \Gamma_c$, un ensemble d'hexagones apparaît, comme le montre la Fig. (V-6). La transition de l'ensemble des tas, à base circulaire, vers les hexagones nous rappele étrangement la construction de Voronoï–Dirichlet[18] permettant de paver le plan avec des polygones en partant de disques non nécessairement en contact (voir la Fig. (V-7)). Les hexagones apparaissent « fluidisés » lorsqu'ils sont visualisés directement (voir la Fig. (V-6a)). En utilisant, un stroboscope, à la même fréquence que celle de l'excitation, on observe aussi une phase « condensée » (voir la Fig. (V-6b)), difficilement visualisable directement puisque la « durée de vie » de cette phase est 2 à 3 fois plus faible que celle de la phase fluidisée.

17. Certains tas sont absorbés par leurs voisins, tandis que d'autres en créent.
18. Pour une telle construction, voir, par exemple, la Ref. [154].

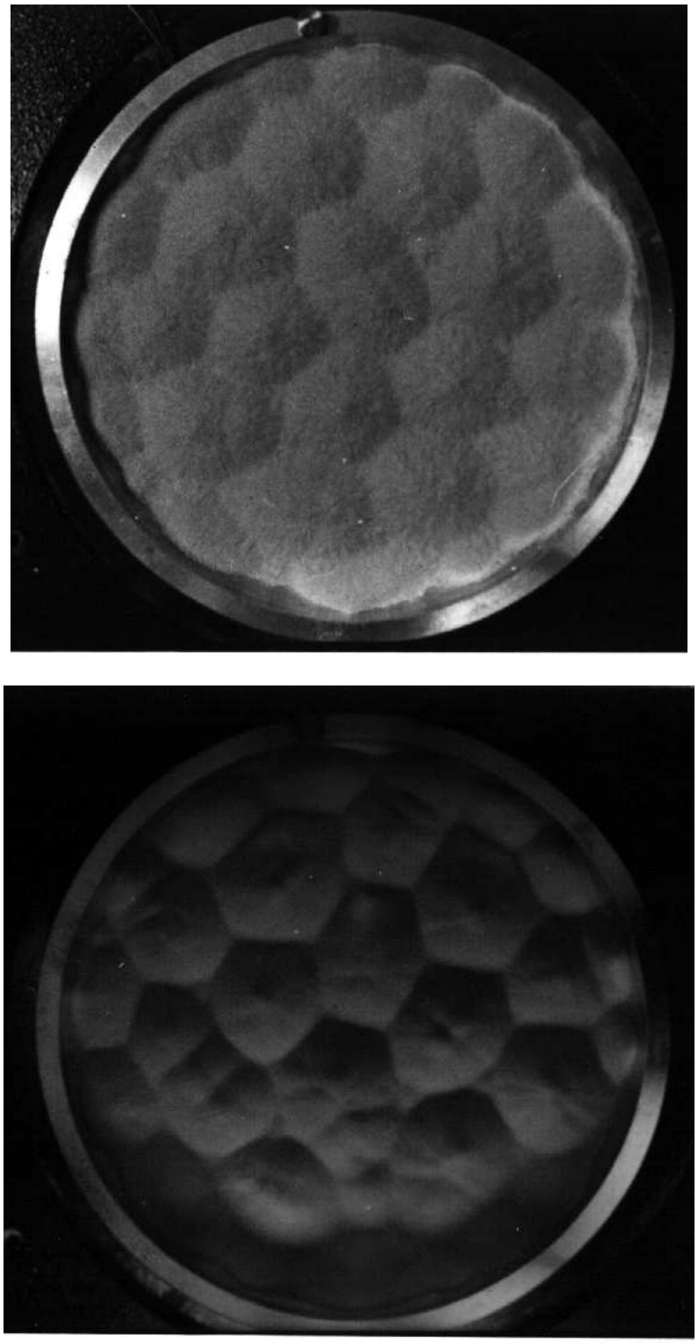


FIG. V-6 – *Instabilité de la surface plane de la poudre d'alumine de masse* 40 g, *pour* f = 28 Hz *et* $\Gamma = 4,26$. *En haut : hexagones fluidisés visualisés directement ; en bas : hexagones condensés visualisés avec un stroboscope de fréquence* 28 Hz. *On peut remarquer sur les deux figures la présence de défauts (pentagones). La durée de la phase fluidisée est* 2 *à* 3 *fois plus importante que celle de la phase compacte qui dure environ* 5 *à* 6 s, *lorsqu'elle est visualisée avec le stroboscope.*

Pour une petite hauteur de poudre dans le récipient, c.-à-d. une masse d'environ 6 g, la longueur d'onde des hexagones diminue lorsque la fréquence augmente de 20 à 50 Hz environ. Au–dela, on n'observe plus d'hexagones. Pour une plus grande hauteur de poudre, c.-à-d. une masse d'environ 40 g, les hexagones disparaissent à une fréquence plus basse, c.-à-d. $f \simeq 40$ Hz. A fréquence et accélération données, la longueur d'onde des hexagones augmente lorsque la quantité de poudre, à l'intérieur du récipient, augmente.

Enfin, pour des accélérations beaucoup plus grandes que le seuil d'apparition des hexagones, les mouvements à l'intérieur de la poudre granulaire deviennent complètement désordonnés.

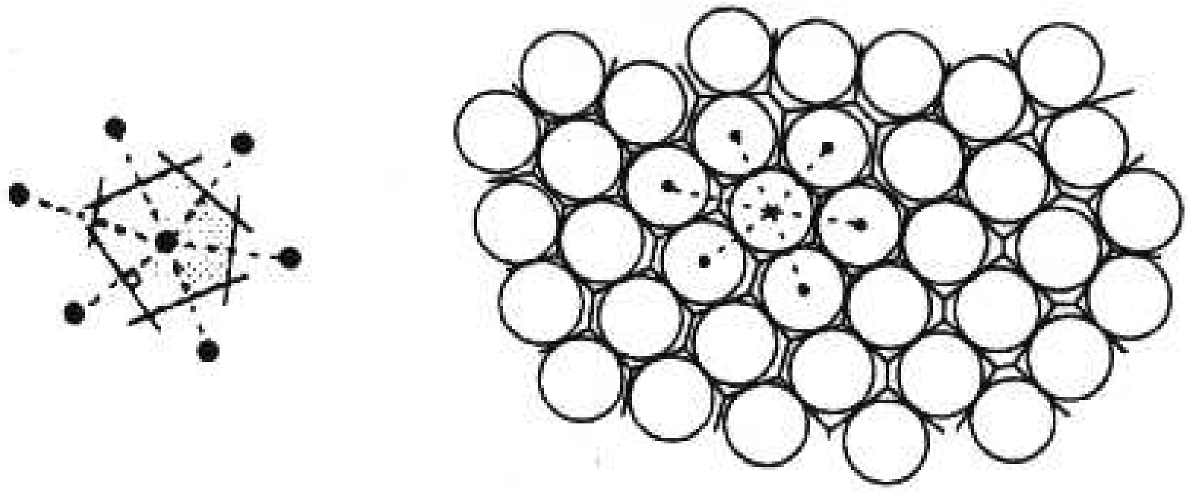


FIG. V-7 – *Schéma de principe du pavage de Voronoï, d'après la Ref. [154]. Partant de l'ensemble de sommets des tas (ou sites), à base circulaire, on trace les médiatrices des sites pris deux à deux. Les plus petites cellules traçées autour de chaque site réalisent un pavage continu du plan. Elles permettent de définir la notion de proches voisins. On peut montrer que, dans un plan, le nombre moyen de côtés d'un pavage aléatoire est six. Les défauts les plus simples à partir des hexagones sont les pentagones et les heptagones.*

Plaçons nous maintenant à beaucoup plus haute fréquence, c.-à-d. $f > 100Hz$, et au seuil de l'instabilité convective Γ_c. L'angle de repos θ_d de la poudre d'alumine diminue et finalement vers 200 Hz, la surface devient plane. Pour ces fréquences, en augmentant l'accélération au dela d'une certaine valeur supérieure à Γ_c, nous observons[19], sur la surface plane, un ensemble d'ondes stationnaires, constituées de lignes, oscillant à la même fréquence que la fréquence excitatrice (voir la Fig. (V-8)). Pour des accélérations beaucoup plus grandes que le seuil d'apparition des lignes, le mouvement à l'intérieur de la poudre granulaire devient complètement fluidisé.

Ces motifs (lignes et hexagones) ressemblent à ceux observés à la surface des fluides visqueux excités paramétriquement [148, 149]. Cette apparente ressemblance provient de l'importante dissipation d'énergie présente dans le fluide visqueux ou dans le matériau granulaire. La viscosité dans les fluides fournit la source de dissipation nécessaire à la selection des différents motifs à la surface du fluide. Dans les milieux granulaires, ce sont les collisions inélastiques

19. A l'aide d'un stroboscope de fréquence identique à celle de l'excitation.

et le frottement entre les grains qui jouent le rôle de la viscosité. Ainsi, la présence de particules à surfaces rugueuses et de formes quelconques permet d'augmenter considérablement la dissipation d'énergie au sein du matériau. En outre, l'apparition de lignes et d'hexagones à la surface d'un matériau granulaire a déjà été observée par Melo *et al.* [144, 145]. Cependant, nos « lignes » sont à la même fréquence f que la fréquence excitatrice tandis que celles observées dans les Refs. [144, 145] sont à fréquence moitié $f/2$. De plus, la nature de nos motifs spatiaux sont fondamentalement différents de ceux observés par Melo *et al.* Leurs motifs proviennent principalement[20] d'instabilités paramétriques de la surface libre d'une très fine couche de matière granulaire, instabilités de même nature que celles présentes à la surface des fluides peu profonds : les instabilités paramétriques de Faraday. Nos motifs proviennent essentiellement des mouvements convectifs des grains dûs à la présence d'un gaz intersticiel, c.-à-d. l'air. En effet, si l'on répete les expériences avec un récipient sous vide, c.-à-d. de pression $P \lesssim 10\ Torr$, d'une part, les hexagones ne sont jamais observés et d'autre part, les lignes de fréquence f disparaissent au profit de lignes sous harmoniques, c.-à-d. de fréquence $f/2$, issue, cette fois-ci, de l'instabilité paramétrique. Les motifs observés par Melo *et al.* apparaissent à la fois avec un récipient sous vide[21] [145] ou en présence d'air [144] car la hauteur de leur couche de particules est trop faible et la taille typique de leurs particules trop grosse[22] pour que les effets dûs à l'air soient prépondérants.

V.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en évidence l'apparition de nouvelles instabilités à la surface d'une couche épaisse de matière granulaire constituée de grains fins, de forme quelconque, soumise à une excitation sinusoïdale verticale. A basse fréquence, des cannelures à la surface d'un tas conique et des hexagones à la surface d'une couche horizontale ont été observés. A haute fréquence, la surface horizontale du matériau granulaire présente un régime d'ondes stationnaires, constituées de lignes, oscillant à la même fréquence que la fréquence excitatrice. Tous ces phénomènes ont lieu pour des matériaux granulaires très dissipatifs et ont pour origine les mouvements convectifs des grains dûs à la présence de l'air. A plus haute fréquence, le comportement des grains peut, en plus du régime convectif, provenir de différents mécanismes, *e.g.* l'excitation paramétrique.

Le comportement dynamique d'un matériau granulaire s'avère alors très riche puisqu'en plus des nouvelles instabilités décrites ci–dessus, ce matériau présente aussi d'autres instabilités découvertes antérieurement [5, 136, 142] : la formation spontanée d'un tas (instabilité convective C) et les ondes progressives à sa surface (instabilité S_1).

Le phénomène de cannelures à la surface du tas est très intéressant car, mis à part le fait qu'il rende le tas polygonal, il révèle que l'intense mouvement convectif des grains est confiné à l'intérieur d'une très fine couche de matière granulaire comprenant la surface libre du tas.

L'explication théorique de ces instabilités ainsi que le seuil « universel » ($\Gamma_c \simeq 1,17$) des mouvements convectifs semblent être des problèmes ouverts fort intéressants.

---

20. En réalité, leurs hexagones proviennent de l'interaction entre une instabilité de doublement de période et l'instabilité paramétrique, engendrant chacune deux fréquences de forcages effectives [145].

21. Leurs expérience sont réalisées à une pression de $0,1\ Torr$.

22. La hauteur adimensionnée $\mathcal{N}$ de leur couche de particules est telle que $\mathcal{N} < 20$.

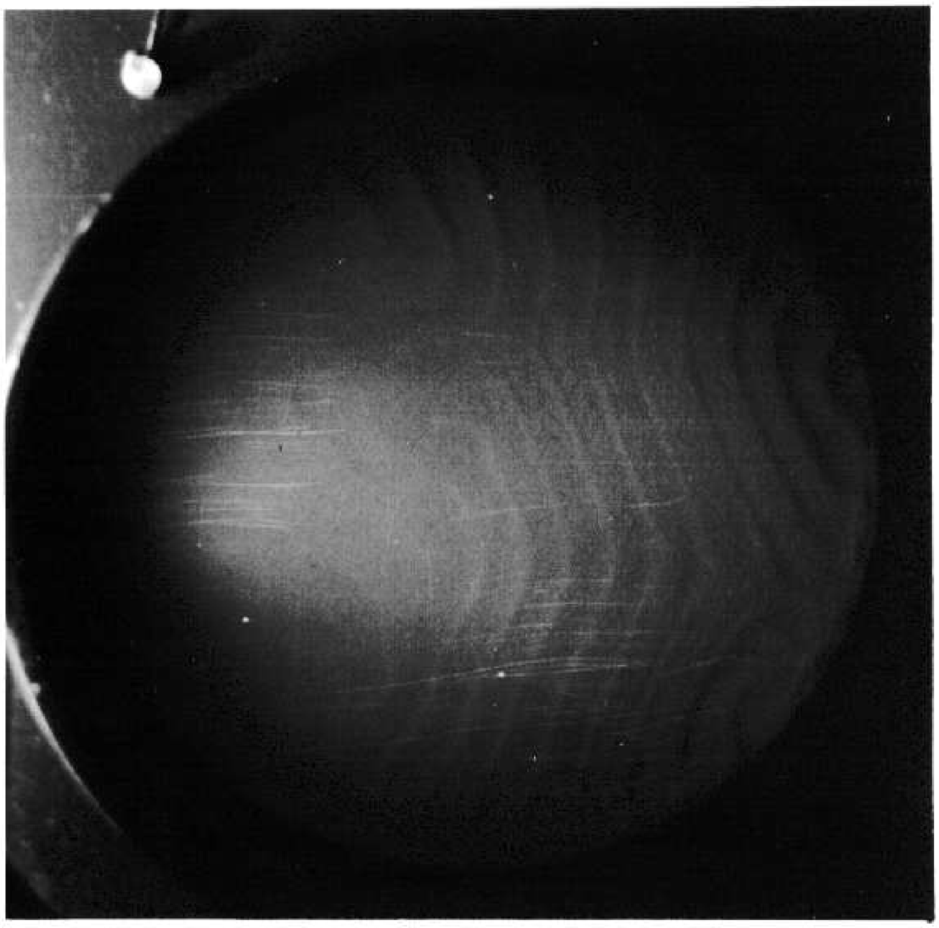


FIG. V-8 – *Instabilité de la surface plane de la poudre d'alumine de masse* 100 g, *à haute fréquence* ($f = 215\ Hz$), *pour* $\Gamma = 1,4 > \Gamma_c$, *donnant naissance à l'apparition de lignes. Ces ondes stationnaires, de même fréquence que celle de l'excitation, sont visualisées à l'aide d'un stroboscope* ($f = 215\ Hz$). *Dans ce cas, la formation spontanée du tas n'a pas eu lieu pour* $\Gamma = \Gamma_c$. *Le récipient utilisé est un récipient cylindrique de* 96 mm *de diamètre et de* 48 mm *de profondeur.*

Bibliographie

[1] H. M. Jaeger, S. R. Nagel, et R. P. Behringer, « *Granular solids, liquids and gases* », dans *Rev. Modern Phys.*, vol. **68** n° 4, 1996, p. 1259–1273.

[2] H. M. Jaeger et S. R. Nagel, « *Physics of the granular state* », dans *Science*, vol. **255**, 1992, p. 1523–1531.

[3] T. Travers, D. Bideau, A. Gervois, J. P. Troadec, et J. C. Messager, « *Uniaxial compression effects on 2D mixtures of "hard" and "soft" cylinders* », dans *J. Phys. A*, vol. **19**, 1986, p. L1033–L1038.

[4] J. P. Bouchaud, M. Cates, et P. Claudin, « *Stress distribution in granular media and non linear wave equations* », dans *J. Phys. (Paris)*, vol. **5**, 1995, p. 639.

[5] C. Laroche, S. Douady, et S. Fauve, « *Convective flow of granular masses under vertical vibrations* », dans *J. Phys. (Paris)*, vol. **50** n° 7, 1989, p. 699–706.

[6] E. E. Ehrichs, H. M. Jaeger, G. S. Karczmar, J. B. Knight, V. Y. Kuperman, et S. R. Nagel, « *Granular convection observed by magnetic resonance imaging* », dans *Science*, vol. **267**, 1995, p. 1632–1634.

[7] S. Fauve, S. Douady et C. Laroche, « *Collective behaviours of granular masses under vertical vibrations* », dans *J. Phys. (Paris) Colloq. C3*, vol. **50**, 1989, p. 187–191.

[8] G. B. Lubkin, « *Oscillating granular layers produce stripes, squares, hexagons ...* », dans *Phys. Today*, vol. **48**, 1995, p. 17–19.

[9] P. B. Umbanhowar, F. Melo, et H. L. Swinney, « *Localized excitations in a vertically vibrated granular layer* », dans *Nature*, vol. 382, 1996, p. 793–796.

[10] S. Luding, E. Clément, A. Blumen, J. Rajchenbach, et J. Duran, « *Studies of columns of beads under external vibrations* », dans *Phys. Rev. E*, vol. **49** n° 2, 1994, p. 1634–1646.

[11] S. Warr, J. M. Huntley, et G. T. H. Jacques, « *Fluidization of a two–dimensional granular system: Experimental study and scaling behavior* », dans *Phys. Rev. E*, vol. **52** n° 5, 1995, p. 5583–5595.

[12] A. Goldshtein, M. Shapiro, L. Moldavsky, et M. Fichman, « *Mechanics of collisional motion of granular materials. Part 2. Wave propagation through vibrofluidized granular layers.* », dans *J. Fluid Mech.*, vol. **287**, 1995, p. 349–382.

[13] L. D. LANDAU et E. M. LIFSHITZ, *Theory of Elasticity*, Oxford, Pergamon Press, 3e éd., 1986.

[14] A. E. H. LOVE, *A Treatrise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 4e éd., 1944.

[15] S. P. TIMOSHENKO et J. N. GOODIER, *Theory of Elasticity*, Singapore, McGraw–Hill, 3e éd., 1970.

[16] B. LEROY, « *Collision between two balls accompanied by deformation: A qualitative approach to Hertz's theory* », dans *Am. J. Phys.*, vol. **53** no 4, 1985, p. 346–349.

[17] J. F. MULLIGAN, « *Heinrich Hertz and the development of physics* », dans *Phys. Today*, vol. **42** no 3, 1989, p. 50–57.

[18] H. HERTZ, « *On the contact of elastic solids* », dans *Miscellaneous Papers*, London, Macmillan, 1896, ch. 5, p. 146–183.

[19] J. BOUSSINESQ, « *Comment se répartit, entre les divers points de sa petite base d'appui, le poids d'un corps dur, à surface polie et convexe, posé sur un sol horizontal élastique* », dans *Compt. Rend. Acad. Sci.*, vol. **XCVI**, 1883, p. 245–248.

[20] K. L. JOHNSON, *Contact Mechanics*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1985.

[21] F. HERRMANN et M. SEITZ, « *How does the ball-chain work?* », dans *Am. J. Phys.*, vol. **50** no 11, 1982, p. 977–981.

[22] J. M. LIFSHITZ et H. KOLSKY, « *Some experiments on anelastic rebound* », dans *J. Mech. Phys. Solids*, vol. **12**, 1964, p. 35–43.

[23] S. C. HUNTER, « *Energy absorbed by elastic waves during impact* », dans *J. Mech. Phys. Solids*, vol. **5**, 1957, p. 162–171.

[24] P. VILLAGGIO, « *The rebound of an elastic sphere against a rigid wall* », dans *J. of Appl. Mech.*, vol. **63**, 1996, p. 259–263.

[25] I. S. GRADSHTEYN et I. M. RYZHIK, *Table of Integrals, Series, and Products*, London, Academic Press, 5e éd., 1965.

[26] H. DERESIEWICZ, « *A note on Hertz's theory of impact* », dans *Acta Mech.*, vol. **6**, 1968, p. 110–112.

[27] C. V. RAMAN, « *The photographic study of impact at minimal velocities* », dans *Phys. Rev.*, vol. **12**, 1918, p. 442–447.

[28] J. REED, « *Energy losses due to elastic wave propagation during an elastic impact* », dans *J. Phys. D*, vol. **18**, 1985, p. 2329–2337.

[29] J. P. A. TILLETT, « *A study of the impact on spheres of plates* », dans *Proc. Phys. Soc. B*, vol. **67**, 1954, p. 677–688.

[30] R. SONDERGAARD, K. CHANEY, et C. E. BRENNEN, « *Measurements of solid spheres bouncing off flat plates* », dans *J. of Appl. Mech.*, vol. **57**, 1990, p. 694–699.

[31] C. Zener, « *The intrinsic inelasticity of large plates* », dans *Phys. Rev.*, vol. **59**, 1941, p. 669–673.

[32] M. G. Koller et H. Kolsky, « *Waves produced by the elastic impact of spheres on thick plates* », dans *Int. J. Solids Structures*, vol. **23** n° 10, 1987, p. 1387–1400.

[33] G. Kuwabara et K. Kono, « *Restitution coefficient in a collision between two spheres* », dans *Jap. J. of Appl. Phys.*, vol. **26** n° 8, 1987, p. 1230–1233.

[34] J.-M. Hertzsch, F. Spahn, et N. V. Brilliantov, « *On low-velocity collisions of viscoelastic particles* », dans *J. Phys. II (Paris)*, vol. **5** n° 11, 1995, p. 1725–1738.

[35] N. V. Brilliantov, F. Spahn, J.-M. Hertzsch, et T. Pöschel, « *Model for collisions in granular gases* », dans *Phys. Rev. E*, vol. **53** n° 5, 1996, p. 5382–5392.

[36] F. G. Bridges, A. Hatzes, et D. N. C. Lin, « *Structure, stability and evolution of Saturn's rings* », dans *Nature*, vol. **309**, 1984, p. 333–335.

[37] A. P. Hatzes, F. G. Bridges, et D. N. C. Lin, « *Collisional properties of ice spheres at low impact velocities* », dans *Mon. Not. R. astr. Soc.*, vol. **231**, 1988, p. 1091–1115.

[38] K. D. Supulver, F. G. Bridges, et D. N. C. Lin, « *The coefficient of restitution of ice particles in glancing collisions: Experimental results for unfrosted surfaces* », dans *Icarus*, vol. **113**, 1995, p. 188–199.

[39] W. Goldsmith, *Impact*, London, Arnold, 1960.

[40] D. Tabor, « *A simple theory of static and dynamic hardness* », dans *Proc. Roy. Soc. A*, vol. **192**, 1948, p. 247–274.

[41] J. P. Andrews, « *Theory of collision of spheres of soft metals* », dans *Phil. Mag. Série 7*, vol. **9**, 1930, p. 593–610.

[42] Y. M. Tsai et H. Kolsky, « *A study of the fractures produced in glass blocks by impact* », dans *J. Mech. Phys. Solids*, vol. **15**, 1967, p. 263–278.

[43] O. R. Walton, « *Numerical simulation of inelastic, frictional particle–particle interactions* », dans M. C. Roco (éd.), *Particulate two–phase flow*, Boston, Butterworth–Heinemann, 1993, p. 884–911.

[44] A. Lobkovsky, S. Gentges, H. Li, D. Morse, et T. A. Witten, « *Scaling properties of stretching ridges in a crumpled elastic sheet* », dans *Science*, vol. **270**, 1995, p. 1482–1485.

[45] A. E. Lobkovsky et T. A. Witten, « *Properties of ridges in elastic membranes* », dans *Phys. Rev. E*, vol. **55** n° 2, 1997.

[46] W. R. Young, Communication privée.

[47] M. Adda–Bedia, Y. Pomeau, et W. R. Young, Dynamic solutions of the impact problem, Preprint, 1997.

[48] C. K. K. Lun et S. B. Savage, « *The effects of an impact velocity dependent coefficient of restitution on stresses developed by sheared granular materials* », dans *Acta Mech.*, vol. **63**, 1986, p. 15–44.

[49] P. K. Haff, « *Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon* », dans *J. Fluid Mech.*, vol. **134**, 1983, p. 401–430.

[50] C. S. Campbell, « *Rapid granular flows* », dans *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. **22**, 1990, p. 57–92.

[51] J. Lee, « *Scaling behavior of granular particles in a vibrating box* », dans *Physica A*, vol. **219**, 1995, p. 305.

[52] S. McNamara et W. R. Young, « *Dynamics of freely evolving, two-dimensional granular medium* », dans *Phys. Rev. E*, vol. **53** n° 5, 1996, p. 5089–5100.

[53] I. Goldhirsch et G. Zanetti, « *Clustering instability in dissipative gases* », dans *Phys. Rev. Lett.*, vol. **70**, 1993, p. 1619–1622.

[54] S. McNamara et W. R. Young, « *Inelastic collapse and clumping in a one-dimensional granular medium* », dans *Phys. Fluids A*, vol. **4** n° 3, 1992, p. 496–504.

[55] B. Bernu et R. Mazighi, « *One-dimensional bounce of inelastically colliding marbles on a wall* », dans *J. Phys. A*, vol. **23**, 1990, p. 5745–5754.

[56] P. Constantin, E. Grossman, et M. Mungan, « *Inelastic collisions of three particles on a line as two-dimensional billiard* », dans *Physica D*, vol. **83**, 1995, p. 409–420.

[57] S. McNamara et W. R. Young, « *Inelastic collapse in two dimensions* », dans *Phys. Rev. E*, vol. **50** n° 1, 1994, p. R28–R31.

[58] J. A. Zukas et T. Nicholas, *Impact Dynamics*, New York, J. Wiley & Sons, 1982.

[59] S. F. Foerster, M. Y. Louge, H. Chang, et K. Allia, « *Measurements of the collision properties of small spheres* », dans *Phys. Fluids*, vol. **6** n° 3, 1994, p. 1108–1115.

[60] A. D. Bernstein, « *Listen to the coefficient of restitution* », dans *Am. J. Phys.*, vol. **45** n° 1, 1977, p. 41–44.

[61] A. D. Bernstein, « *Reply to "Comment on "Listen to the coefficient of restitution" "* », dans *Am. J. Phys.*, vol. **46** n° 9, 1978, p. 952.

[62] P. A. Smith, C. D. Spencer, et D. E. Jones, « *Microcomputer listens to the coefficient of restitution* », dans *Am. J. Phys.*, vol. **49** n° 2, 1981, p. 136–140.

[63] J. Lee, « *Heap formation in two-dimensionnal granular media* », dans *J. Phys. A*, vol. **27**, 1994, p. L257–L262.

[64] Y.-H. Taguchi, « *New origin of a convective motion: Elastically induced convection in a granular materials* », dans *Phys. Rev. Lett.*, vol. **69** n° 9, 1992, p. 1367–1370.

[65] Y.-H. TAGUCHI, « *Powder turbulence: Direct onset of turbulent flow* », dans *J. Phys. II France*, vol. **2**, 1992, p. 2103–2114.

[66] J. SCHÄFER, S. DIPPEL, et D. E. WOLF, « *Force schemes in simulations of granular materials* », dans *J. Phys. I (Paris)*, vol. **6**, 1996, p. 5–20.

[67] S. LUDING, E. CLÉMENT, A. BLUMEN, J. RAJCHENBACH, et J. DURAN, « *Anomalous energy dissipation in molecular–dynamics simulations of grains: The "detachment" effect* », dans *Phys. Rev. E*, vol. **50** n° 5, 1994, p. 4113–4122.

[68] W. R. MELLEN, « *Superball rebound projectiles* », dans *Am. J. Phys.*, vol. **36**, 1968, p. 845.

[69] W. G. HARTER et AL., « *Velocity amplification in collision experiments involving superballs* », dans *Am. J. Phys.*, vol. **39**, 1971, p. 656–663.

[70] J. L. SPRADLEY, « *Velocity amplification in vertical collisions* », dans *Am. J. Phys.*, vol. **55** n° 2, 1987, p. 183–184.

[71] J. WALKER, « *Etonnants rebonds* », dans *Pour la science*, vol. **134**, 1988, p. 126–141.

[72] F. HERRMANN et P. SCHMÄLZLE, « *Simple explanation of a well–knowm collision experiment* », dans *Am. J. Phys.*, vol. **49** n° 8, 1981, p. 761–764.

[73] M. REINSCH, « *Dispersion–free linear chains* », dans *Am. J. Phys.*, vol. **62** n° 3, 1994, p. 271–278.

[74] E. B. KREMER et A. Y. FIDLIN, « *One–dimensional dynamical continuum model of a free–flowing granular medium* », dans *Sov. Phys. Dokl.*, vol. **34** n° 12, 1989, p. 1063–1065.

[75] A. SHUKLA et C. DAMANIA, « *Experimental investigation of wave velocity and dynamic contact stresses in an assembly of disks* », dans *J. Expt. Mech.*, vol. **27** n° 3, 1987, p. 268–281.

[76] V. F. NESTERENKO, « *Propagation of nonlinear compression pulses in granular media* », dans *J. of Appl. Mech. and Tech. Phys.*, vol. **5**, 1983, p. 733–743.

[77] A. N. LAZARIDI et V. F. NESTERENKO, « *Observation of a new type of solitary waves in a one–dimensional granular medium* », dans *J. of Appl. Mech. and Tech. Phys.*, vol. **26** n° 3, 1985, p. 405–408.

[78] M. H. SADD, Q. TAI, et A. SHUKLA, « *Contact law effects on wave propagation in particulate materials using distinct element modelling* », dans *Int. J. Non–Linear Mechanics*, vol. **28** n° 2, 1993, p. 251–265.

[79] S. LUDING, Communication privée.

[80] S. LUDING, *Models and Simulations of Granular Materials*, Thèse, Universität Freiburg, 1994.

[81] S. Luding, E. Clément, A. Blumen, J. Rajchenbach, et J. Duran, « *Interaction laws and the detachment effect in granular media* », dans F. Family, P. Meakin, B. Sapoval, et R. Wool (éds.), *Fractal aspects of materials*, vol. **367**, Pittsburgh, Pennsylvania, Materials Research Society, Symposium Proceedings, 1995, p. 495–500.

[82] K. Iida, « *The velocity of elastic waves in sand* », dans *Bull. Earthquake Res. Int. (Tokyo)*, vol. **16**, 1938, p. 131–145.

[83] K. Iida, « *Velocity of elastic waves in a granular substance* », dans *Bull. Earthquake Res. Int. (Tokyo)*, vol. **17**, 1939, p. 783–808.

[84] T. Takahashi et Y. Satô, « *On the theory of elastic waves in granular substance. I* », dans *Bull. Earthquake Res. Int. (Tokyo)*, vol. **27**, 1949, p. 11–16.

[85] D. Bideau, E. Guyon, et L. Oger, « *Granular media: Effects of disorder* », dans J. C. Charmet, S. Roux, et E. Guyon (éds.), *Disorder and Fracture*, New–York, Plenum Press, 1990, ch. 14, p. 255–268.

[86] J. D. Goddard, « *Nonlinear elasticity and pressure–dependent wave speeds in granular media* », dans *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. **430**, 1990, p. 105–131.

[87] C. W. Thurston et H. Deresiewicz, « *Analysis of a compression test of a model of a granular medium* », dans *J. Appl. Mech.*, vol. **26**, 1959, p. 251–258.

[88] P. Talwani, A. Nur, et R. L. Kovach, « *Compressional and shear wave velocities in granular materials to 2.5 kilobars* », dans *J. Geophys. Res.*, vol. **78** n° 29, 1973, p. 6899–6909.

[89] N. Warren et O. L. Anderson, « *Elastic properties of granular materials under uniaxial compaction cycles* », dans *J. Geophys. Res.*, vol. **78** n° 29, 1973, p. 6911–6925.

[90] C.-h. Liu et S. R. Nagel, « *Sound in sand* », dans *Phys. Rev. Lett.*, vol. **68** n° 15, 1992, p. 2301–2304.

[91] C.-h. Liu et S. R. Nagel, « *Sound in a granular material: Disorder and nonlinearity* », dans *Phys. Rev. B*, vol. **48** n° 21, 1993, p. 15646–15650.

[92] C.-h. Liu, « *Spatial patterns of sound propagation in sand* », dans *Phys. Rev. B*, vol. **50** n° 2, 1994, p. 782–794.

[93] S. Melin, « *Wave propagation in granular assemblies* », dans *Phys. Rev. E*, vol. **49** n° 3, 1994, p. 2353–2361.

[94] M. Leibig, « *Model for the propagation of sound in granular materials* », dans *Phys. Rev. E*, vol. **49** n° 2, 1994, p. 1647–1656.

[95] D. H. Tsai et C. W. Beckett, « *Shock wave propagation in cubic lattices* », dans *J. Geophys. Res.*, vol. **71** n° 10, 1966, p. 2601–2608.

[96] T. G. Hill et L. Knopoff, « *Propagation of shock waves in one–dimensional crystal lattices* », dans *J. Geophys. Res.*, vol. **85** n° B12, 1980, p. 7025–7030.

[97] D. F. Strenzwilk, « *Shock profiles caused by different end conditions in one-dimensional quiescent lattices* », dans *J. Appl. Phys.*, vol. **50** nº 11, 1979, p. 6767–6772.

[98] M. Remoissenet, *Waves Called Solitons: Concept and Experiments*, Berlin, Spriger–Verlag, 2e éd., 1996, p. 10.

[99] V. F. Nesterenko et A. N. Lazaridi, « *Solitons and shock waves in one–dimensional granular media* », dans V. K. Kedrinskii (éd.), *Proceedings of XI International Symposium on Nonlinear Acoustics*, vol. 1, Novosibirsk, 1987, p. 309–313, (en russe).

[100] V. F. Nesterenko, *High–rate Deformation of Heterogeneous Materials*, Novosibirsk, Nauka Publ., 1992, ch. 2, p. 51–80. (en russe).

[101] R. S. Sinkovits et S. Sen, « *Nonlinear dynamics in granular columns* », dans *Phys. Rev. Lett.*, vol. **74** nº 14, 1995, p. 2686–2689.

[102] S. Sen et R. S. Sinkovits, « *Sound propagation in impure granular columns* », dans *Phys. Rev. E.*, vol. **54** nº 6, 1996, p. 6857–6865.

[103] A. N. Bogdanov et A. T. Skvortsov, « *Nonlinear elastic waves in a granular medium* », dans *J. Physique IV*, vol. **C1** nº 2, 1992, p. 779–782.

[104] A. N. Bogdanov et A. T. Skvortsov, « *Nonlinear wave processes in granular media* », dans K. A. Naugol'nykh et L. A. Ostrovsky (éds.), *Nonlinear Acoustics (Research Trends in Physics)*, Woodbury, New–York, AIP Press, 1994, p. 28–46.

[105] A. N. Bogdanov et A. T. Skvortsov, « *Nonlinear shear waves in granular medium* », dans *Sov. Phys. Acoust.*, vol. **38** nº 3, 1992, p. 224–226.

[106] E. Fermi, J. R. Pasta, et S. M. Ulam, *Collected Works of Enrico Fermi*, vol. 2, Chicago, University of Chicago Press, 1965.

[107] Ch. 9, p. 202–224 de la Ref. [98].

[108] J. Tasi, « *Perturbation solution for growth of nonlinear shock waves in a lattice* », dans *J. Appl. Phys.*, vol. **43** nº 10, 1972, p. 4016–4021.

[109] J. Tasi, « *Far–field analysis of nonlinear shock waves in a lattice* », dans *J. Appl. Phys.*, vol. **44** nº 10, 1973, p. 4569–4575.

[110] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, New–York, Wiley, 1974.

[111] A. J. Sievers et S. Takeno, « *Inrinsic localized modes in anharmonic crystals* », dans *Phys. Rev. Lett.*, vol. **61** nº 8, 1988, p. 970–973.

[112] V. M. Burlakov, S. A. Kiselev, et V. I. Rupasov, « *Localized vibrations of homogeneous anharmonic chains* », dans *Phys. Lett. A*, vol. **147** nº 2,3, 1988, p. 130–134.

[113] S. R. Bickham, S. A. Kiselev, et A. J. Sievers, « *Stationary and moving intrinsic localized modes in one–dimensional monoatomic lattices with cubic and quartic anharmonicity* », dans *Phys. Rev. B*, vol. **47** nº 21, 1993, p. 14206–14211.

[114] S. Takeno et K. Hori, « *Self–localized modes in a pure one–dimensional lattice with cubic and quartic lattice anharmonicity* », dans *J. Phys. Soc. Japan*, vol. **60** n° 3, 1991, p. 947–959.

[115] N. Flytzanis, S. Pnevmatikos, et M. Remoissenet, « *Kink, breather and asymmetric envelope or dark solitons in nonlinear chains: I. Monoatomic chain.* », dans *J. Phys. C*, vol. **18**, 1985, p. 4603–4629.

[116] Y. S. Kivshar, « *Localized modes in a chain with nonlinear on–site potential* », dans *Phys. Lett. A*, vol. **173**, 1993, p. 172–178.

[117] A. S. Kosalev et M. M. Bogdan, *Physics of Many–Particles Systems*, Kiev, Naukova Dumka, 1988, p. 20.

[118] Y. S. Kivshar, « *Dark solitons in nonlinear optics* », dans *IEEE J. Quant. Elec.*, vol. **29** n° 1, 1993, p. 250–264.

[119] G. Matsui, M. Sugihara, et S. Arimoto, « *Propagation characteristics of pressure wave through gas–liquid plug–train system* », dans *Bull. of JSME*, vol. **22** n° 173, 1979, p. 1562–1569.

[120] S. L. Gavrilyuk, *A model of a plug–chain system near the thermodynamic critical point : Mechanical analogy, explicit solutions, long–wave approximation, connection with the Korteweg theory of capillarity and modulation equations.*, UMPA - Rapport de Recherche 115, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 1993.

[121] V. F. Nesterenko, « *Examples of "sonic vacuum"* », dans *Fizika Goreniya i Vzryva*, vol. **2**, 1993, p. 132–134. (en russe).

[122] A. S. Dolgov, « *Reponse of an anharmonic crystal to a localized initial impetus* », dans *J. of Appl. Mech. and Tech. Phys.*, vol. **24** n° 4, 1983, p. 575–577.

[123] V. F. Nesterenko, « *Pulse compression nature in strongly nonlinear grained medium* », dans Z. Zhemin (éd.), *Proceedings of the Second International Symposium on Intense Dynamic Loading and its Effects*, Chengdu, Sichuan, China, Sichuan University Press, 1992, p. 236–239.

[124] V. F. Nesterenko, « *Solitary waves in discrete media with anomalous compressibility and similar to "sonic vacuum"* », dans *J. Physique IV*, vol. **C8** n° 4, 1994, p. 729–734.

[125] K. Walton, « *The effective elastic moduli of model sediments* », dans *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, vol. **43**, 1975, p. 293–306.

[126] E. Infeld et G. Rowlands, *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos*, Cambridge, Cambridge University Press, 1990.

[127] S. L. Gavrilyuk et V. F. Nesterenko, « *Stability of periodic excitations for one model of "sonic vacuum"* », dans *J. of Appl. Mech. and Tech. Phys.*, vol. **34** n° 6, 1993, p. 784–787.

[128] M. Peyrard et M. D. Kruskal, « *Kink dynamics in the highly discrete sine–Gordon system* », dans *Physica D*, vol. **14**, 1984, p. 88–102.

[129] C. Wassgren, C. E. Brennen, et M. L. Hunt, « *Vertical vibration of a deep bed of granular material in a container* », dans *J. Appl. Mech.*, vol. **63**, 1996, p. 712–719.

[130] K. M. Aoki, T. Akiyama, Y. M. Maki, et T. Watanabe, « *Convective roll patterns in vertically vibrated beds of granules* », dans *Phys. Rev. E*, vol. **54** n° 1, 1996, p. 874–883.

[131] J. B. Knight, E. E. Ehrichs, V. Y. Kuperman, J. K. Flint, H. M. Jaeger, et S. R. Nagel, « *Experimental study of granular convection* », dans *Phys. Rev. E*, vol. **54** n° 5, 1996, p. 5726–5738.

[132] O. Zik et J. Stavanis, « *Self–diffusion in granular flows* », dans *Europhys. Lett.*, vol. **16** n° 3, 1991, p. 255–258.

[133] M. Faraday, « *On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particules upon vibrating elastic surfaces* », dans *Phil. Trans. R. Soc. London*, vol. **52** n° 11, 1831, p. 299–318.

[134] J. Walker, « *When different powders are shaken, they seem to have lives of their own* », dans *J. Sci. Am.*, vol. **247**, 1982, p. 166–176.

[135] J. Rajchenbach et P. Evesque, « *Instabilité convective dans un tas de sable* », dans *C. R. Acad. Sci. Paris Série II*, vol. **307**, 1988, p. 1–4.

[136] P. Evesque et J. Rajchenbach, « *Instability in a sand heap* », dans *Phys. Rev. Lett.*, vol. **62** n° 1, 1989, p. 44–46.

[137] E. Clément, J. Duran, et J. Rajchenbach, « *Experimental study of heaping in a two–dimensional "sandpile"* », dans *Phys. Rev. Lett.*, vol. **69** n° 8, 1995, p. 1189–1192.

[138] H. K. Pak et R. P. Behringer, « *Bubbling in vertically vibrated granular materials* », dans *Nature*, vol. **371**, 1994, p. 231–233.

[139] C. E. Brennen, S. Ghosh, et C. R. Wassgren, « *Vertical oscillation of a bed of granular material* », dans *J. Appl. Mech.*, vol. **63**, 1996, p. 156–161.

[140] S. Douady, *Instabilité Paramétrique d'Ondes de Surface*, Thèse, Université Paris VI, 1989.

[141] H. K. Pak, E. Van Doorn, et R. P. Behringer, « *Effects of ambient gases on granular materials under vertical vibration* », dans *Phys. Rev. Lett.*, vol. **74** n° 23, 1995, p. 4643–4646.

[142] H. K. Pak et R. P. Behringer, « *Surface waves in vertically vibrated granular materials* », dans *Phys. Rev. Lett.*, vol. **71** n° 12, 1993, p. 1832–1835.

[143] E. Clément, L. Vanel, J. Rajchenbach, et J. Duran, « *Pattern Formation in a vibrated Granular Layer* », dans *Phys. Rev. E.*, vol. **53** n° 3, 1996, p. 2972–2975.

[144] F. Melo, P. Umbanhowar, et H. L. Swinney, « *Transition to parametric wave patterns in a vertically oscillated granular layer* », dans *Phys. Rev. Lett.*, vol. **72** n° 1, 1994, p. 172–175.

[145] F. Melo, P. Umbanhowar, et H. L. Swinney, « *Hexagons, kinks, and disorder in oscillated granular layers* », dans *Phys. Rev. Lett.*, vol. **75** nº 21, 1995, p. 3838–3841.

[146] T. H. Metcalf, J. B. Knight, et H. M. Jaeger, *Standing wave patterns in shallow beds of vibrated granular*. Unpublished.

[147] S. Douady, S. Fauve, et C. Laroche, « *Subharmonic instabilities and defects in a granular layer under vertical vibrations* », dans *Europhys. Lett.*, vol. **8**, 1989, p. 621–627.

[148] W. S. Edwards et S. Fauve, « *Patterns and quasi-patterns in the Faraday experiment* », dans *J. Fluid Mech.*, vol. **278**, 1994, p. 123–148.

[149] S. Fauve, K. Kumar, C. Laroche, D. Beysens, et Y. Garrabos, « *Parametric instability of a liquid–vapor interface close to the critical point* », dans *Phys. Rev. Lett.*, vol. **68** nº 21, 1992, p. 3160–3163.

[150] J. Fineberg, « *Physics in a jumping sandbox* », dans *Nature*, vol. 382, 1996, p. 763–764.

[151] C. Coulomb, *Mémoires de Mathématiques et de Physique présentés à l'Académie Royale des Sciences par divers savants et lus dans les Assemblées*, 1773, p. 343.

[152] B. K. Chakrabarti et M. Archaryya, « *Instabilities in a sandpile under vibration* », dans *J. Phys. I*, vol. **2**, 1992, p. 389–392.

[153] K. Kumar et K. M. S. Bajaj, « *Competing patterns in the Faraday experiment* », dans *Phys. Rev. E.*, vol. **52** nº 5, 1995, p. R4606–R4609.

[154] E. Guyon et J.-P. Troadec, *Du Sac de Billes au Tas de Sable*, Paris, Odile Jacob, 1994, p. 61–62.

[155] R. Comolet, *Mécanique Expérimentale des Fluides Tome II : Dynamique des Fluides Réels, Turbomachines*, Paris, Masson, 4e éd., 1963.

[156] C. Thornton et C. W. Randall, « *Applications of theoretical contact mechanics to solid particle system simulation* », dans M. Satake et J. Jenkins (éds.), *Micromechanics of Granular Materials*, Amsterdam, Elsevier Science Publishers B.V., 1988, p. 133–142.

[157] R. Feynman, *Le Cours de Physique de Feynman : Electromagnétisme 2*, Paris, InterEditions, 1979, p. 254.

[158] P. M. Morse et K. U. Ingard, *Theoretical Acoustics*, Princeton, Princeton University Press, 1986, p. 80–86.

Annexe A

Fréquences propres des vibrations radiales d'une sphère élastique

Les résultats de cette annexe proviennent de la Ref. [13] et en particulier du problème 3 de la page 91.

Pour des déformations adiabatiques $\vec{u}$, l'équation du mouvement pour un milieu élastique isotrope est

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \triangle \vec{u} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \overrightarrow{grad} \left[div\ \vec{u} \right], \tag{A.1}$$

où E est le module d'Young, σ le cœfficient de poisson et ρ la masse volumique du matériau constituant la sphère. En utilisant les coordonnées sphériques avec l'origine au centre de la sphère, pour des vibrations radiales, u varie suivant le rayon et est uniquement fonction de r et de t. Reportons la relation vectorielle $\overrightarrow{grad}[div\ \vec{u}] = \triangle \vec{u} - \overrightarrow{rot}\left[\overrightarrow{rot}\ \vec{u}\right]$ dans l'Eq. (A.1). Le fait que u ne dépende que de r et t implique que $\overrightarrow{rot}\ \vec{u} = 0$. L'équation du mouvement est alors

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = c_l^2 grad_r \left[div\ u_r \right] \qquad \text{avec} \quad c_l^2 = \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)\rho}, \tag{A.2}$$

c_l représente la vitesse des ondes élastiques longitudinales pour le matériau constituant la sphère. En définissant un potentiel ϕ pour le déplacement u_r, tel que $u_r = u = \partial\phi/\partial r$, et pour des oscillations périodiques en temps $\phi \sim e^{-i\omega t}$, l'Eq. (A.2) devient

$$\triangle \phi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = -k^2 \phi \qquad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c_l}. \tag{A.3}$$

Une solution de l'Eq. (A.3), qui prend des valeurs finies à l'origine, est $\phi = \frac{A}{r} \sin(kr) e^{-i\omega t}$. En utilisant la relation liant le tenseur des contraintes à celui des déformations, la composante σ_{rr} du tenseur des contraintes, représentant la composante radiale de la force agissant sur la surface unité perpendiculaire à l'axe radial, est

$$\sigma_{rr} = \rho \left[\left(c_l^2 - 2c_t^2 \right) \triangle \phi + 2c_t^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right] \qquad \text{avec} \quad c_t^2 = \frac{E}{2\rho(1+\sigma)}, \tag{A.4}$$

où c_t représente la vitesse des ondes élastiques transverses pour le matériau constituant la sphère. En utilisant l'Eq. (A.3),

$$\frac{\sigma_{rr}}{\rho} = -\omega^2 \phi - 4c_t^2 \frac{\partial \phi}{r \partial r}. \tag{A.5}$$

A la surface de la sphère, la composante radiale de la force doit être nulle, d'où $\sigma_{rr}(R) = 0$. Cette condition aux limites conduit à

$$\frac{\tan(kR)}{kR} = \frac{1}{1 - \left(\frac{kRc_l}{2c_t} \right)^2}. \tag{A.6}$$

Les racines k de l'Eq. (A.6) déterminent les fréquences $\omega = kc_l$ des modes propres de vibrations radiales de la sphère.

Soit $X_n = k_n R$ la $n^{ième}$ racine de l'équation transcendante (A.6), les pulsations propres d'oscillations de la bille sont alors $\omega_n = X_n(c_l/R)$ et les fréquences propres $\nu_n = X_n c_l/(2\pi R)$.

Pour une bille en carbure de tungstène, de rayon $R = 4\ mm$, avec $c_t = 3820\ m/s$ et $c_l = 6380\ m/s$ qui sont, respectivement, les valeurs des vitesses transverses et longitudinales du son dans le carbure de tungstène (voir les Eqs. (A.2), (A.4) et le tableau de la page 16), on peut résoudre numériquement l'Eq. (A.6). Les résultats sont alors présentés dans le Tab. (A.1).

Mode n	Racine de l'Eq. (A.6) X_n	Fréquence ν_n en kHz	Période T_n en μs
1	2,502	635	1,6
2	6,04	1533	0,6
3	9,27	2353	0,4
4	12,45	3160	0,3

TAB. A.1 – *Période d'oscillation du mode n pour une sphère en carbure de tungstène de rayon $R = 4$ mm.*

La période d'oscillation du fondamental, pour une bille en carbure de tungstène de rayon R, est donnée par

$$T_1 = \frac{2\pi}{X_1} \times \frac{R}{c_l} \approx 2,51 \frac{R}{c_l}. \tag{A.7}$$

Pour une bille en carbure de tungstène de 4 mm de rayon, la période du fondamental vaut $1,6$ μs. Cette valeur est satisfaisante puisque qualitativement la période d'oscillation d'une bille doit être inférieure mais du même ordre de grandeur que le temps mis par le son pour parcourir 2 fois le diamètre de la bille, c.-à-d.

$$T_{son} = 2 \times \frac{2R}{c_l} = 4\frac{R}{c_l}. \tag{A.8}$$

Dans le cas d'une bille en acier inoxydable, de rayon $R = 4$ mm, avec $c_t = 3235$ m/s et $c_l = 5200$ m/s ; on obtient en procédant de la même façon que précédemment

Mode n	Racine de l'Eq. (A.6) X_n	Fréquence ν_n en kHz	Période T_n en μs
1	2,423	501	2
2	6,02	1246	0,8
3	9,25	1914	0,5
4	12,44	2574	0,4

TAB. A.2 – *Période d'oscillation du mode n pour une sphère en acier inoxydable de rayon $R = 4$ mm.*

Annexe B

Ordre de grandeur de l'effet du frottement de l'air sur le mouvement de la bille

On suppose que la mise en mouvement de la bille par la pesanteur crée un écoulement d'air à grand nombre de Reynolds. De tels écoulements sont caractérisés par la prédominance des effets dus à l'inertie sur ceux liés à la viscosité. On vérifiera *a posteriori* que cette hypothèse est bien satisfaite.

Une bille de rayon R et de densité ρ_b tombant en chute libre dans l'air de densité ρ_a et de viscosité cinématique ν subit l'attraction de la pesanteur et la force de frottement $\vec{F}_{frott}$ due à la résistance de l'air, selon

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}_{frott}, \tag{B.1}$$

où v est la vitesse de la bille, $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_b$ la masse d'une bille et $g = 9,81\ m/s^2$ l'accéleration de la pesanteur. La poussée d'Archimède a été négligée puisque $\rho_a \ll \rho_b$ [1]. On se place, de plus, dans le régime où la chute libre est vraiment établie : on néglige dans l'Eq. (B.1), la force de frottement de l'air agissant sur la bille au tout début de son mouvement [2] ainsi que la force liée au « film » d'air à évacuer lorsque la bille s'approche très près du sol. Pour de grands nombres de Reynolds ($10^3 < Re < 10^5 - 10^6$), la force de frottement, qui s'oppose au mouvement de la bille, vaut $F_{frott} = -C_x \rho_a \pi R^2 v^2/2$ où C_x est le cœfficient de traînée, qui est constant pour notre gamme de Re, et vaut $C_x \approx 0,45$ [155]. Après le régime transitoire correspondant à l'équilibre entre le poids et la force de frottement, la vitesse de sédimentation v_s de la bille s'écrit, en annulant le terme de gauche de (B.1),

$$v_s = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{R}{C_x}\frac{\rho_b}{\rho_a} g}, \tag{B.2}$$

tandis que la durée τ du régime transitoire est telle que

$$\tau \sim \frac{v_s}{g}. \tag{B.3}$$

Ainsi, pour une bille en carbure de tungstène ($\rho_b = 14950\ kg/m^3$) [3] de 8 mm de diamètre, en chute libre dans l'air ($\rho_a = 1,2\ kg/m^3$, $\nu = 1,53 \times 10^{-5}\ m^2/s$ à 20°C) [4], on obtient $v_s \approx 54\ m/s$; si nous calculons le nombre de Reynolds correspondant à cet écoulement, nous trouvons $Re \approx 3 \times 10^4$. La condition de grand nombre de Reynolds est donc bien vérifiée. L'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire d'une bille lâchée sans vitesse initiale pour atteindre sa vitesse de sédimentation est $\tau \sim 5,5\ s$!

Or, le temps t_0 nécessaire pour qu'une bille initialement à une hauteur h_0, de l'ordre du millimètre, vienne heurter le sol est, en négligeant la frottement de l'air,

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \ll \tau. \tag{B.4}$$

1. Pour tenir compte de la poussée d'Archimède, il faudrait substituer la masse m de la bille par la masse *apparente* $m_{app} = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_b - \rho_a)$ dans la force de gravité.

2. Au tout début du mouvement, l'écoulement d'air, à petit nombre de Reynolds, exerce une force dite de Stockes $F = 6\pi\rho_b\nu RV$ lorsque la sphère se déplace à la vitesse uniforme V dans l'air [155].

3. voir le tableau page 16.

4. Ces valeurs numériques sont issues des pages F-11 et F-13 du *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, edited by R. C. Weast, CRC Press, USA, 60th edition, 1981.

Ainsi, la résistance de l'air apparait négligeable puisqu'elle « n'a pas suffisamment de temps » pour compenser l'action de la gravité et pour donner à la bille une vitesse de chute constante et égale à v_s. Pour cela, il faudrait la laisser tomber pendant plus de 5 secondes, c'est–à–dire d'une hauteur de l'ordre de 150 m!

D'autre part, pour la hauteur de chute, $h_0 = 2\ mm$, considérée au Chap. II et conduisant à une vitesse d'impact $v_{imp} = \sqrt{2gh_0}$, nous pouvons calculer la perte moyenne d'accélération Δa au cours de la chute libre d'une bille en carbure de tungstène dans l'air selon

$$\Delta a = \left|\frac{F_{frott}}{m}\right| = \frac{8}{3} C_x \left(\frac{\rho_a}{\rho_b}\right) \frac{\langle v \rangle_t^2}{R}. \tag{B.5}$$

où $\langle v \rangle_t = v_{imp}/2$ est la vitesse de la bille moyennée entre l'instant du lâcher et du premier choc. Ainsi, d'après l'Eq. (B.5), l'effet de frottement de l'air sur la bille au cours de la chute libre conduit à une perte moyenne d'accélération $\Delta a \simeq 2 \times 10^{-4}\ m/s^2$ négligeable devant l'accélération de la gravité.

Annexe C

Cœfficient de restitution lors d'un choc faiblement dissipatif

Le cœfficient de restitution ϵ lors d'un choc entre deux corps est défini, d'après l'Eq. (I.42), comme le rapport entre les vitesses relatives avant et après la collision.

Dans cet annexe, on obtient une expression analytique du cœfficient de restitution comme une fonction de la vitesse d'impact et des constantes élastiques et viscoélastiques des matériaux des corps en collision. Cette expression est valable dans le cas d'une interaction de Hertz viscoélastique non modifiée par la présence de la gravité et dans la limite faiblement dissipative, c.-à-d. $\epsilon \to 1$. On suppose, en effet, que l'énergie perdue lors du choc inélastique est exclusivement due aux propriétés viscoélastiques des corps en collision et ne fait pas intervenir les autres mécanismes possibles de dissipation (voir le § (I.4)). On suppose, de plus, que la gravité est négligeable durant l'interaction.

La dynamique du contact lors de la collision entre une sphère et un plan est régie par l'Eq. (II.34) pour une force dissipative de nature viscoélastique d'Eq. (II.35). En négligeant le terme de gravité et en considérant une interpénétration $x > 0$ entre la sphère et le plan, l'Eq. (II.34) devient

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx^{3/2} - \mu\frac{dx}{dt}x^{\gamma}. \tag{C.1}$$

où m est la masse de la sphère, K le cœfficient de la loi de Hertz pour un contact sphère–plan (voir l'Eq. (I.24)), μ le cœfficient de dissipation (*cf.* page 57) et γ un nombre réel caractérisant la nature linéaire ($\gamma = 0$) ou non–linéaire ($\gamma \neq 0$) de la force viscoélastique.

L'équation (C.1) est adimensionnée en posant

$$\tilde{x} = \frac{x}{x^*_{max}} \qquad \text{et} \qquad \tilde{t} = \frac{v_{imp}}{x^*_{max}}t, \tag{C.2}$$

x^*_{max}, l'interpénétration maximale entre la sphère et le plan, est calculée par le modèle de Hertz (en absence de dissipation et de gravité) et est fonction de la vitesse d'impact v_{imp} de la sphère juste avant le choc selon l'Eq. (II.20). En utilisant l'Eq. (II.20) et les changements de variables de l'Eq. (C.2), l'Eq. (C.1) s'écrit sous forme adimensionnée

$$\frac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{t}^2} = -\frac{5}{4}\tilde{x}^{3/2} - \beta\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}\tilde{x}^{\gamma}, \tag{C.3}$$

avec

$$\beta = \frac{\mu}{m}\left(\frac{5m}{4K}\right)^{(2\gamma+2)/5} v_{imp}^{(4\gamma-1)/5}. \tag{C.4}$$

Dans la limite faiblement dissipative ($\beta \ll 1$ ou $\epsilon \simeq 1$), le cœfficient de restitution peut être obtenu sous forme analytique par une méthode perturbative. En effet, l'énergie perdue lors de la collision sera calculée en supposant que le mouvement en présence de dissipation ne diffère pas de façon appréciable de celui sans dissipation.

En multipliant l'Eq. (C.3) par $(d\tilde{x}/d\tilde{t})$ et en intégrant sur toute la durée de la collision τ, nous obtenons

$$\int_0^{\tau} \frac{d}{d\tilde{t}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}\right)^2 + \frac{1}{2}\tilde{x}^{5/2}\right]dt = -\beta\int_0^{\tau}\left(\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}\right)^2 \tilde{x}^{\gamma}dt. \tag{C.5}$$

Le membre de gauche vérifie les conditions initiales et finales : à $t = 0$, $(d\tilde{x}/d\tilde{t}) = 1$ et $\tilde{x} = 0$ et à $t = \tau$, $(d\tilde{x}/d\tilde{t}) = \tilde{u}$ et $\tilde{x} = 0$. $\tilde{u}$ correspond à la vitesse de la sphère à $t = \tau$ normalisée par sa vitesse initiale v_{imp}. Le membre de droite de l'Eq. (C.5) correspond à l'énergie perdue durant la collision.

Utilisons l'approximation faiblement dissipative pour calculer $(d\tilde{x}/d\tilde{t})$, c.-à-d. en annulant le terme de droite de l'Eq. (C.5) et utilisons les conditions initiales pour déterminer la constante d'intégration du membre de gauche de l'Eq. (C.5), et ainsi

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \sqrt{1 - \tilde{x}^{5/2}}. \tag{C.6}$$

En changeant la variable d'intégration, pour le membre de droite de l'Eq. (C.5), en $\tilde{x}$, grâce à l'Eq. (C.6), l'Eq. (C.5) devient

$$\tilde{u}^2 - 1 = -4\beta \int_0^1 \tilde{x}^\gamma \sqrt{1 - \tilde{x}^{5/2}} d\tilde{x}. \tag{C.7}$$

On a supposé, pour obtenir l'Eq. (C.7), que l'énergie dissipée pendant toute la durée de la collision est le double de celle dissipée durant $t \in [0 \, ; \, \tau/2]$. L'intégrale dans l'Eq. (C.7) est évaluée par une fonction Beta[1], notée $\mathcal{B}[y, z]$ où y et z sont des réels avec des parties réelles positives,

$$\mathcal{B}\left[\frac{3}{2}\, , \, \frac{2}{5}(\gamma + 1)\right] = \frac{5}{2} \int_0^1 \tilde{x}^\gamma \sqrt{1 - \tilde{x}^{5/2}} d\tilde{x} \qquad \forall \gamma > -1. \tag{C.8}$$

Comme $\tilde{u}$ correspond à la vitesse de la sphère, à la fin de la collision, normalisée par sa vitesse initiale v_{imp}, on a finallement

$$\epsilon = |\tilde{u}| = \sqrt{1 - \frac{8}{5}\mathcal{B}\left[\frac{3}{2}\, , \, \frac{2}{5}(\gamma + 1)\right] \beta}, \tag{C.9}$$

d'où, avec $\epsilon \simeq 1$,

$$\epsilon \simeq 1 - \frac{4}{5}\mathcal{B}\left[\frac{3}{2}\, , \, \frac{2}{5}(\gamma + 1)\right] \beta \tag{C.10}$$

où β est une fonction du rayon R et de la masse m de la sphère, du cœfficient de dissipation μ, des constantes élastiques de la sphère et du plan, de l'exposant de compression viscoélastique γ et de la vitesse d'impact de la sphère v_{imp}, selon l'Eq. (C.4).

D'après les Eqs. (C.4) et (C.10), on note que ϵ est indépendant de la vitesse d'impact lorsque $\gamma = 1/4$. La dépendance de ϵ avec v_{imp} est résumée dans le Tab. (C.1) pour les trois valeurs de γ traitées dans le modèle dissipatif du § (II.6).

γ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\epsilon = 1 - C(\gamma) v_{imp}^{(4\gamma-1)/5}$	$1 - C(0) v_{imp}^{-1/5}$	$1 - C(\frac{1}{2}) v_{imp}^{1/5}$	$1 - C(\frac{1}{4}) v_{imp}^{0}$
$C(\gamma)$	$1,635 \frac{\mu}{m} \left(\frac{5m}{4K}\right)^{2/5}$	$1,009 \frac{\mu}{m} \left(\frac{5m}{4K}\right)^{3/5}$	$1,256 \frac{\mu}{m} \left(\frac{5m}{4K}\right)^{1/2}$

TAB. C.1 – *Dépendance du cœfficient de restitution ϵ avec la vitesse d'impact v_{imp} dans la limite de faiblement dissipative ($\beta \ll 1$) pour $\gamma = 0$, $1/2$ et $1/4$. La loi d'interaction est décrite par l'Eq. (C.3) et ne tient pas compte de la gravité lors du contact.*

1. Voir l'Eq. (8.380.11) de la Ref. [25].

Pour $\gamma = 1/2$, on retrouve bien l'expression de ϵ obtenu par Kuwabara et Kono (*cf.* les Eqs. (9) et (12) de la Ref. [33]). La généralisation de l'expression de ϵ, énoncée dans cette annexe, à n'importe quelle valeur de γ montre que l'évolution de ϵ dépend fortement de l'exposant de compression viscoélastique γ. Notamment, lorsque $v_{imp} \to 0$, ϵ est indépendant de la vitesse d'impact pour $\gamma = 1/4$, tend vers 1 pour $\gamma = 1/2$ et vers 0 pour $\gamma = 0$. De plus, cette étude confirme les estimations de Luding *et al.* sur la dépendance du cœfficient de restitution avec v_{imp} pour différentes valeurs de γ (voir l'annexe de la Ref. [67]).

Enfin, vérifions que les paramètres K/m et μ/m utilisées pour traçer l'évolution de ϵ avec v_{imp} (*cf.* la Fig. (II-12) du § (II.6)), d'après les Eqs. (C.4) et (C.10), satisfassent l'approximation faiblement dissipative, c.-à-d. $\beta \ll 1$ ou $\epsilon \simeq 1$. En utilisant les valeurs des paramètres K/m et μ/m du § (II.6), on peut calculer les valeurs des cœfficients $C(\gamma)$ apparaissant dans le tableau (C.1). Ces valeurs sont regroupées dans le Tab. C.2.

γ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
K/m $(m^{1/2}s^{-2})$	$2,092 \times 10^{12}$	$2,092 \times 10^{12}$	$2,092 \times 10^{12}$
μ/m $(m^{-\gamma}/s)$	530	$1,3 \times 10^{6}$	$2,7 \times 10^{4}$
$C(\gamma)$ $(m/s)^{(1-4\gamma)/5}$	$1,12 \times 10^{-2}$	$6,07 \times 10^{-2}$	$2,62 \times 10^{-2}$

TAB. C.2 – *Valeurs des cœfficients de proportionnalité $C(\gamma)$ entre $(1-\epsilon)$ et $v_{imp}^{(4\gamma-1)/5}$ pour les paramètres de simulations K/m et μ/m utilisés dans le § (II.6) et pour $\gamma = 0$, 1/2 et 1/4.*

L'approximation faiblement dissipative est ainsi bien vérifiée pour de telles valeurs de K/m et μ/m et pour nos valeurs de vitesses d'impact. En effet, bien avant que cette approximation ne soit plus valide, c.-à-d. pour de très petites vitesses dans le cas $\gamma = 0$, l'Eq. (C.1) n'a plus de sens car les effets de la gravité ne sont alors plus négligeables.

Annexe D

Pourquoi la vitesse de l'onde de déformation est–elle constante le long de la colonne?

Une comparaison entre l'expérience présentée dans le chapitre III, et une expérience légèrement différente permettra de comprendre pourquoi la vitesse de propagation de l'onde de déformation est constante le long de la colonne de billes.

Supposons que l'on s'intéresse à la propagation d'une onde de déformation engendrée lors du choc d'une bille sur une colonne verticale de billes immobiles soumises au champ de pesanteur (voir la Fig. (D-1)).

La colonne étant soumise à son poids, la force statique que ressentent les billes d'altitudes élevées est alors moins importante que celle ressentie par les billes du bas de la colonne. Ainsi, lorsque une bille est lâchée sur cette colonne, une excitation dynamique est envoyée à l'intérieur d'une colonne qui possède un gradient de force statique. Or, pour une chaîne de billes de rayon R soumise à une force statique F_0, on montre dans le chapitre IV que la vitesse c_s d'une onde linéaire de grande longueur d'onde (dans le régime non–dispersif), c.-à-d. la vitesse du son dans la chaîne, a pour expression

$$c_s = \frac{3}{\sqrt{\pi \rho_s}} \left[\frac{E_s}{6R(1-\nu_s^2)} \right]^{1/3} F_0^{1/6} \tag{D.1}$$

ρ_s étant la densité, E_s le module d'Young et ν_s le cœfficient de Poisson du matériau constituant les billes. Pour de l'acier inoxydable (*cf.* le tableau page 16) et des billes de 4 mm de rayon, l'Eq. (D.1) s'écrit $c_s = 408 \times F_0^{1/6}\ m/s$. Ainsi, le gradient de précontrainte à l'intérieur de la chaîne de billes impose à l'onde de se propager plus vite en bas de la colonne que dans sa partie supérieure. Donc, dans une chaîne de billes statique unidimensionnelle soumise à son poids, la vitesse des ondes de déformation n'est pas constante le long de la chaîne et croît lorsque l'altitude diminue. Des simulations [101, 102, 156] à 1D et à 2D ont été récemment réalisées sur ce genre de problème. Sinkovits et Sen [101, 102] montrent que la vitesse c_s des ondes linéaires suit la loi $c_s \sim F_0^{1/6}$ tandis que la vitesse des ondes de forte amplitude est plus grande que c_s en bas de la colonne et tend vers c_s lorsque l'altitude augmente.

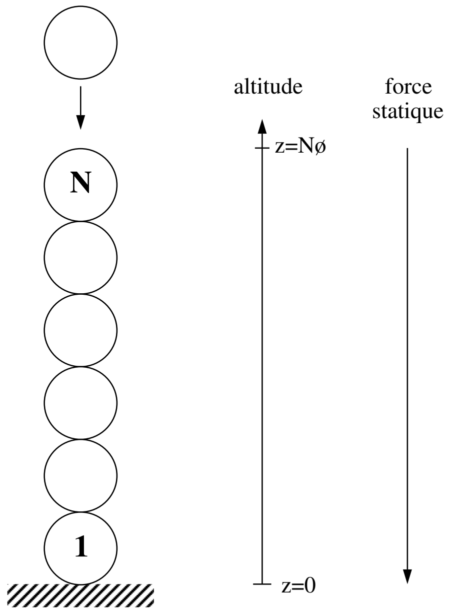


FIG. D-1 – *Impact d'une bille sur une colonne de N billes, chacune de diamètre $\phi = 2R$, soumises au champ de pesanteur.*

Revenons maintenant à l'expérience présentée dans le chapitre III. Pour une colonne de billes en contact en chute libre, la raison pour laquelle la vitesse des ondes de déformation est constante le long de la chaîne et ainsi indépendante du nombre de billes de la colonne ou de l'altitude est assez simple. L'équation (D.1) n'est valable que si la chaîne est soumise à une précontrainte statique avant que l'excitation dynamique ne débute. Or, pour notre problème, au moment où l'excitation dynamique débute, c.-à-d. lorsque la colonne de billes commence son interaction avec le capteur, toutes les billes de la colonne sont en contact mais ne sont pas précontraintes. Ainsi, il semble raisonnable que la propagation de l'onde de déformation le long de la colonne se fasse à vitesse constante. L'expression analytique de la vitesse de telles ondes sera obtenue dans le § (III.6.5).

Annexe E

Longueur de pénétration d'une onde plane

Considérons une onde plane unidimensionnelle, de fréquence f, se propageant dans un milieu 1 semi-infini. L'amplitude de vibration u_i de cette onde s'écrit

$$u_i \sim e^{j(q_i x - 2\pi f t)} , \tag{E.1}$$

où $j^2 \equiv -1$, q_i étant son nombre d'onde, x sa direction de propagation et t la variable temporelle. Supposons que cette onde incidente arrive perpendiculairement à un milieu 2 semi-infini et soit complètement réfléchie par ce dernier. Le nombre d'onde q_t de l'onde transmise dans le milieu 2 est alors [157]

$$q_t = q_i + j\alpha , \tag{E.2}$$

où α est un nombre réel que l'on note $\alpha \equiv 1/L$. L'onde transmise u_t a pour expression

$$u_t \sim e^{j(q_i x - 2\pi f t)} e^{-\alpha x} . \tag{E.3}$$

Ainsi bien que le milieu 2 soit tel qu'il ne réponde pas à cette excitation, il absorbe tout de même l'onde sur une distance L, appelée « longueur de pénétration » ou « longueur d'absorption ». Si le milieu 2 est un réseau unidimensionnel (comme au Chap. IV), de maille a, ce milieu possède une fréquence de coupure f_c. La variable spatiale continue x est alors remplacée par la variable dicrète $n \times a$ où n est un nombre entier. Dans le cas d'un réseau unidimensionnel de masses ponctuelles reliées par des ressorts linéaires, le nombre d'onde q_t est alors [158]

$$q_t = \frac{\pi}{a} + j\frac{2}{a} Argcosh \left[\frac{f}{f_c} \right] \quad \text{pour} \quad f > f_c , \tag{E.4}$$

où $Argcosh\,[\mathcal{X}]$ est l'argument du cosinus hyperbolique de $\mathcal{X}$. En identifiant l'Eq. (E.2) avec l'Eq. (E.4), la longueur de pénétration L de l'onde dans le milieu 2 est

$$L \equiv \frac{1}{\alpha} = \frac{a}{2} \frac{1}{Argcosh \left[\frac{f}{f_c} \right]} \quad \text{pour} \quad f > f_c . \tag{E.5}$$

Appliquons ce résultat au cas du réseau de billes en acier du Chap. IV. En régime linéaire, la fréquence de coupure f_c de ce réseau est telle que $f_c = 16,2 \times F_0^{1/6}\ kHz$ où F_0 est la force de compression statique (voir le Chap. IV). La maille du réseau est $a = 2R$ où $R = 4\ mm$ est le rayon d'une bille. L'évolution de L en fonction de f/f_c est représentée sur la Fig. (E-1). Lorsque $f \to f_c$, l'onde plane se propage infiniment à l'intérieur du réseau et on a $L \to \infty$.

Ainsi, par exemple, pour $f_c = 23,7\ kHz$, une onde incidente de fréquence $f = 24\ kHz$ pénetre dans le réseau de billes sur une distance $L = 2,5\ cm$, tandis qu'une onde de fréquence $f = 30\ kHz$ pénetre sur une distance $L = 0,3\ cm$. Par conséquent, lorsque l'on fait une mesure à $0,3\ cm$ de l'interface entre les deux milieux, la fréquence de coupure du réseau semble être de $30\ kHz$ au lieu de $23,7\ kHz$.

Les mesures de fréquence de coupure effectuée au Chap. IV ont été réalisée à $40\ cm$ de l'interface entre les deux milieux. En utilisant, l'Eq. (E.5) avec $a = 8\ mm$ et $L = 40\ cm$, la fréquence de coupure apparante du réseau, due à l'effet de pénétration, est $1,00005 \times f_c$. La fréquence de coupure la plus haute[1] pour le réseau de billes en acier étant $f_c \simeq 38\ kHz$,

1. Pour $F_0 = 170\ N$.

la fréquence de coupure mesurée expérimentalement semble alors augmenter de 2 Hz par rapport à cette valeur calculée. Il en est de même pour un réseau de billes en verre dont la fréquence de coupure la plus haute, cad pour $F_0 = 170\ N$, est $f_c \simeq 44\ kHz$. L'effet de pénétration de l'onde dans le réseau apparaît donc négligeable pour les mesures de fréquence de coupure du réseau à une distance de 40 cm de l'interface entre les deux milieux.

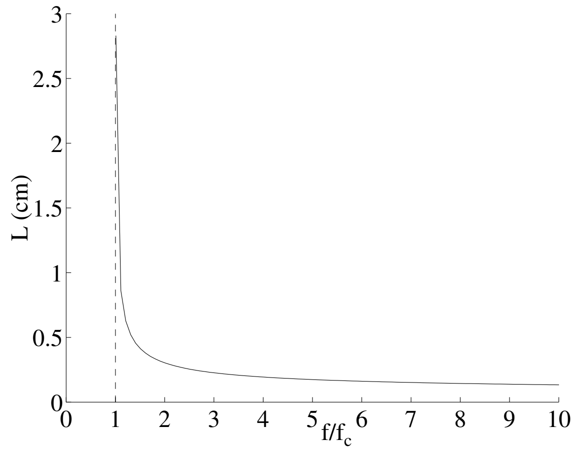


FIG. E-1 – *Longueur de pénétration L d'une onde linéaire de fréquence $f > f_c$ dans un réseau de fréquence de coupure f_c. Cette figure a été tracée pour un réseau de maille $a = 8\ mm$ (cf l'Eq. (E.5)).*

PUBLICATIONS DE LA THESE

- **Articles**

  E. Falcon, C. Laroche, S. Fauve, and C. Coste, *Collision of a 1–D column of beads with a wall*, soumis à **Phys. Rev. E**.

  E. Falcon, C. Laroche, S. Fauve, and C. Coste, *Behavior of one inelastic ball bouncing repeatedly off the ground*, soumis à **J. Phys. I (Paris)**.

  C. Coste, E. Falcon and S. Fauve, *Solitary waves in a chain of beads under Hertz contact*, soumis à **Phys. Rev. E**.

  K. Kumar, K. M. S. Bajaj, J. K. Bhattacharjee and E. Falcon, *Corrugation of heap of granular materials under vertical vibration*, soumis à **Proc. Roy. Soc. A**.

  K. Kumar, K. M. S. Bajaj, J. K. Bhattacharjee and E. Falcon, *Hexagons in granular materials under vertical vibration*, (in preparation).

- **Actes de conférences**

  C. Coste, E. Falcon et S. Fauve, *Propagations d'ondes non–linéaires dans une chaîne de billes en contact de hertz*, dans C. Petit, G. Pijaudier–Cabot, et J.-M. Reynouard, éditeurs, *Des géomatériaux aux ouvrages : expérimentations et modélisations*, pages 33–52. Hermes, Paris, 1995.

- **Rapport d'activité**

  C. Coste, E. Falcon et S. Fauve, Rapport d'activité du réseau G.E.O., projet « Comportement et microstructure des milieux granulaires », Mars 1995.

- **Communications orales**

  E. Falcon, *Dynamique de la collision entre une colonne de billes et un mur*, $17^{ième}$ Rencontre de Physique Statistique de Paris, 30–31 Janvier 1997, Ecole Supérieure de Physique et Chimie Industrielles, Paris, France.

  E. Falcon, *Dynamique de la collision entre une colonne de billes et un mur*, 27 Janvier 1997, Ecole Normale Supérieure, Paris, France.

  E. Falcon, *Dynamique de la collision entre une colonne de billes et un mur*, 13 Juin 1996, Réunion du projet « Comportement et microstructure des milieux granulaires » du réseau G.E.O., Ecole Centrale, Lyon, France.

  E. Falcon, *Quelques expériences dans les milieux granulaires 1D*, 28 Mars 1996, Journée des Thésards, Ecole Normale Supérieure, Lyon, France.

  E. Falcon, *Propagation d'ondes non linéaires dans une chaîne de billes en contact de Hertz*, 08 Novembre 1995, Ecole Normale Supérieure, Lyon, France.

  E. Falcon, *Propagation d'onde dans une chaîne de billes*, 18–28 Septembre 1995, Porquerolles (Var), France.

- **Communications orales ayant donné lieu à un résumé dans les rapports annuels de G.E.O.**

  Ondes solitaires dans une chaîne de billes en contact de Hertz, Colloque G.E.O. 1995: $2^{ème}$ réunion annuelle, 11–15 Décembre 1995, Aussois, France.

  Ondes sonores dans un milieu granulaire, Colloque G.E.O. 1994: $1^{ère}$ réunion annuelle, 21–25 Novembre 1994, Aussois, France.

- **Poster**

  E. FALCON, C. LAROCHE, S. FAUVE, and C. COSTE, *Collision of a 1-D column of beads with a wall*, Dynamics Days 1996: 7^{th} Annual Informal Workshop, 10–13 July 1996, Lyon, France.

  C. COSTE, E. FALCON and S. FAUVE, *Solitary wave propagation in a chain of beads under Hertz contact*, Dynamics Days 1996: 7^{th} Annual Informal Workshop, 10–13 July 1996, Lyon, France.

  C. COSTE, E. FALCON and S. FAUVE, *Ondes solitaires dans une chaîne de billes en contact de Hertz*, Colloque G.E.O. 1995: $2^{ème}$ réunion annuelle, 11–15 Décembre 1995, Aussois, France.